# Chapitre 1

# Intégrales généralisées

## I. Approximation des fonctions, développements limités

Dans le chapitre 3 du Cours de première année (premier semestre), vous avez vu la formule de Taylor pour construire des approximations de fonctions ; vous avez aussi vu la notion de fonctions équivalentes au voisinage d'un point. Dans cette partie, nous revoyons tout cela et l'approfondissons en introduisant la technique des développements limités.
Ces méthodes sont fondamentales pour les calculs de limites et d'ordres de grandeurs ; elle vont servir abondamment dans tous les chapitres vus ce semestre.

### I.1 Formules de Taylor

#### I.1.1 Formule de Taylor-Young

**Théorème 1** (Taylor-Young)**.** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Si $f$ est dérivable $n$ fois sur $I$, alors il existe une fonction $\epsilon$ définie sur $I$ vérifiant $\lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$ et telle que*

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \epsilon(x). \tag{I.1}$$

La formule (I.1) est connue sous le nom de *formule de Taylor-Young*. On parle aussi de développement de Taylor ("Taylor expansion" en anglais) ; nous verrons ci-dessous que le membre de droite de cette égalité est un *développement limité* de $f$ au voisinage de $x_0$. Cette formule montre comment, localement, on peut *approcher* une fonction par un polynôme.
Pour pouvoir l'utiliser pour des évaluations concrètes, il est utile d'avoir une estimation du *reste* $(x-x_0)^n\epsilon(x)$. C'est que que nous faisons maintenant.

#### I.1.2 Formule de Taylor-Lagrange, reste intégral

**Théorème 2** (Taylor-Lagrange)**.** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Si $f$ est dérivable $n+1$ fois sur $I$ alors, pour tout $x \in I$, il existe $c_x \in ]x_0, x[$ (resp. $]x, x_0[$ si $x < x_0$) tel que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x). \tag{I.2}$$

Vous connaissez déjà un cas simple de cette formule : pour $n = 0$, c'est le théorème des accroissements finis. Cette formule de Taylor-Lagrange peut donc se comprendre comme un théorème des accroissements finis généralisé.
Une conséquence utile de cette formule est *l'inégalité de Taylor-Lagrange* ci-dessous, qui permet de majorer l'écart le graphe de $f$ et l'approximation donnée par le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. Sous les hypothèses du théorème 2 :

$$\left| f(x) - \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right) \right| \leq \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{c \in I} |f^{(n+1)}(c)|. \tag{I.3}$$

**Exemple :** Comme la dérivée de $e^x$ est $e^x$, la formule de Taylor au voisinage de 0 nous donne

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x).$$

Utilisons l'inégalité de Taylor-Lagrange pour estimer une valeur de $e^{\frac{1}{2}}$. Comme la fonction exponentielle est croissante, nous voyons que (pour $x$ positif)

$$\left| e^x - \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} \right) \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{c \in [0,x]} e^c = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, comme nous savons que $e < 3$, nous pouvons majorer $e^{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt{3}$, donc par 1.74. Ainsi, la formule ci-dessus donne l'estimation suivante :

$$\left| e^{\frac{1}{2}} - \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n!} \right) \right| \leq 1.74 \frac{1}{2^(n+1)(n+1)!}.$$

Ceci montre que si on remplace $e^{\frac{1}{2}}$ par le nombre $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n \cdot n!}$ (que l'on peut calculer avec juste les opérations $+, *, /$), on a une précision de l'ordre de $5.10^{-3}$ pour $n = 3$, de $4.10^{-5}$ pour $n = 5$, de $3.10^{-11}$ pour $n = 10$, etc. Nous avons donc non seulement une approximation du nombre $e^{\frac{1}{2}}$ mais aussi une majoration de l'erreur commise dans cette approximation. □
Une autre estimation du reste est donné par la formule de Taylor avec reste intégral ci-dessous.

**Théorème 3** (Taylor-reste intégral)**.** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $I$ alors, pour tout $x \in I$ :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n)}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt. \tag{I.4}$$

### I.1.3 Notations $o(\cdots)$ et $\mathcal{O}(\cdots)$ de Landau

Reprenons la formule de Taylor-Young. Dans le reste $(x-x_0)^n \epsilon(x)$, le terme $(x-x_0)^n$ indique un « ordre de grandeur » de l'approximation. La notation ci-dessous permet d'écrire ce genre de reste de façon plus condensée.

**Définition 1.1.** *Soit $f$ une fonction réelle définie dans un voisinage de* $0$. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.*

– *On dit que $f = o\left(x^n\right)$ (« $f$ est un petit-oh de $x^n$ ») si*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

*Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ est négligeable devant $x^n$ au voisinage de* $0$.

– *On dit que $f = \mathcal{O}\left(x^n\right)$ (« $f$ est un grand-oh de $x^n$ ») s'il existe $a \geq 0$ tel que*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} |\frac{f(x)}{x^n}| < a.$$

*Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ est dominée par $x^n$ au voisinage de* $0$.

Les cas typiques d'utilisation sont les suivants.
Quand $f(x) = x^n \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$, on a $f = o\left(x^n\right)$.
Quand $f(x) = x^n\,(a + \epsilon(x))$, on a $f = \mathcal{O}\left(x^n\right)$.
Naturellement, on peut remplacer $x^n$ par $(x - x_0)^n$ si on travaille au voisinage d'un réel $x_0$ non nul (et par $\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ si on travaille au voisinage de $+\infty$).

### I.1.4 Développement limité

**Définition 1.2.** *Soit $x_0$ un réel et $f$ une fonction définie au voisinage de $x_0$. On dit que $f$ admet un* développement limité d'ordre $n$ au voisinage de $x_0$ *s'il existe un intervalle $I$ contenant $x_0$ et $n+1$ nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Dans les cas d'applications des formules de Taylor, le membre de droite de la formule donne donc un développement limité de $f$. Remarquons que, pour un polynôme $P$ de degré $n$, si $P = o\left(x^n\right)$ alors nécessairement $P = 0$ (c'est le polynôme nul). Ceci montre le résultat important suivant d'unicité du développement limité :

**Lemme 1.3.** *Soit $x_0$ un réel et $f$ une fonction définie au voisinage de $x_0$. Supposons que l'on trouve deux développement limités $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$ et $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$. Alors, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a $a_k = b_k$. Autrement dit, il y a unicité du développement limité (s'il existe).*

**Remarque :** Si $f$ est suffisamment dérivable, alors la formule de Taylor donne un développement limité. Mais la réciproque n'est pas vraie : une fonction peut admettre un développement limité sans être dérivable. Par exemple, pour $f(x) = x^{\frac{5}{2}} \sin(1/x)$ (pour $x \in \mathbb{R}^\star$), on peut montrer que $f(x) = o\left(x^2\right)$ (faites le) mais $f$ n'est pas dérivable en 0.
**Exemple :** On sait (somme des termes d'une suite géométrique) que

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - x^n \frac{x}{1 - x}$$

Si on pose $\epsilon(x) = \frac{x}{1-x}$, on voit qu'on a $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$. Le lemme 1.3 ci-dessus montre donc que $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$ est le développement limité de $\frac{1}{1-x}$ au voisinage de 0.

## I.2 Calcul de développements limités et applications

### I.2.1 Exemples

Les trois développements limités ci-dessous sont à connaître par coeur impérativement.

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
\frac{1}{1-x} & = & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + \cdots + & x^n & + & o\left(x^n\right) \\
e^x & = & 1 & + & x & + & \frac{x^2}{2} & + & \frac{x^3}{6} & + \cdots + & \frac{x^n}{n!} & + & o\left(x^n\right) \\
(1+x)^\alpha & = & 1 & + & \alpha x & + & \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 & + & \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 & + \cdots + & \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n & + & o\left(x^n\right)
\end{array}$$

### I.2.2 Règles de calcul sur les développements limités

Une fois qu'on connait des développement limités, on peut les additionner, les multiplier, les dériver et les intégrer. Nous allons préciser ça.

ADDITION : Si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$ alors, pour un réel $\lambda$,

$$f(x) + \lambda g(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k + \lambda b_k)(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right).$$

**Exemple : les fonctions hyperboliques** $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ **et** $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$**.** En utilisant le développement limité de $e^x$ et $e^{-x}$, on obtient

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^6\right)$$
$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + o\left(x^6\right)$$

Il ne vous reste plus qu'à écrire la formule générale.

FONCTIONS PAIRES/IMPAIRES :

**Lemme 1.4.** *Si $f$ est une fonction paire (resp. impaire), alors son développement limité au voisinage de 0 n'a que des termes de degré pair (resp. impair).*

DÉMONSTRATION- En cours. □

PRODUIT : Pour obtenir le développement limité de $f(x) \cdot g(x)$ à l'ordre $n$, on multiplie les polynômes $\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ et $\sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k$ en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à $n$ dans ce produit.

| |
|---|
| Si on a deux développement limités d'ordres différents et qu'on les multiplie ou qu'on les additionne, alors c'est l'ordre le plus petit qui l'emporte. |

**Exemple :** Supposons que $f(x) = 1 - x^2 + x^2\epsilon_1(x)$ et $g(x) = 1 - x + x^3\epsilon_2(x)$. Alors $f(x)g(x) = 1 - x - x^2 + x^2\epsilon(x)$ : les termes en $x^3$ ont été « avalés » par le reste $x^2\epsilon(x)$.

**Exemple :** Développement limité de $\dfrac{x^2 \sin(x)}{1+x}$ au voisinage de $0$.

INTÉGRATION :

**Lemme 1.5.** *Soit $f$ une fonction dérivable dans un voisinage de $0$. Si $f'$ admet au voisinage de $0$ le développement limité d'ordre $n$ $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right)$ alors $f$ admet au voisinage de $0$ le développement limité d'ordre $n+1$*

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k + o\left(x^{n+1}\right).$$

DÉMONSTRATION- En cours. □

Autrement dit, on peut intégrer terme à terme un développement limité (et ça fait monter l'ordre du développement).

**Exemple :** Développement limité de $\ln(1-x)$

DÉRIVATION :

**Lemme 1.6.** *Soit $f$ une fonction dérivable dans un voisinage de $0$. Si $f$ admet au voisinage de $0$ le développement limité d'ordre $n$ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right)$ et si sa dérivée $f'$ admet au voisinage de $0$ un développement limité d'ordre $n-1$, alors ce développement limité est :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k + o\left(x^{n-1}\right).$$

DÉMONSTRATION- En cours. □

COMPOSITION :

**Lemme 1.7.** *Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $0$ et vérifiant $f(0) = 0$. On suppose que $f$ admet le développement limité $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right) = xP(x) + o\left(x^n\right)$, où $P$ est un polynôme de degré au plus $n-1$.*
*Soit $g$ une fonction définie au voisinage de $0$ admettant un développement limité $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o\left(x^n\right)$. Posons $F(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$.*

*Alors le développement limité de $F$ d'ordre $n$ au voisinage de* $0$ *s'obtient en calculant* $\sum_{k=0}^{n} b_k x^k P(x)^k$ *et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à $n-k$ dans le calcul de $P(x)^k$.*

DÉMONSTRATION- En cours. □

DIVISION : Soit $f$ une fonction définie au voisinage de 0 et telle que $f(0) \neq 0$. On suppose que $f(0) = 1$. Supposons que $f$ admet un développement limité de la forme

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right) = 1 - x\,P(x) + o\left(x^n\right)$$

d'ordre $n$ au voisinage de 0 (où $P$ désigne un polynôme de degré au plus $n-1$). Comme on sait que $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o\left(u^n\right)$, le lemme de composition 1.7 montre que le développement limité de $1/f$ au voisinage de 0 est donné par

$$\frac{1}{f}(x) = 1 + x\,P(x) + \sum_{k=2}^{n} x^k P(x)^k + o\left(x^n\right)$$

où, comme ci-dessus, l'on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à $n-k$ dans le calcul de $P(x)^k$.

**Exemple :** On sait que $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o\left(x^5\right) = 1 - x^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}x^2) + o\left(x^5\right)$. Donc $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + x^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}x^2) + x^4(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}x^2)^2 + o\left(x^5\right)$. On calcule facilement $(\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2)^2$ (modulo $x^5$) et on obtient $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o\left(x^5\right)$. On multiplie ce développement par celui du sinus ($\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^5\right)$) et on trouve le développement de $\tan(x)$ à l'ordre 5.

Une autre méthode consiste à procéder par *division suivant les puissances croissantes* comme dans l'exemple ci-dessous.

**Exemple :** Calculons encore un développement limité de $\tan(x)$ au voisinage de 0. On sait que $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^6\right)$ et $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o\left(x^6\right)$. Comme la fonction tangente est impaire, son développement limité n'aura que des termes de degré impair et sera donc de la forme $\tan(x) = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right)$. On a donc

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^6\right) = (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6)(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5) + o\left(x^6\right)$$

Le terme de degré 1 dans cette égalité montre que $c_1 = 1$. On a donc

$$(c_3 x^3 + c_5 x^5)(1 - \frac{1}{2}x^2) = \sin(x) - x\cos(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + o\left(x^6\right)$$

On en déduit que $c_3 = \frac{1}{3}$. On poursuit le processus de division :

$$c_5 x^5 = \sin(x) - x\cos(x) - \frac{1}{3}x^3\cos(x) = \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^6\right)$$

d'où $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^6\right)$.

**Exercice 1.1.** *Retrouver les valeurs de* $c_1, c_3, c_5$ *de ce développement limité en utilisant la relation* $\tan(x) = \displaystyle\int_0^x (1+\tan(t)^2)\,dt$ *et en procédant par identification.*

**Exercice 1.2.** *Développement limité de* $\arctan(x)$ *au voisinage de* $0$ *par (au moins) deux méthodes : d'une part en utilisant la relation* $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$*, d'autre part en utilisant le développement de la tangente et la relation* $\arctan(\tan(x)) = x$.

### I.2.3 Développement limité de fonctions au voisinage d'un point autre que 0

En pratique, il est toujours plus commode de calculer des développements limités au voisinage de 0.
Au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, on pose donc $x = x_0 + h$ puis $f(x) = f(x_0+h)$ et on la regarde comme une fonction en $h$ dont on calcule un développement limité au voisinage de $h = 0$.
Au voisinage de $+\infty$, on pose $x = 1/h$, donc $f(x) = f(1/h)$ et on la regarde comme une fonction en $h$ dont on calcule un développement limité au voisinage de $h = 0$.

### I.2.4 Équivalence de fonctions au voisinage d'un point

**Définition 1.8.** *Soit* $f$ *et* $g$ *deux fonctions définies au voisinage de* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$*. On dit que* $f$ *est* équivalente à $g$ au voisinage de $x_0$ *quand* $\displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$*. On le note* $\boxed{f \underset{x_0}{\sim} g.}$

Une caractérisation commode est la suivante. On a $f \underset{x_0}{\sim} g$ lorsque, pour $x$ au voisinage de $x_0$, on a $f(x) = g(x)\cdot(1+o(1))$ ou encore $f(x) = g(x)\cdot(1+\epsilon(x))$ avec $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$.

**Lemme 1.9.** *Soit* $f$ *et* $g$ *deux fonctions définies au voisinage de* $x_0$*, non nulles au voisinage de* $x_0$ *et équivalentes au voisinage de* $x_0$*. Alors elles sont de même signe au voisinage de* $x_0$*.*

DÉMONSTRATION- En cours. □

Une fonction $f$ non nulle ne peut jamais être équivalente à 0.
On ne peut pas additionner des équivalents ; pour le faire, il faut revenir au développement limité correspondant et faire un développement limité de la somme. En revanche, on peut multiplier des équivalents.

# II. Rappels sur le calcul d'une intégrale définie

Rappelons (première année, second semestre, chapitre 9) qu'une « intégrale définie » concerne les fonctions réelles $f$ *continues sur un intervalle fermé et borné* $[a, b]$. L'objet $\int_a^b f(t)dt$ existe alors bel et bien. C'est un nombre. Géométriquement, on l'interprète comme l'aire *algébrique* de la portion de plan (rapporté au repère $Oxy$) délimitée par l'axe des abscisses $Ox$, les droites verticales $x = a$ et $x = b$ et la courbe graphique qui représente $f$.

## II.1 Intégration par parties

Si $u$ et $v$ sont des fonctions continûment dérivables sur l'intervalle $[a, b]$, on obtient directement à partir de la relation $(uv)' = u'v + uv'$ :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx, \tag{II.5}$$

Pour toute fonction réelle ( à variable réelle $x$) continûment dérivable $u$, on pose $du = u'(x)dx$. Si $u$ et $v$ sont deux fonctions continûment dérivables, on a $d(uv) = udv + vdu$. Cela permet d'écrire la formule de l'intégration par parties de façon plus simple :

$$\int_a^b u\,dv = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{II.6}$$

**Exemple :** $\int_0^1 te^t\,dt = \int_0^1 t\,d(e^t) = \Big[te^t\Big]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt = \Big[te^t - e^t\Big]_0^1 = 1.$

## II.2 Changement de variables

Soient $I$ et $J$ deux intervalles réels, $u : J \longrightarrow I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Supposons que $u$ réalise une bijection d'un intervalle $[\alpha, \beta] \subset J$ dans $[A, B] \subset I$ et est continûment dérivable. Si $F$ est une primitive de $f$, l'égalité

$$(F \circ u)' = (f \circ u)\,u',$$

montre que (en effectuant le changement de variable $x = u(t)$) :

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\,dt = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx. \tag{II.7}$$

Ne pas oublier, dans un changement de variable, de changer les bornes de l'intégrales.
**Exemple :** calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x},$$

à l'aide du changement de variable classique : $t = \tan\frac{x}{2}\cdot$

**Exercice 1.3.** *Calculer les intégrales :*

$$\int_0^1 t^2e^t\,dt, \quad \int_1^2 \frac{\ln t}{t}\,dt, \quad \int_0^1 \frac{1+t}{1+t^2}\,dt.$$

# III. Intégrale généralisée

## III.1 Position du problème

Jusqu'à présent, pour nous, l'intégrale (dite définie) est une notion qui ne concerne que les fonctions *continues* sur un intervalle *fermé* et *borné*. Ces fonctions sont en particulier bornées.

**Question**
Que devient la notion d'intégrale si l'on supprime l'une des contraintes précédentes ?
**Réponse**
C'est l'objet de ce chapitre où, toujours sous l'hypothèse de continuité, nous généraliserons la définition de l'intégrale aux intervalles pas nécessairement bornés ou/et pas nécessairement fermés.
Autrement dit, nous voudrions donner un sens aux objets

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx, \quad \int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

où $f$ est continue respectivement sur les intervalles *ouverts ou semi-ouverts d'extrémités des nombres finis ou infinis*. Ces intégrales sont parfois appelées intégrales *"impropres"*.
Dans un premier temps, nous verrons le cas des intervalles semi-ouverts où nous distinguerons les cas des intervalles semi-ouverts *bornés* des intervalles semi-ouverts *non bornés*. Ensuite, nous étudierons les cas restants comme des combinaisons des premiers.

**Exercice 1.4.** *Donner des exemples de fonctions bornées et non bornées sur des intervalles de type* $[a,b[$ *et* $[a,+\infty[$.

## III.2 Généralisation aux intervalles semi-ouverts

### III.2.1 Cas d'un intervalle borné

Les intervalles semi-ouverts bornés sont de la forme $]a,b]$ ou $[a,b[$ où $a$ et $b$ sont des nombres réels.
Soit $f : ]a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $c \in ]a,b]$, le nombre $I(c) = \displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ est bien défini et cela, de façon unique (pourquoi ?).

**Définition 1.10.** *On dit que la fonction* $f : ]a,b] \to \mathbb{R}$ *est* intégrable sur l'intervalle $]a,b]$ *(ou que* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge*) si la limite de la fonction* $I$ *ci-dessus existe lorsque* $c$ *tend vers* $a$*. Cette limite est alors appelée intégrale de* $f$ *sur l'intervalle* $]a,b]$ *et on écrit*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} I(c).$$

Si une intégrale ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

**Exercice 1.5.** *Transposer la définition (1.10) aux intervalles de la forme* $[a,b[$.

**Exercice 1.6.** *Quelle est la nature de l'intégrale* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ ?

**Notation :** dans l'exemple ci-dessus, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est définie sur $[0,1[$. Pour souligner le fait qu'il y a un problème quand $x$ tend vers 1, on pourra la noter

$$\int_0^{\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx.$$

**Proposition 4** (intégrale de Riemann en 0)**.** *Soit* $f\ :]0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. *L'intégrale* $\int_{\to 0}^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ *converge si* $\alpha < 1$ *et diverge si* $\alpha \geq 1$.

DÉMONSTRATION- pour $c \in ]0,1[$, on a

$$I(c) = \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} -\ln c & \text{si} \quad \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}(1-c^{1-\alpha}) & \text{si} \quad \alpha \neq 1. \end{cases}$$

d'où le résultat. □

**Exercice 1.7.** *Cherchez un exemple de fonction continue, non bornée et intégrable sur un intervalle de type* $[a,b[$.

**Proposition 5.** *Soit* $f\ :]a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue qui admet une limite lorsque* $x \to a$. *L'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dx$ *est convergente.*

DÉMONSTRATION- En cours. □

### III.2.2 Cas d'un intervalle non borné

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $c \in [a,+\infty[$, le nombre $I(c) = \int_a^c f(x)\,dx$ est bien défini et cela, de façon unique.

**Définition 1.11.** *On dit que la fonction* $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *est* intégrable sur $[a,+\infty[$ *(ou que* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge*) si la limite de la fonction* $I$ *existe lorsque* $c$ *tend vers* $+\infty$. *Cette limite est alors appelée* intégrale de $f$ sur l'intervalle $[a,+\infty[$ *et on écrit*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} I(c).$$

**Proposition 6** (intégrale de Riemann en $+\infty$)**.** *Soit* $f\ : [1,+\infty] \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. *L'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ *converge si* $\alpha > 1$ *et diverge pour* $\alpha \leq 1$.

DÉMONSTRATION- voir la proposition (4).

**Exercice 1.8.** *Reprendre la définition précédente pour l'intervalle de type* $]-\infty,a]$.

**Exercice 1.9.** *Trouver la nature de l'intégrale* $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2(1-x)}dx$.

## III.3 Généralisation aux intervalles ouverts

### III.3.1 Cas d'un intervalle borné

Un intervalle ouvert et borné est de la forme $]a,b[$ où $a$ et $b$ sont nombres réels.

**Théorème/Définition 7.** *Soit $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Si pour un nombre $c\in\,]a,b[$, les intégrales $\int_a^c f(x)\,dx$ et $\int_c^b f(x)\,dx$ convergent, alors elles le sont indépendamment du choix de $c\in\,]a,b[$.*
*On dit alors que* la fonction $f$ est intégrable sur $]a,b[$ *et*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

DÉMONSTRATION- En cours. □

**Exemple** L'intégrale $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ est convergente (pourquoi ?).

Dans le cas d'une intégrale généralisée sur un intervalle ouvert, il faut donc traiter les deux bornes séparément. L'intégrale convergera seulement quand elle converge (indépendamment) en chaque borne. D'autre part, il faut toujours vérifier que la fonction est bien définie et intégrable en tout point à l'intérieur de l'intervalle.

### III.3.2 Cas d'un intervalle non borné

Un intervalle ouvert non borné est de la forme $]-\infty,b[$, $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,+\infty[$.

**Théorème/Définition 8.** *Soit $f:]a,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Si pour un nombre $c\in\,]a,+\infty[$, les intégrales $\int_a^c f(x)\,dx$ et $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent, alors elles le sont indépendamment du choix de $c\in\,]a,b[$.*
*On dit alors que* la fonction $f$ est intégrable sur $]a,+\infty[$ *et*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

**Exercice 1.10.** *Transposer cette définition aux cas des intervalles $]-\infty,a[$ ou $]-\infty,+\infty[$.*

**Exemple** La fonction $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=e^{-x}$ est intégrable (cours).

**Exercice 1.11.** *Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ converge. En est-il de même pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x}\,dx$ ?*

**Terminologie** Une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ est dite intégrable sur l'intervalle $I$ (ouvert, fermé ou semi-ouvert) si son intégrale converge.

# IV. Propriétés des intégrales convergentes

## IV.1 Intégrale généralisée de fonctions positives

Rappelons qu'une fonction continue et croissante $u : [a,b[\to \mathbb{R}$ admet une limite lorsque $x$ tend vers $b$ si, et seulement si, elle est majorée (prouvez le). Ce rappel permet d'établir un critère de convergence des intégrales de fonctions positives.

**Lemme 1.12.** *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Pour que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ converge, il faut et il suffit que la fonction définie sur $[a,b[$ par $t \mapsto \int_a^t f(x)\,dx$ soit majorée.*

DÉMONSTRATION- En cours. □

**Exercice 1.12.** *Trancrire le théorème précédent aux autres cas d'intervalles semi-ouverts et ouverts.*

**Théorème 9.** *Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives telles que $f \le g$. Alors,*

1. *Si l'intégrale $\int_a^t g(x)\,dx$ converge, l'intégrale $\int_a^t f(x)\,dx$ converge aussi.*
2. *Si l'intégrale $\int_a^t f(x)\,dx$ diverge, l'intégrale $\int_a^t g(x)\,dx$ diverge aussi.*

DÉMONSTRATION- En cours. □Ce théorème est parfois appelé "critère de comparaison".

**Exemples**

1. On vérifie que pour tout $x$ de l'intervalle $[1,+\infty[$, $e^{-x^2} \le e^{-x}$. Donc, l'intégrale $\int_a^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ où $a$ est un réel quelconque converge (à montrer rigoureusement).
2. Par ailleurs, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx$ diverge (pourquoi ?).

## IV.2 Critère de Cauchy

**Proposition 10.** ***(Critère de Cauchy pour la convergence des intégrales)*** *Soit $f$ une fonction réelle ou complexe, définie dans l'intervalle $[a,+\infty[$ et continue par morceaux dans tout intervalle $[a,t]$, $(a<t)$. Pour que l'intégrale généralisée*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

*soit convergente, il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie :*
*pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t_0$ tel que, quels que soient $t_1, t_2$ supérieurs à $t_0$, on a $|\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx| \le \epsilon$.*

DÉMONSTRATION- En cours. □

**Remarque :** Soit $f$ une fonction réelle ou complexe, définie dans l'intervalle $[a,+\infty[$. Supposons que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l \neq 0$. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge. Une condition nécessaire (mais pas suffisante) de convergence de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

En effet, supposons (par exemple) que $l > 0$ et choisissons un $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < l$. Par hypothèse, il existe un nombre $A$ tel que, pour tout $x > A$, on ait $f(x) > l - \epsilon > 0$. Alors, pour $x > A$, $\int_A^x f(t)\,dt > \int_A^x (l-\epsilon)\,dt = (l-\epsilon)(x-A)$. Comme $\lim_{x\to\infty}(x-A) = +\infty$, on a $\lim_{x\to\infty}\int_A^x f(t)\,dt = +\infty$ donc l'intégrale diverge.

**Exemple : les intégrales de Fresnel.** Montrer que les intégrales

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx, \quad \int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$$

sont convergentes.

Considérons l'intégrale $\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx$ et utilisons le changement de variable $x^2 = t$. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est bijective de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ et à dérivée continue. Le changement de variable est donc légitime. On a , pour $0 < b \leqslant b'$,

$$\int_b^{b'}\cos(x^2)\,dx = \int_{b^2}^{b'^2}\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,dt.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_{b^2}^{b'^2}\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,dt = \left[\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\right]_{b^2}^{b'^2} + \frac{1}{4}\int_{b^2}^{b'^2}\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt.$$

Donc, on obtient

$$|\int_b^{b'}\cos(x^2)\,dx| \leqslant \frac{1}{2b'} + \frac{1}{2b} + \int_{b^2}^{b'^2}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt.$$

Or, on a d'une part, pour t$b$ et $b'$ assez grand, on a $\frac{1}{2b'} \leqslant \epsilon/3$ et $\frac{1}{2b} \leqslant \epsilon/3$. D'autre part, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

étant convergente, elle vérifie donc le critère de Cauchy (disons avec $\epsilon/3$ ).Il s'ensuit que

$$|\int_b^{b'}\cos(x^2)\,dx| \leqslant \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

pour $b' \geqslant b \geqslant b_0$. Donc l'intégrale de Fresnel

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx$$

vérifie le critère de Cauchy, et par conséquent, elle est convergente. La convergence de la deuxième intégrale de Fresnel se démontre de façon analogue. □

**Proposition 11** (Critère d'Abel)**.** *Soit $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec :*

1. *$f$ est positive et décroissante vers $0$ quand $x$ tend vers $+\infty$.*
2. *Il existe $M > 0$ tel que, $\forall x \in [a, +\infty[$, on a $\left|\int_a^x g(t)dt\right| < M$.*

*Alors $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.*

DÉMONSTRATION- Utilise le critère de Cauchy et la seconde formule de la moyenne : pour tous $x, y \in [a, +\infty[$, $\exists c \in [x, y]$ tel que $\int_x^y f(t)g(t)dt = f(x)\int_x^c g(t)dt$. En effet, on a alors $\left|\int_x^y f(t)g(t)dt\right| \leq 2Mf(x)$ et $f(x)$ tend vers 0 ce qui permet d'appliquer le critère de Cauchy □

## IV.3 Convergence absolue

**Définition 1.13.** *Soit $I$ un intervalle ouvert ou semi-ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Son intégrale est dite absolument convergente si l'intégrale de la fonction $|f| : I \to \mathbb{R}$ est convergente.*

Dans cette définition, l'intervalle $I$ pourrait être borné ou non borné.

**Théorème 12.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert ou semi-ouvert $I$. Si son intégrale est absolument convergente, alors elle est convergente.*

DÉMONSTRATION- En cours. □

**Exemple** On montre facilement que l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}dx$ est absolument convergente (idée : $|\sin(x)| \leq 1$ puis majoration par une intégrale de Riemann) ; elle est donc convergente.
**Exercice** Montrer que l'ensemble des fonctions continues et absolument intégrables sur un intervalle $I$ est stable par rapport à l'addition.

## IV.4 Intégrabilité et équivalence de fonctions

**Théorème 13.** *Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions positives, continues. Si elles sont équivalentes au voisinage du point $b$, alors les deux intégrales*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b g(x)\,dx$$

*sont de même nature (ou bien elles convergent toutes les deux, ou bien elles divergent toutes les deux).*

DÉMONSTRATION- En cours. □

**Exemple** la fonction $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}}$ est équivalente à l'infini à $\frac{2}{x^{3/2}}$. Comme $\int^{\to+\infty} \frac{2}{x^{3/2}}dx$ converge (intégrales de Riemann), l'intégrale $\int^{\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}}dx$ converge.

**Exercice 1.13.** *L'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$ *est divergente (pourquoi ?)*

**Remarque :** Le théorème précédent peut être étendu aux fonctions posistives $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

où $\lambda$ est un nombre *strictement positif.*
En effet, sous cette condition, on peut déduire que les fonctions $f$ et $\lambda g$ sont équivalentes, donc de même nature et que les fonctions $\lambda g$ et $g$ sont aussi de même nature.

**Remarque :** Pour une fonction $f := [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ positive, si on arrive à montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) x^{\alpha} = l \geq 0$ avec $\underline{\alpha > 1}$, alors ces critères montrent que $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge.

# V. Cas d'une fonction complexe de variable réelle

De telles fonctions sont définies sur une partie $I$ de $\mathbb{R}$ et prennent leurs valeurs dans $\mathbb{C}$.
**Exemples**

1. L'image de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{it}$ est le cercle trigonométrique (ensemble des nombres complexes de module égal à 1.)
2. L'image de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $g(t) = t(1 + i)$ est la première bissectrice du plan rapporté au repère usuel.

**Remarque :** Soit $I$ un intervalle. La donnée d'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ équivaut à la donnée de deux fonctions $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ qui correspondent aux parties réelle et imaginaire de la première. On écrit : $f = f_1 + i f_2$.

**Définition 1.14.** *Soit $I$ un intervalle quelconque. La fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dite continue si les parties réelle et imaginaire $f_1$ et $f_2$ sont continues.*

Il suffit que l'une des deux fonctions $f_1$ ou $f_2$ soit discontinue pour que la fonction $f$ le soit.

**Définition 1.15.** *Soit $I$ un intervalle quelconque. La fonction $f : I \to \mathbb{C}$, continue, est intégrable si les parties réelle et imaginaire $f_1$ et $f_2$ sont intégrables sur $I$ et alors,*

$$\int_I f(x)\, dx = \int_I f_1(x)\, dx + i \int_I f_2(x)\, dx.$$

Cette définition regroupe tous les cas d'intervalle. Elle concerne donc les intégrales définies comme les intégrales généralisées.

**Attention** : il s'agit bien ici de fonctions complexes de variable réelle car pour les fonctions complexes de variable complexe, la définition d'intégrale est toute autre. Elle sera vue en troisième année.

Les règles d'intégration vues précédemment s'appliquent aux fonctions aussi bien réelles que complexes, *mais de variable réelle.*

## VI. La fonction gamma d'Euler : $\Gamma$

Soit $\alpha > 0$, La fonction $x \mapsto e^{-x}x^{\alpha-1}$ est définie et continue dans $]0,+\infty[$. Montrons que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$$

est convergente. On sépare cette intégrale en deux intégrales généralisées :

$$\int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx.$$

**Étude de** $\int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$**.** On remarque que $0 < e^{-x}x^{\alpha-1} \leqslant \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ et l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}}\,dx$ est convergente pour $\alpha > 0$. Le critère de comparaison montre que l'intégrale $\int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$ est convergente pour $\alpha > 0$.
**Étude de** $\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$**.** Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}x^{\alpha-1}}{1/x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} = 0$, donc pour $x$ assez grand, on a $e^{-x}x^{\alpha-1} \leqslant \frac{1}{x^2}$. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$, le critère de comparaison permet de conclure que l'intégrale $\int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$ est convergente pour $\alpha > 0$. On peut poser la définition suivante

**Définition 1.16.** *On appelle* fonction gamma d'Euler *la fonction* $\Gamma : ]0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *donnée par*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx.$$

**Proposition 14.** *Pour* $\alpha > 1$, *on a* $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1), \quad (\alpha > 1)$.
*En particulier, pour tout entier* $n \geqslant> 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

DÉMONSTRATION- le point 1. se démontre en utilisant une intégration par parties. Pour le point 2. on applique la formule établie au point 1. et on montre que $\Gamma(1) = 1$.