TD n^{o} 7 de Macroéconomie
Croissance optimale, critère de Phelps
Convergence dans le modèle de Solow

Licence AES AGE,AGT,CAI, semestre 5

Faculté de Droit et des Sciences Économiques de Limoges

1. Exercice 1 : La croissance optimale : Critère de phelps

Question 1 : Rappelez ce qu'est le critère de Phelps.

Réponse : Si l'on compare les états stationnaire dans le modèle de Solow, on constate qu'il existe un taux d'épargne qui maximise la consommation par tête d'état stationnaire. Le critère de Phelps ou règle d'or annonce que l'état stationnaire qui maximise la croissance est tel que :

$$Pmk^{*} = n + \delta$$

Où si l'on préfère le taux d'intérêt doit être égal au taux de croissance de l'économie DY^{*}/Y^{*} :

$$r^{*} = Pmk^{*} - \delta = n$$

Question 2 : Déterminez quelles économies sont ou ne sont pas à la règle d'or :

$E1$ **est telle que** $y_t = 100k^{0,4}$**,** $DL_t/L_t = 0,01$**,** $\delta = 0,09$ **Son capital par tête est de 5214,69.**

Réponse : Pour répondre à cette question, il existe deux voies :

— On peut calculer la Pmk pour la valeur donnée de capital par tête. Si la Pmk est égale à $n + \delta$ alors l'économie est à la règle d'or.
On sait que :

$$Pmk_t = \partial y_t/\partial k_t = 0,4 \times 100k_t^{0,4-1} = 0,4 \times 100 \times 5214,69^{-0,6} = 0,2353 \approx 23,5\%$$

Or comme

$$n + \delta = 0,01 + 0,09 = 0,1 = 10\%$$

On en déduit que l'économie n'est pas à la règle d'or.

— La seconde voie consiste à savoir qu'avec une fonction de production Cobb-Douglas $y_t = Ak_t^{\alpha}$, le taux d'épargne qui permet d'être à la règle d'or est $s^{or} = \alpha$. De l'accumulation du capital par tête $Dk_t = sy_t - (n + \delta)k_t$ on en déduit à l'état stationnaire que le ratio $k^*/y^* = s/(n + \delta)$. Ainsi quand on affirme que l'économie est à l'état stationnaire elle a nécessairement un taux d'épargne tel que :

$$s = (n + \delta)\frac{k^*}{y^*}$$

Pour déterminer le taux d'épargne de l'économie il faut calculer y^*.

$$y^* = 1005214,69^{0,4} = 3068,25$$

On en déduit que le taux d'épargne est :

$$s = (0,01 + 0,09)\frac{5214,69}{3068,25} \approx 0,17 = 17\%$$

On constate que le taux d'épargne d'état stationnaire est différent de 0,4 (α), donc l'économie $E1$ n'est pas à la règle d'or.

$E2$ **est telle que** $y_t = 50k^{0,2}$**,** $DL_t/L_t = 0,02$**,** $\delta = 0,09$ **Son capital par tête est de 280,71.**

Réponse : On peut appliquer les deux méthodes présentées précédemment.

$$Pmk^* = 0,2 \times 50 \times 280,71^{0,2-1} = 11\%$$

On remarque que :

$$Pmk^* = 0,11 = n + \delta = 0,02 + 0,09 = 0,11$$

Donc l'économie $E2$ est à la règle d'or. On pourrait vérifié par la méthode 2 que j'ai proposé que l'on obtient bien $s = 20\%$.

$E3$ **est telle que** $y_t = k^{0,8}$**,** $DL_t/L_t = 0$**,** $\delta = 0,05$ **Son capital par tête est de 1048576.**

Réponse : Là encore, on peut appliquer les deux méthodes présentées précédemment.

$$Pmk^* = 0,8 \times \times 1048576^{0,8-1} = 5\%$$

On remarque que :

$$Pmk^* = 0,05 = n + \delta = 0 + 0,05 = 0,05$$

Donc l'économie $E3$ est à la règle d'or. On pourrait vérifié par la méthode 2 que j'ai proposé que l'on obtient bien $s = 80\%$.

Question 3 : Supposons une économie $E4$ avec les caractéristiques suivantes $Pmk_t = 0,15$,$\delta = 0,1$, $x = 3\%$ et $n = 2\%$, est-elle à la règle d'or ?

Réponse : Pour répondre à cette question, il suffit d'appliquer le résultat selon lequel à la règle d'or on a $r^{or} = DY^*/Y^*$. Avec du progrès technique, on sait que le taux de croissance de l'économie à l'état stationnaire est égal à $n + x$. On peut réécrire que :

$$Pmk^{or} = n + x + \delta$$

Ici $Pmk^* = 15\%$ et $n + x + \delta = 2\% + 3\% + 10\% = 15\%$. Donc $Pmk^* = pmk^{or}$. L'économie $E4$ est bien à la règle d'or.

Question 4 : On suppose une fonction de production Cobb-Douglas par tête $y = Ak_t^\alpha$. Si une économie a un taux d'épargne $s > \alpha$ que devrait faire un dictateur bienveillant. Est-ce que toutes les générations apprécient cette décision ?

Réponse : On peut distinguer deux cas :

- Si l'économie est à l'état stationnaire avec $s > \alpha$, on a vu en cours que le fait de baisser le taux d'épargne à la valeur α permet à la génération présente de consommer plus et aux générations futures d'avoir la consommation maximum possible.
- Si l'économie est un dynamique transitoire on peut distinguer deux sous cas :
  - Si $k < k^{or}$ on ne peut pas dire qu'une modification du taux taux d'épargne puisse bénéficier à toutes les générations.
  - En revanche si $k > k^{or}$ on peut dire qu'une baisse du taux taux d'épargne va bénéficier à toutes les générations.

Exercice 2 : La convergence dans le modèle de Solow

Supposons une économie $E1$ qui converge vers l'état stationnaire où le PIB par tête sera de 36500 int.$. Supposons que cette économie n'est pas encore à l'état stationnaire, elle est donc en dynamique transitoire. Son PIB actuel à la date $t = 0$ est de 25000 int. $. CLes paramètres de l'économie sont :$s = 20\%, n = 2\$, \delta = 6\%$ et la même fonction de production $y_t = Ak_t^{0,3}$.

Question 1 : Dans le modèle de Solow à l'état stationnaire, déterminez le rapport k^*/y^*. En déduire avec les données du problème le capital par tête d'état régulier. Enfin calculer le paramètre de technologie A.

Réponse : A l'état stationnaire, on sait que :

$$\frac{y^*}{k^*} = \frac{s}{n+\delta}$$

Ainsi :

$$k^* = \frac{s}{n+\delta} y^* \quad \Rightarrow \quad k^* = \frac{0,2}{0,02+0,06} \times 36500 = 91250$$

La fonction de production est : $y_t = Ak_t^{0,3}$. On en déduit donc la valeur du paramètre de technologie :

$$A = \frac{y^*}{k_t^{*0,3}} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{36500}{91250^{0,3}} \approx 1186$$

Question 2 : Calculez le taux de croissance du capital par tête de l'économie à la date 0.

Réponse : De l'équation d'accumulation du capital physique par tête $Dk_t = sy_t - (n+\delta)k_t$, on en déduit facilement que :

$$\frac{Dk_0}{k_0} = s\frac{y_0}{k_0} - (n+\delta)$$

On connait n,δ, s et y_0. Il faut donc déterminer k_0. Comme on connait la fonction de production de l'économie on doit résoudre $y_0 = Ak_0^{\alpha}$ en k_0 soit :

$$25000 = 1186k_0^{0,3} \quad \Rightarrow \quad k_0 = \left(\frac{25000}{1186}\right)^{\frac{1}{0,3}} \quad \Rightarrow \quad k_0 = 25873$$

Le taux de croissance du capital par tête est donc :

$$\frac{Dk_0}{k_0} = 0,2\frac{25000}{25873} - (0,02+0,06) = 11,32\%$$

Question 2 : Calculez le taux de croissance de la production par tête de l'économie à la date 0.

Réponse : De la fonction de production, en prenant le Log puis en dérivant par rapport au temps, il vient :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = 0,3\frac{Dk_t}{k_t} = 0,3 \times 11,32\% \approx 3,4\%$$

Nous allons maintenant faire les mêmes calcul mais à partir des approximations linéaires que j'ai présenté en cours. Pour cela on se rappellera de deux résultats importants :

— La vitesse de convergence est :

$$\beta = (1-\alpha)(n+\delta)$$

— Le taux de croissance approximé du taux de croissance du capital par tête est :

$$\frac{Dk_t}{k_t} \approx \beta(Ln(k^*) - Ln(k_t))$$

— La variation approximée du capital par tête est :

$$Dk_t \approx \beta(k^* - k_t)$$

Question 1 : Calculez la vitesse de convergence. Quelle interprétation peut-on en donner en général ?

réponse : On sait que la vitesse de convergence est $\beta = (1-\alpha)(n+\delta)$ soit dans noter exercice :

$$\beta = (1-0,3)(0,02+0,06) = 5,6\%$$

La vitesse de convergence indique l'écart comblé en une unité de temps (l'année) en pourcentage de l'écart restant à combler.

Question 2 : Calculez à l'aide de l'approximation linéaire le taux de croissance du capital par tête puis le taux de croissance du PIB par tête.

Réponse : Vérifions notre interprétation de la vitesse de convergence. Puisque :

$$\frac{Dk_0}{k_0} \approx \beta(Lnk^* - Lnk_0)$$

On avait déterminé le capital d'état stationnaire $k^* = 91250$, On a le capital à la date 0 ($k_0 = 25873$) donc :

$$\frac{Dk_0}{k_0} \approx 0,056(Ln(91250) - Ln(25873)) = 7,05\%$$

Le taux de croissance de la production par tête est déterminé à partir de la fonction de production :

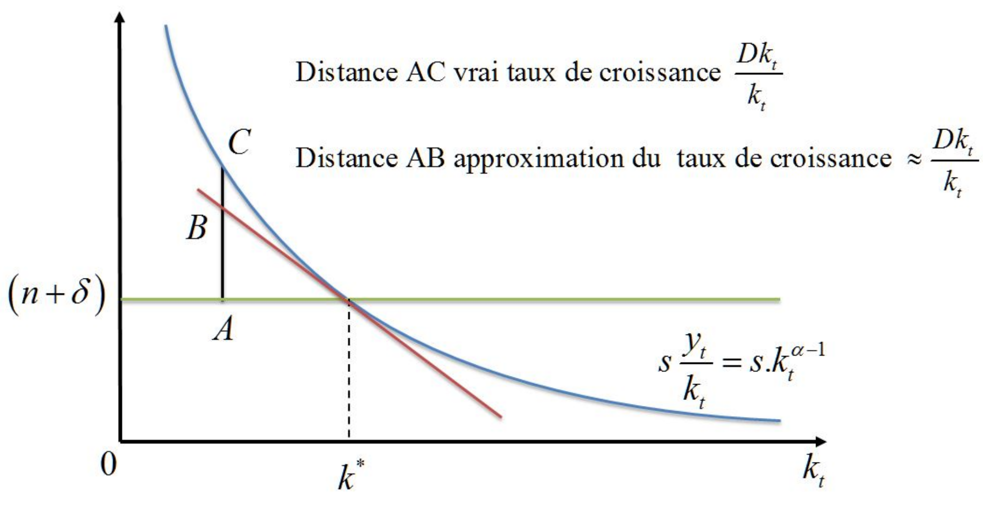
$$y_t = Ak_t^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad ln(y_t) = ln(A) + \alpha Ln(k_t)$$

En dérivant par rapport au temps il vient :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \alpha \frac{Dk_t}{k_t}$$

$$\frac{Dy_0}{y_0} = 0,3 \times 0,0705 = 2,12\%$$

Et donc avec l'approximation, si $y_0 = 25000$, $y_1 = 25000 \times 0,0212 = 528$, le PIB de l'économie devrait augmenter de 528 \$int.. Sans approximation le taux de croissance est $Dy_0/y_0 = 3,4\%$. Le PIB de l'économie devrait augmenter de $25000 \times 0,034 = 850\$$ int.. On remarque que ces taux de croissance approximés sont inférieurs aux "vrais" taux de croissance. Rappelez vous du graphique suivant pour comprendre pourquoi c'est ainsi :



L'intérêt essentiel de la linéarisation est d'une part d'obtenir une vitesse de convergence et d'autre part pour mener des éudes empiriques (test de convergence).