__**Présentation brève des thèmes de recherche**__ :

"These results are presumably parts of a broader picture. Lichtenbaum and Quillen conjecture that for $i = 1, 2$ and for $n \geq 1$ the Galois cohomology group $H^i(F, \mathbf{Z}_\ell(n))$ is related to $\mathbf{Z}_\ell \otimes K_{2n-i}(F)$. On the other hand, one form of Leopoldt's conjecture is that $H^1(F, \mathbf{Z}_\ell)$ be isomorphic to $\mathbf{Z}_\ell^{1+r_2}$. "
J. Tate. Relations between K_2 and Galois cohomology.
Invent. Math. 36, 257-274 (1976).

Mes activités de recherche se répartissent essentiellement en quatre thèmes de la manière suivante (les références renvoient à la liste des publications) :

(i) **Théorie d'Iwasawa** [01, 02, 15, 16, 18, 22].
La théorie d'Iwasawa occupe une place centrale en théorie des nombres. Elle est parallèle à celle des courbes sur les corps finis. À travers les conjectures principales (maintenant démontrées par Mazur-Wiles et Wiles), elle "explique" des relations algébrico-analytiques sur les corps de nombres en reliant les fonctions L p-adiques (analyse) à certains modules galoisiens (algèbre).

Ces modules galoisiens sont liés aux conjectures profondes en théorie des nombres telles que la conjecture de Leopoldt sur la non-nullité du régulateur p-adique d'un corps de nombres. Dans [01, 02], nous introduisons une famille de corps appelés p-rationnels qui sont des analogues des corps de fonctions de genre zéro. Plus précisément, soit F un corps de nombres et F_{S_p} la pro-p-extension maximale de F non-ramifiées en dehors des places p-adiques. Le corps F est dit p-rationnel lorsque le groupe de Galois $G(F_{S_p}/F)$ est un pro-p-groupe libre. En décrivant le groupe de Galois de la pro-p-extension maximale avec ramification restreinte de ces corps par générateurs et relations, on établit une "formule non abélienne du produit". Cette formule permet, en particulier, de dégager une infinité de corps de nombres non abéliens sur le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels satisfaisant à la conjecture de Leopoldt en p.

(ii) **K-théorie arithmétique** [12, 15, 21, 23, 24].
La conjecture Lichtenbaum-Quillen (prédisant un isomorphisme entre les groupes de K-théorie et certains groupes de cohomologie p-adiques) permet de relier les modules galoisiens (d'Iwasawa) ci-dessus aux groupes de K-théorie étales des anneaux d'entiers des corps de nombres.

- On peut ainsi utiliser la théorie d'Iwasawa pour obtenir des résultats en K-théorie : avec M. Kolster (McMaster), nous avons obtenu [12] une formule de genres en K-théorie étale analogue à la formule des classes de Chevalley. Plus précisément : soit L/F une extension cyclique de corps de nombres. Pour les groupes des classes, la co-descente galoisienne dans L/F est décrite par la formule des classes ambiges de Chevalley. Dans cette formule le seul facteur que l'on maîtrise difficilement est l'indice normique $[U_F^{'} : U_F^{'} \cap N_{L/F}(L^*)]$ pour les p-unités $U_F^{'}$. Nous avons obtenu une formule de genres analogue dans le cadre de la K-théorie étale où les p-unités $U_F^{'}$ sont remplacées par les groupes de K-théorie impairs.

- On peut aussi aller dans le sens inverse. Exploiter les résultats de la K-théorie en direction de la théorie d'Iwasawa : en étudiant les K-groupes des anneaux d'entiers le long des étages de la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique on retrouve [24] l'analogue des formules de Riemann-Hurwitz pour les invariants λ d'Iwasawa.

- Soit p un nombre premier impair et E/F une p-extension de corps de nombres de groupe de Galois G. Notons S l'ensemble des places ramifiées dans E/F ou divisant p. Considérons le morphisme naturel

$$f_i \,:\, K_{2i-2}^{\text{ét}}(o_F^S) \longrightarrow K_{2i-2}^{\text{ét}}(o_E^S)^G$$

sur les K-groupes des anneaux des S-entiers. Son noyau et son conoyau sont décrits (B. Kahn) par la cohomologie du groupe G à coefficients $K_{2i-1}^{\text{ét}}(o_E^S)$. À l'aide des résultats de Borel sur le rang des K-groupes impairs, on peut donner des majorations pour l'ordre de $\ker(f_i)$ et de $\mathrm{coker}(f_i)$. En revanche, comme indiqué par B. Kahn, des minorations pour l'ordre de $\ker(f_i)$ ou de $\mathrm{coker}(f_i)$ sont difficiles à obtenir. Dans [], nous apportons des réponses à cette question en terme de la ramification primitive.

(iii) **corps des normes et Systèmes dynamiques non archimédiens** [04, 13].
Dans son important article introductif "Non-Archimedean dynamical systems", J. Lubin a développé une théorie des systèmes dynamiques non archimédiens modelée sur la théorie des groupes formels. Soit p un nombre premier et soit $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers d'une extension finie k du corps $\mathbf{Q}_p$ des nombres p-adiques. Lubin conjecture que lorsque deux séries à coefficients dans $\mathcal{O}_k$, l'une réversible et l'autre non réversible, commutent pour la composition, il doit y avoir un groupe formel, défini sur $\mathcal{O}_k$, susceptible de rendre compte de cet état de fait. Avec mes collègues F. Laubie et A. Salinier, nous montrons [13] cette conjecture de Lubin pour une classe de séries à coefficients dans l'anneau $\mathbf{Z}_p$ des entiers p-adiques, dont les réductions modulo p jouissent de remarquables propriétés de ramification.

(iv) **Groupe de Galois des trinômes** [04, 06, 07, 09, 19, 20].
En explorant les conséquences de la classification des groupes finis simples, W. Feit a donné la liste des groupes non-résolubles susceptibles de se réaliser comme groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$ d'un trinôme irréductible de degré premier p :

1. Le groupe projectif spécial linéaire $PSL_3(2)$ de degré 7 ;
2. Les groupes $PSL_2(11)$ ou M_{11} (groupe de Mathieu) de degré 11 ;
3. Les groupes projectifs linéaires entre $PSL_2(2^e)$ et $P\Gamma L_2(2^e)$ de degré $1 + 2^e > 5$;
4. Le groupe symétrique S_p or le groupe alterné A_p.

À l'aide de cette liste, et le lemme d'Abhyankar, j'étudie [04] le groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$ de certains trinômes de type d'Eisenstein. L'école japonaise s'est beaucoup intéressée au problème de Galois direct des trinômes en général (Uchida, Osada, ...). Avec mon collègue A. Salinier, nous avons établi [06] que le point crucial dans ces études est la primitivité du groupe de Galois G. Avec S. Cohen (Glasgow) et A. Salinier nous avons dégagé [07, 09] des conditions explicites et très générales portant sur les coefficients de trinômes sous lesquelles le groupe de Galois G est le groupe alterné ou le groupe symétrique tout entier.