L3 Maths : Cours d'Intégration (partie II)

Noureddine Igbida [1]

2012-2013

1. Institut de recherche XLIM, UMR-CNRS 6172, Faculté des Sciences et Techniques, Université de Limoges 123, Avenue Albert Thomas 87060 Limoges, France. Email : noureddine.igbida@unilim.fr

Table des matières

Université de Limoges

Chapitre 2

Applications Mesurables

2.1 Introduction

Problème posé : étant donné une application numérique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives, évaluer approximativement puis exactement l' "aire" $\mathcal{A}$ comprise entre la courbe représentant f et l'axe x'x.

Idées de méthodes conduisant à l'intégrale pour la mesure de Lebesgue :

1- Archimède - Cauchy - Riemann ... (de 287 av. J.C. à 1850)

On se limite à une application f d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à valeurs d'abord positives. On choisit une subdivision σ de l'intervalle de définition de f en s sous-intervalles consécutifs $[x_i, x_{i+1}[$, et on remplace f par une fonction en escalier f_σ, proche de f, constante sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}[$ et égale à $f(t_i)$ pour une valeur t_i fixée dans $[x_i, x_{i+1}[$. L'aire associée à f_σ est

$$\mathcal{A}_\sigma = \sum_{i=1}^{s}(x_{i+1} - x_i)f(t_i)$$

et donne une valeur approchée de $\mathcal{A}$. L'étude de l'existence d'une limite des quantités $\mathcal{A}_\sigma$ obtenues lorsqu'on prend des subdivisions de plus en plus fines conduit à la notion d'intégrale de Riemann (qui peut être étendue aux fonctions de signe quelconque).

On peut alors démontrer que ce type de méthode s'applique aux fonctions définies sur un intervalle compact, bornées et continues presque partout.

2- Lebesgue (vers 1902)

On n'impose plus à l'intervalle de définition de f d'être borné. L'idée nouvelle est de classer, à la manière des statisticiens, les valeurs prises par f, en prenant une subdivision σ de l'espace image (et non l'espace de départ) en s intervalles consécutifs $[y_i, y_{i+1}[$.

A chaque intervalle $[y_i, y_{i+1}[$ on associe l'ensemble

$$A_i = f^{-1}([y_i, y_{i+1}[) = \{x; y_i \leq f(x) < y_{i+1}\};$$

les parties A_i ainsi obtenues forment une partition du domaine de définition de f mais ne sont plus nécessairement des intervalles.

On remplace f par la fonction f_σ , proche de f, constante et égale à c_i sur chaque A_i (c_i élément fixé dans $[y_i, y_{i+1}[$).On dit de la fonction f_σ qu'elle est étagée. Si on majore la longueurs des intervalles $[y_i, y_{i+1}]$ par ϵ, alors par construction de f_σ, on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $|f(x) - f_\sigma(x)| < \epsilon$, alors que pour une fonction en escalier f_s associée à une subdivision s de l'espace de départ on ne sait pas majorer les $|f(x) - f_s(x)|$.

L'aire associée à la fonction étagée f_σ est égale à

$$\sum_{i=1}^{s} c_i.l(A_i)$$

($l(A_i) =$ longueur de A_i) et approche l'aire cherchée.

La première condition qui apparait est que les valeurs $\ell(A_i)$ soient définies, c'est-à-dire soient dans la tribu de Borel de $\mathbb{R}$. Cette condition correspond à la notion d'application mesurable relativement à la tribu de Borel de $\mathbb{R}$ et sera développée pour des espaces mesurés quelconques dans les paragraphes 2 et 3.

Une étude de la possibilité de passer à la limite en prenant des fonctions étagées de plus en plus proches de f conduit à la notion d'intégrabilité pour la mesure de Lebesgue.Le résultat remarquable montrant la supériorité de l'idée de Lebesgue sur ses prédécesseurs est que l'aire associée à une fonction f positive peut alors être définie (avec éventuellement la valeur $+\infty$) sous la seule condition que f soit mesurable positive (on verra que cette condition est plus faible que la continuité presque partout nécessaire pour l'intégrale au sens de Riemann).

Les paragraphes 4, 5, 6, définissent , dans le cadre d'espaces mesurés quelconques l'intégrale relativement à la mesure considérée, des fonctions d'abord étagées positives, puis mesurables positives, puis mesurables de signe quelconque.

2.2 Définition des applications mesurables :

Définition 2.2.1 (Appplication mesurable) *Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables et f une application de Ω dans Ω'. On dit que f est* **mesurable** *si :*

$$\forall A \in \mathcal{T}' \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$$

Remarque 2.1
1. *La notion de mesurabilité est relative aux tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$. Pour être plus précis on devrait dire," f est mesurable relativement aux tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ ". On dira simplement "mesurable" s'il n'y a pas de confusion possible sur les tribus.*
2. *On notera l'analogie voulue avec la notion de continuité d'une application entre deux espaces topologiques.*

Proposition 2.2.2 *Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ et $(\Omega_3, \mathcal{T}_3)$ trois espaces mesurables, f une application de Ω_1 dans Ω_2 et g une application de Ω_2 dans Ω_3 . Si f et g sont mesurables, alors $g \circ f$ est mesurable.*

Démonstration :
Pour $A \in \mathcal{T}_3$ on a : $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}[g^{-1}(A)]$
Si g est mesurable, $B = g^{-1}(A) \in \mathcal{T}_2$ et puisque f est mesurable $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1$

Proposition 2.2.3 *Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables avec $\mathcal{T}_2 = \sigma(\mathcal{C})$ et f une application de Ω_1 dans Ω_2 alors f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}_1$*

Démonstration : * Si f est mesurable alors pour tout A dans $\mathcal{C}$ on a $A \in \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{T}_2$ et $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$.

* On suppose que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}_1$ c'est à dire que pour tout $A \in \mathcal{C}, \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$. Or $\mathcal{T}_3 = \{Y \subset \Omega_2 \quad ; \quad f^{-1}(Y) \in \mathcal{T}_1\}$ est une tribu sur Ω_2 (cf exercice 4, question 2, chap I); on a donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}_3$ et $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}_3$. On en déduit que pour tout $B \in \sigma(\mathcal{C})$ on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1$ et f est mesurable.

Exercice 2.1 [Application immédiate].

Soit $\Omega_1 = \{-1, 0, 1, 2\}$, $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. On prend dans Ω_1, la tribu $\mathcal{T}_1$ engendrée par $\{1\}$, et dans Ω_2 la tribu $\mathcal{P}(\Omega_2)$. On considère l'application $f : x \mapsto x^2$ de Ω_1 dans Ω_2. Est-elle mesurable ? Pour quelles tribus de Ω_1 devient-elle mesurable ?

Définition 2.2.4 (Tribu produit) *Soient $(\Omega_i, \mathcal{T}_i)_{i=1,\ldots,n}$, n espaces mesurables. On note :*

$$\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i = \{x = (x_1, \ldots, x_n); x_i \in \Omega_i\}$$

On note , pour $i = 1, \ldots, n$, p_i la projection de Ω sur Ω_i et $\mathcal{C}_i = \{p_i^{-1}(A)/A \in \mathcal{T}_i\}$, la tribu de Ω, image réciproque par p_i de la tribu $\mathcal{T}_i$ enfin on pose $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i$.

La tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$ est appelée **tribu produit** *des tribus $\mathcal{T}_i$ et est notée*

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$$

.

Proposition 2.2.5 *1) La tribu produit $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$ est la plus petite tribu sur Ω rendant mesurables les projections p_i.*

2) La tribu produit $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$ est aussi la tribu engendrée par $\{\prod_{i=1}^{n} A_i; A_i \in \mathcal{T}_i \quad i = 1, \ldots, n\}$

Démonstration :

1) Pour tout A_i dans $\mathcal{T}_i$, $\quad p_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{C}_i \subset \mathcal{C} \subset \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$, donc chaque p_i est mesurable de $(\Omega, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i)$ dans $(\Omega_i, \mathcal{T}_i)$. $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$ est la plus petite tribu réalisant la mesurabilité des p_i : en effet si $\mathcal{T}'$ est une autre tribu de Ω vérifiant cela alors :

$$\forall A_i \in \mathcal{T}_i \quad p_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{T}' \text{ donc } \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i = \mathcal{C} \subset \mathcal{T}' \text{ et } \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}'$$

2) Soit $\mathcal{R} = \{\prod_{i=1}^{n} A_i \quad A_i \in \mathcal{T}_i\}$. Montrons que $\sigma(\mathcal{R}) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$.

$$\text{si } A \in \mathcal{R} \quad A = \prod_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(A_i) \in \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$$

$$\text{donc } \mathcal{R} \subset \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i \text{ et } \sigma(\mathcal{R}) \subset \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$$

$$\text{D'autre part } \forall A_i \in \mathcal{T}_i \quad p_i^{-1}(A_i) = A_i \times \prod_{j \neq i} \Omega_j \in \mathcal{R} \subset \sigma(\mathcal{R})$$

Donc pour chaque i , p_i est mesurable de $(\Omega, \sigma(\mathcal{R}))$ dans $(\Omega_i, \mathcal{T}_i)$ et comme $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$ est la plus petite tribu réalisant cela on a $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i \subset \sigma(\mathcal{R})$

Exercice 2.2 .

Soient $(E, \mathcal{T})$ et $(\Omega_i, \mathcal{T}_i)$ des espaces mesurables et g une application de E dans $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$. On note g_i les applications composantes de g

(si $x \in E, g(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$ avec $g_i(x) \in \Omega_i$).

Montrer que g est mesurable de $(E, \mathcal{T})$ dans $(\Omega, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i)$ si et seulement si chaque application composante g_i est mesurable de $(E, \mathcal{T})$ dans $(\Omega_i, \mathcal{T}_i)$.

2.3 Etude des applications numériques mesurables :

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. La notation $\mathcal{M}(\Omega)$ désigne l'ensemble des applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ ou $(\overline{\mathbf{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}))$. Nous obtenons les corollaires suivants de la proposition II-3 :

Corollaire 2.3.1 ((Caractérisation de $\mathcal{M}(\Omega)$)) .
Une application f de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\boldsymbol{R}, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}))$ ou dans $(\overline{\boldsymbol{R}}, \mathcal{B}(\overline{\boldsymbol{R}}))$ est mesurable si et seulement si :

$$\forall t \in \boldsymbol{R} \quad \{x \in \Omega \quad ; \quad f(x) < t\} \in \mathcal{T}$$

On obtient des conditions équivalentes en remplaçant dans la formule précédente le signe $<$ par $\leq$ ou par $>$ ou par $\geq$

Démonstration :
On a :

$$\{x \in \Omega; f(x) < t\} = \begin{cases} f^{-1}(]-\infty, t[& \text{si } f \text{ est à valeurs dans } \mathbf{R} \cup \{+\infty\} , \\ f^{-1}([-\infty, t[) & \text{si } f \text{ peut prendre la valeur } -\infty \end{cases}$$

On a vu que $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ est engendré par les $\{]-\infty, t[, t \in \mathbf{R}\}$; on peut aussi démontrer que $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$ est engendré par les $\{[-\infty, t[, t \in \mathbf{R}\}$ d'où le résultat . Un raisonnement analogue permet de conclure lorsque l'on change le signe $<$.

Ce critère sera constamment utilisé aussi bien pour les fonctions numériques à valeurs finies que pour celles à valeurs infinies.

Exercice 2.3 [Application immédiate et résultat utile].
Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $A \subset \Omega$.

Montrer que $\mathbb{1}_A$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ si et seulement si $A \in \mathcal{T}$. On rappelle que $\mathbb{1}_A$ est l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui vaut 1 sur A et 0 ailleurs.

Corollaire 2.3.2 *Toute application continue de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ est mesurable (relativement à la tribu de Borel)*

Démonstration :
En effet, f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert et $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ est engendré par les ouverts .

Proposition 2.3.3 *Si f et g sont des applications numériques mesurables sur $(\Omega, \mathcal{T})$, alors :*

$$f + g; \quad fg; \quad \lambda f \quad \lambda \in \boldsymbol{R}; \quad \sup(f, g); \quad \inf(f, g); \quad f^+ = \sup(f, 0); \quad f^- = -\inf(f, 0); \mid f \mid$$

sont des applications mesurables. Si f ne s'annule pas sur Ω , alors $\frac{1}{f}$ est mesurable

Démonstration :
1) si f est mesurable et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors λf est mesurable car :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \{x \in \Omega; \lambda f(x) < t\} = \begin{cases} \{x \in \Omega; f(x) < t/\lambda\} & \text{si } \lambda > 0 \\ \{x \in \Omega; f(x) > t/\lambda\} & \text{si } \lambda < 0 \\ \emptyset & \text{si } \lambda = 0 \text{ et } t \leq 0 \\ \Omega & \text{si } \lambda = 0 \text{ et } t > 0 \end{cases}$$

2) Soit a une application constante, alors $f + a$ est mesurable (trivial)

3) $\{x \in \Omega; f(x) > g(x)\} \in \mathcal{T}$. En effet, on a :

$$\{x \in \Omega; f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} (\{x \in \Omega; f(x) > r_k\} \bigcap \{x \in \Omega; g(x) < r_k\})$$

où r_k parcourt l'ensemble des rationnels numérotés dans un certain ordre.

4) $f + g$ est mesurable car pour $t \in \mathbf{R}$:

$$\{x \in \Omega; f(x) + g(x) < t\} = \{x \in \Omega; f(x) < t - g(x)\} \in \mathcal{T} \text{ d'après 1) 2) 3)}$$

5) f^2 est mesurable. En effet, considérons $c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $c(x) = x^2$. On a : $f^2 = c \circ f$. La mesurabilité résulte de la proposition II-2 et du corollaire III-2 appliqué à la fonction continue c.

6) fg est mesurable car $fg = 1/4[(f + g)^2 - (f - g)^2]$. La mesurabilité résulte de 1) , 5), et 4).

7) $\sup(f, g) = s$ est mesurable car, pour $t \in \mathbf{R}$:

$$\{x \in \Omega; s(x) < t\} = \{x \in \Omega; f(x) < t\} \bigcap \{x \in \Omega; g(x) < t\}$$

8) $\mid f \mid = f^+ + f^-$ donc $\mid f \mid$ est mesurable.

9) Supposons f non nul sur Ω et notons $1/f$ l'application de Ω dans $\mathbf{R}$ définie par $x \mapsto 1/f(x)$. Pour $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$A_t = \{x; 1/f(x) < t\} = \begin{cases} \{x; 0 > f(x) > 1/t\} & \text{si } t < 0 \\ \{x; f(x) < 0\} \bigcup \{x | f(x) > 1/t\} & \text{si } t > 0 \\ \{x; f(x) < 0\} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Donc $A_t \in \mathcal{T}$ et $1/f$ est mesurable .

Exemples :

1. Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+2}) \sin x + x^3}{x - 1}$$

   Cette fonction est définie sur $\Omega = [-2, 1[\bigcup]1, +\infty[$
   Prenons pour tribu sur Ω la tribu $\mathcal{T}$, induite par la tribu de Borel de $\mathbf{R}$.
   $(\mathcal{T} = \{A; A = \Omega \cap B, B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})\})$
   f est obtenue à partir de sommes , produits, quotients de fonctions continues sur Ω ; elle est donc mesurable sur Ω.

2. Soit A un élément de la tribu de Borel de $\mathbf{R}$, $\mathcal{T}$ la tribu de A induite par $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ et f une application mesurable de $(A, \mathcal{T})$ dans $\mathbf{R}$. On définit l'application g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \text{ ,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Alors g est mesurable, car :

$$A_t = \{x; g(x) < t\} = \begin{cases} \{x \in A; f(x) < t\} \cup A^C & \text{si } t > 0 \\ \{x \in A; f(x) < t\} & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

   On peut par ce procédé définir une fonction mesurable sur $\mathbf{R}$ par raccordement de fonctions définies (et mesurables) sur des boréliens formant une partition de $\mathbf{R}$.

3. **Conséquence :** les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, fabriquées par raccordement de fonctions, définies sur des boréliens, par des "formules" faisant intervenir des sommes , produit, quotients de fonctions continues sont donc toutes mesurables.

   Pour exhiber une application non mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on a besoin d'exhiber une partie non borélienne de $\mathbb{R}$ et on a vu (complément 2 du chapitre I) qu'une telle partie ne peut être définie que de manière non explicite, à partir de l'axiome du choix.

Proposition 2.3.4 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors :*

$$\sup_n f_n \quad \inf_n f_n \quad \overline{\lim} f_n \quad \liminf f_n$$

sont mesurables et si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, alors f est mesurable.

Démonstration : Remarquons que même si les applications f_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, les applications $\sup_n f_n$ ect., sont en général à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1. si $s = \sup_n f_n$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in \Omega; s(x) < t\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \Omega; f_n(x) < t\}$$

   d'où le premier résultat.

2. $\inf_n f_n = -\sup_n(-f_n)$
3. Par définition

$$\overline{\lim} f_n = \lim_{p\to+\infty} (\sup_{n\geq p} f_n) = \inf_{p\in\mathbb{N}} (\sup_{n\geq p} f_n)$$

$$\liminf f_n = \lim_{p\to+\infty} (\inf_{n\geq p} f_n) = \sup_{p\in\mathbb{N}} (\inf_{n\geq p} f_n)$$

   On est donc ramené aux résultats précedents.

4. si la suite f_n converge simplement vers f, alors :

$$f = \lim f_n = \overline{\lim} f_n = \liminf f_n$$

   d'où le résultat.

Exercice 2.4 .

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'intervalles de $\mathbb{R}$, deux à deux disjoints et de réunion $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application monotone sur chaque A_i.

Montrer que f est mesurable.

2.4 Application étagée

Définition 2.4.1 *Une* **application étagée** *est une application numérique f d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ où les A_i sont des éléments de la tribu $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints et (a_i) une suite finie de réels.*

Bien entendu une telle fonction est mesurable (de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$). Remarquons aussi que la representation $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1\!\!1_{A_i}$, n'est pas unique. (si $A_i \cap A_j = \emptyset$, alors $1\!\!1_{A_i \cup A_j} = 1\!\!1_{A_i} + 1\!\!1_{A_j}$).

Remarque 2.2 *Si $(\Omega, \mathcal{T}) = (\boldsymbol{R}, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}))$, et si les A_i sont des intervalles bornés de $\boldsymbol{R}$, on retrouve la notion (plus faible) de fonction en escalier.*

Proposition 2.4.2 *f est étagée si et seulement si f est mesurable et $f(\Omega)$ est un ensemble fini.Si f et g sont des applications étagées de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $\mathbf{R}$ et λ un réel, alors $f+g$, fg , λf, $\sup(f,g)$, $\inf(f,g)$ sont des applications étagées.*

Démonstration :

1) si f est étagée avec $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1\!\!1_{A_i}$, les A_i étant disjoints, alors f ne peut prendre que les valeurs $a_1, \ldots, a_n$ et 0 si les A_i ne recouvrent pas Ω, et f est mesurable comme somme finie d'applications mesurables. Réciproquement si f est mesurable et si $f(\Omega)$ est un ensemble fini dont les éléments distincts sont $a_1, \ldots, a_n$ les parties $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ sont dans la tribu $\mathcal{T}$ et sont deux à deux disjointes et l'on a $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1\!\!1_{A_i}$

2) les fonctions $f+g$ ...etc ... sont mesurables d'après la proposition III-3 et ne prennent qu'un nombre fini de valeurs , elles sont donc étagées d'après ce qui précède. En particulier si on considère n réels a_i et n éléments A_i de $\mathcal{T}$ pas nécessairement disjoints alors $\sum_{i=1}^{n} a_i 1\!\!1_{A_i}$ est une fonction étagée.

Exercice 2.5 [Application immédiate].

Représenter graphiquement les fonctions étagées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f_1 = 1\!\!1_{[1,2]} + 2 1\!\!1_{[2,3]} \quad ; \quad f_2 = -3 1\!\!1_{[1,3]} + 2 1\!\!1_{]0,1[}$$
$$f_3 = -3 1\!\!1_{[1,3]} + 2 1\!\!1_{]0,1]} \quad ; \quad f_4 = 2 1\!\!1_{[-2,-1]} - 1\!\!1_{[1,+\infty[}$$

Proposition 2.4.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable . Toute application numérique mesurable positive de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\overline{\boldsymbol{R}}, \mathcal{B}(\overline{\boldsymbol{R}}))$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées à valeurs finies positives*

Démonstration :

On subdivise l'intervalle $[0, n]$ de l'espace image $\mathbf{R}$ en $n.2^n$ intervalles de longueur $1/2^n$

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \{1, 2, \ldots, n2^n\}$ on note $A_{n,k} = \{x \in \Omega; \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\}$. f étant mesurable, chaque $A_{n,k}$ est dans $\mathcal{T}$. On définit alors pour tout n , une fonction $f_n : \Omega \to \mathbf{R}^+$ proche de f sur l'intervalle $[0, n]$ en posant :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \text{s'il existe } k \text{ tel que } x \in A_{n,k} \text{ ,} \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

f_n est, pour chaque n, une fonction étagée positive, et une vérification technique permet de montrer que la suite (f_n) ainsi obtenue vérifie les conditions :

$$\forall x \in \Omega \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

L'hypothèse f positive permet alors de montrer que :

$$\forall x \in \Omega \quad f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

En effet pour x fixé dans Ω

-Si $f(x)$ est fini, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > f(x)$ on a :

$$\forall n > n_0 \quad 0 \leq f(x) < n \text{ donc } |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n}$$

Donc $\lim f_n(x) = f(x)$.

-Si $f(x) = +\infty$, on a $f_n(x) = n$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$

Remarquons qu'une fonction numérique, limite d'une suite croissante de fonctions étagées est nécessairement bornée inférieurement ; la proposition ne peut donc s'étendre à toutes les applications numériques mesurables. Pour la suite nous désignerons par $\mathcal{M}^+(\Omega)$ l'ensemble des applications mesurables positives de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

Dans tout les paragraphes qui suivent, les applications considérées sont des applications numériques c'est à dire à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Résultats fondamentaux à retenir de ce chapitre :

* Les définitions correspondant aux intitulés des paragraphes II-III.
* Propriétés des applications numériques mesurables.

Chapitre 3

Intégrale Associée à une Mesure

3.1 Définition de l'intégrale des fonctions étagées positives :

Définition 3.1.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction étagée positive de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\boldsymbol{R}, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}))$, c'est à dire un élément de $\mathcal{M}^+(\Omega)$ de la forme :*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} \text{ où } A_i \in \mathcal{T} \text{ deux à deux disjoints et } a_i \in \boldsymbol{R}^+$$

Pour une telle fonction, on définit :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

$\int_{\Omega} f d\mu$ est dite **intégrale de f sur Ω par rapport à la mesure μ** *ou plus simplement intégrale de f s'il n'y a pas de confusion possible.*

Convention : si $a_i = 0$ et $\mu(A_i) = +\infty$ on pose $a_i \mu(A_i) = 0$

La somme introduite dans la définition a toujours un sens dans $\overline{\mathbf{R}}^+$ puisque chaque terme est positif ou égal à $+\infty$

Exemple : soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $\forall x, f(x) = 1$. On a $f = \mathbb{1}_{\mathbf{R}}$, application mesurable positive. Pour $\mu = \lambda$, mesure de Lebesgue, on a :

$$\int_{\mathbf{R}} f d\lambda = \lambda(\mathbf{R}) = +\infty$$

Pour $\mu = \delta_0$, mesure de Dirac en 0, on a

$$\int_{\mathbf{R}} f d\delta_0 = \delta_0(\mathbf{R}) = 1$$

Cohérence de la définition :

Comme la représentation d'une fonction étagée n'est pas unique, il est nécessaire, afin d'avoir une définition intrinsèque, de vérifier que la définition d'une telle intégrale ne dépend pas de la représentation choisie.

Si l'on suppose :

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{p} b_j \mathbb{1}_{B_j}$$

avec les A_i (resp. les B_j) éléments de $\mathcal{T}$ et deux à deux disjoints. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i\mu(A_i\cap B_j) \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{p} b_j\mu(B_j) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} b_j\mu(A_i\cap B_j) \tag{3.2}$$

Si $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ on a : $a_i = b_j = c_{i,j}$, et si $A_i \cap B_j = \emptyset$ on pose : $c_{i,j} = 0$. On constate donc, en utilisant la commutativité des sommes l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i) = \sum_{i,j} c_{i,j}\mu(A_i\cap B_j) = \sum_{j=1}^{p} b_j\mu(B_j)$$

Propriétés de l'intégrale d'une fonction étagée positive

* Il est très aisé de vérifier que si f et g sont étagées positives et α et β des réels positifs, on a :

$$\int_\Omega(\alpha f+\beta g)d\mu = \alpha\int_\Omega fd\mu + \beta\int_\Omega gd\mu$$

* Il est clair aussi que l'intégrale préserve l'ordre, c'est à dire que si f et g sont étagées, positives et telles que $f \leq g$ (au sens $\forall x\in\Omega, f(x), \leq g(x)$), alors :

$$\int_\Omega fd\mu \leq \int_\Omega gd\mu$$

Exercice 3.1 [Application immédiate].

On considère sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ les mesures suivantes :

$$\mu_1 = \lambda \quad ; \quad \mu_2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k$$

$$\mu_3 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k\delta_k \quad ; \quad \mu_4 = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2}\frac{2^k}{k!}\delta_k$$

Etudier l'intégrabilité pour chacune des mesures μ_i des fonctions définies dans l'exercice précédent.

3.2 Intégrale des fonctions mesurables positives

Définition 3.2.1 *Soit $(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ une application mesurable. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissantes de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f. On définit alors :*

$$\int_\Omega fd\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_nd\mu$$

Cohérence de la définition :

L'existence de la suite f_n est assuré par la proposition III-7 du chapitre 2. La suite $(\int_\Omega f_nd\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}^+$. De ce fait elle a nécessairement une limite dans $\overline{\mathbb{R}}^+$. Afin que cette définition soit cohérente, on doit vérifier que l'intégrale est indépendante de la suite croissante de fonctions étagées convergeant vers f.

La démonstration se fait en deux temps.

premier temps : Soit g une fonction étagée positive telle que $g \leq f$.

$$g = \sum_{i=1}^{s} c_i 1\!\!1_{B_i}, \quad c_i \geq 0, \quad B_i \text{ deux à deux disjoints et dans } \mathcal{T}$$

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant simplement vers f.

Montrons que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int f_n d\mu \geq \int g d\mu$

Pour $\epsilon > 0$ fixé, on considère les ensembles $A_n(\epsilon)$ définis par :

$$A_n(\epsilon) = \{x; g(x) \leq f_n(x) + \epsilon\}$$

Propriétés des ensembles $A_n(\epsilon) = \{x; g(x) \leq f_n(x) + \epsilon\}$.

* La suite (f_n) est croissante donc $A_n(\epsilon) \subset A_{n+1}(\epsilon)$

* $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n(\epsilon)$. (écrire que f est limite de la suite (f_n) et que $g \leq f$).

* On en déduit que pour tout B de $\mathcal{T}$ on a : $\mu(B) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mu(B \bigcap A_n(\epsilon)$

Pour poursuivre, distinguons deux cas.

Cas 1 : $\int_\Omega g d\mu = \sum\limits_{i=1}^{s} c_i \mu(B_i) = +\infty$

Il existe alors i tel que $c_i > 0$ et $\mu(B_i) = +\infty$. Posons pour la suite $B = B_i$, $A_n(\epsilon) = A_n$ et $c = c_i$ et utilisons la comparaison de f_n et $g - \epsilon$ sur l'ensemble $B \bigcap A_n$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_n d\mu &\geq \int_\Omega f_n 1\!\!1_{B \cap A_n} d\mu && (3.3)\\
&\geq \int_\Omega (g - \epsilon) 1\!\!1_{B \cap A_n} d\mu && (3.4)\\
&= \int_\Omega (c - \epsilon) 1\!\!1_{B \cap A_n} d\mu && (3.5)\\
&= (c - \epsilon)\mu(B \cap A_n) && (3.6)
\end{aligned}$$

On prend la limite (suites croissantes)

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n d\mu \geq (c - \epsilon) \lim_n (\mu(B \cap A_n)) = (c - \epsilon)\mu(B) = +\infty$$

Cas 2 : $\int g d\mu$ fini. On peut donc supposer que $\int g d\mu = \sum\limits_{i=1}^{s} c_i \mu(B_i)$ avec les c_i non nuls et les $\mu(B_i)$ finis (avec les B_i disjoints). On pose :

$$B = \bigcup_{i=1}^{s} B_i = \{x \in \Omega; g(x) \neq 0\}$$

Comparons f_n et $g - \epsilon$ sur $B \cap A_n$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_n d\mu &\geq \int_\Omega f_n 1\!\!1_{B \cap A_n} d\mu && (3.7)\\
&\geq \int_\Omega (g - \epsilon) 1\!\!1_{B \cap A_n} d\mu && (3.8)\\
&= \sum_{i=1}^{s} (c_i - \epsilon)\mu(B_i \cap A_n) && (3.9)\\
&= (\sum_{i=1}^{s} c_i \mu(B_i \cap A_n)) - \epsilon\mu(B \cap A_n) && (3.10)
\end{aligned}$$

On a $\lim_{n\to\infty}\mu(B_i\cap A_n)=\mu(B_i)$ et $\lim_{n\to\infty}\mu(B\cap A_n)=\mu(B)$. Donc :

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu \geq \int_\Omega g d\mu - \epsilon\mu(B)$$

Ceci étant vrai quelque soit ϵ on a, dans le deuxième cas comme dans le premier :

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu \geq \int_\Omega g d\mu$$

Deuxième temps : On considère maintenant deux suites de fonctions étagées qui convergent simplement vers f.

$$0\leq f_1\leq f_2\leq \ldots f_n\leq f_{n+1}\leq \ldots \to f$$

$$0\leq g_1\leq g_2\leq \ldots g_n\leq g_{n+1}\leq \ldots \to f$$

Alors pour chaque $p\in \mathbf{N}^*$, on a : $f=\lim_n f_n \geq g_p$

D'après i) on a alors :

$$\forall p, \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu \geq \int_\Omega g_p d\mu$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu \geq \lim_{p\to\infty}\int_\Omega g_p d\mu$$

Par un raisonnement symétrique, on obtient l'inégalité contraire et donc :

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu = \lim_{p\to\infty}\int_\Omega g_p d\mu$$

La définition de l'intégrale d'une fonction numérique mesurable positive étant ainsi posée, il est clair que l'on a :

Proposition 3.2.2 *Soient f et g deux fonctions mesurables positives et α et β des réels positifs, alors on a (propriété de linéarité et de monotonie de l'intégrale) :*

$$\int_\Omega (\alpha f+\beta g)d\mu = \alpha\int_\Omega f d\mu + \beta\int_\Omega g d\mu$$

$$\textit{si } 0\leq f\leq g \qquad \int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$$

En effet si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (resp. $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$) est une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant simplement vers f (resp. vers g), alors $(\alpha f_n+\beta g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant vers $\alpha f+\beta g$, et pour tout n on a (propriétés des fonctions étagées) :

$$\int_\Omega (\alpha f_n+\beta g_n)d\mu = \alpha\int_\Omega f_n d\mu + \beta\int_\Omega g_n d\mu$$

Le passage à la limite dans cette égalité donne le résultat.

Si (f_n) est une suite croissante de fonctions étagées convergeant vers f, on a : $f_n\leq g$ et on a vu dans la démonstration précédente que l'on a alors $\int f_n d\mu \leq \int g d\mu$. En passant à la limite on a l'inégalité cherchée.

Définition 3.2.3 *Soit $f\in\mathcal{M}^+(\Omega)$. f est* **intégrable (par rapport à la mesure μ)** *si et seulement si l'intégrale $\int_\Omega f d\mu$ est finie.*

Attention : bien distinguer le fait que l'intégrale existe (toujours vrai dans $\overline{\mathbf{R}}^+$, pour une fonction mesurable positive) avec le fait que cette intégrale soit finie c'est à dire f intégrable.

Exemples :

1) Pour la mesure de Lebesgue λ : L'application $f = \mathbb{1}_{\mathbf{R}}$ n'est pas λ-intégrable car :

$$\int_{\mathbf{R}} f d\lambda = \lambda(\mathbf{R}) = +\infty$$

Pour la mesure de Dirac en 0, δ_0, f est δ_0-intégrable car :

$$\int_{\mathbf{R}} f d\delta_0 = \delta_0(\mathbf{R}) = 1$$

L'application $\mathbb{1}_{[0,1]}$ est λ-intégrable car :

$$\int_{\mathbf{R}} \mathbb{1}_{[0,1]} d\lambda = \lambda([0,1]) = 1$$

2) Soit $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mu)$ espace mesuré avec la mesure de dénombrement μ :

$$\text{si } A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \quad \mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card} A & \text{si } A \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $f \in \mathcal{M}^+(\mathbf{N})$, $(f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^+)$ on a :

$$\int_{\mathbf{N}} f d\mu = \sum_{n \in \mathbf{N}} f(n)$$

En effet, posons pour $n \in \mathbf{N}$, $f_n = \sum_{i=0}^{n} f(i) \mathbb{1}_{\{i\}}$. Pour chaque n , f_n est une fonction étagée positive, la suite (f_n) est croissante (car f est positive) et f est limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ainsi formée. Donc :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{N}} f d\mu &= \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbf{N}} f_n d\mu = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} f(i) \mu(\{i\}) && (3.11) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i \in \mathbf{N}} f(i) && (3.12) \end{aligned}$$

La fonction $f \in \mathcal{M}^+(\mathbf{N})$ est alors intégrable si et seulement si la série à termes positifs $\sum f(i)$ est convergente. La notion de série numérique à termes positifs apparait comme un cas particulier d'intégration.

3) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \delta_a)$ un espace mesuré avec la mesure de Dirac δ_a au point a de Ω.

$$\forall A \in \mathcal{T} \quad \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons en revenant à la définition, que :

$$\forall f \in \mathcal{M}^+(\Omega) \quad \int_{\Omega} f d\delta_a = f(a)$$

En effet, si $f = b \mathbb{1}_B, b \geq 0, B \in \mathcal{T}$:

$$\int_{\Omega} f d\delta_a = b\delta_a(B) = f(a) = \begin{cases} b & \text{si } a \in B, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si f est étagée positive on vérifie que l'on a encore $\int_\Omega f d\delta_a = f(a)$.

Soit $f \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions étagées positives convergeant simplement vers la fonction f. Pour tout n on a :

$$\int_\Omega f_n d\delta_a = f_n(a)$$

Donc :

$$\int_\Omega f d\delta_a = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\delta_a = \lim_{n\to+\infty} f_n(a) = f(a)$$

On disposera après l'étude des propriétés de l'intégrale (proposition 2-7-2 de ce chapitre et théorème 3-1-2 du chapitre 3 d'une manière plus rapide d'obtenir ce résultat et plus généralement l'intégrale pour une mesure discrète d'une fonction positive.

4) Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons à partir de la définition, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ (pour la mesure de Lebesgue). Partageons l'intervalle $[0,1[$ en 2^n intervalles égaux $[x_i, x_{i+1}[$ avec $x_i = i/2^n$ et $0 \le i \le 2^n - 1$. Soit f_n la fonction étagée :

$$f_n = \sum_{i=0}^{2n} f(x_i) 1\!\!1_{[x_i, x_{i+1}[}$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante convergeant vers f et on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \sum_{i=0}^{2^n-1} (\frac{i}{2^n})^2 \frac{1}{2^n} \tag{3.13}$$

$$= \frac{1}{2^{3n}} \frac{(2^n-1)2^n(2^{n+1}+1)}{6} \tag{3.14}$$

(on a utilisé la formule : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$)

On en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \frac{2}{6}$$

Nous verrons bien sûr plus loin une méthode plus performante pour retrouver ce résultat et préciser que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$ (notations usuelles et calcul de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction continue à l'aide d'une primitive).

3.3 Intégrale des fonctions numériques mesurables de signe quelconque.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable.

D'après la proposition III-3 du chapitre II, les applications $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = -\inf(f,0)$ sont mesurables et positives et l'on a : $f = f^+ - f^-$.

Définition 3.3.1 .

f **est intégrable** *(par rapport à la mesure μ) si et seulement si f^+ et f^- sont intégrables . L'intégrale de f est par définition le nombre (fini) :*

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu$$

*On note $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega)$ l'ensemble des applications intégrables de Ω dans **R** pour la mesure μ (ou $\mathcal{L}^1(\Omega)$ s'il n'y a pas ambiguité sur la mesure utilisée).*

Exemple : considérons une fonction étagée $f = \sum_{i=1}^n a_i 1\!\!1_{A_i}$ avec les a_i non nuls et de signe variable et les A_i disjoints. Elle est intégrable si et seulement si les $\mu(A_i)$ sont tous finis.

Remarques : Il faut bien noter que :

* pour une fonction mesurable positive, l'intégrale est toujours définie et est un élément de $\overline{\mathbf{R}}^+$.

* pour une fonction mesurable quelconque, l'intégrale n'est définie que si f est intégrable, c'est à dire si $\int_\Omega f^+ d\mu$ et $\int_\Omega f^- d\mu$ sont finis.

3.4 Intégrale d'une fonction sur un sous-ensemble.

Définition 3.4.1 .

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré , $A \in \mathcal{T}$ et $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ une application mesurable. On pose :

$$\int_A f d\mu = \int_\Omega f 1\!\!1_A d\mu$$

lorsque ceci a un sens, c'est à dire lorsque $f 1\!\!1_A$ est mesurable positive (et $\int_A f d\mu \in \overline{\mathbf{R}}^+$) ou bien lorsque $f 1\!\!1_A$ est intégrable (et alors $\int_A f d\mu \in \mathbf{R}$).

On dit que f **est intégrable sur** *A si $f 1\!\!1_A$ est intégrable.*

Remarque : Soit $\mathcal{T}_A$ la tribu de A induite par la tribu $\mathcal{T}$ de Ω, $(\mathcal{T}_A = \{B \cap A ; B \in \mathcal{T}\})$ et μ_A la mesure sur $(A, \mathcal{T}_A)$ induite par μ $(\forall B \in \mathcal{T}_A, \mu_A(B) = \mu(B))$ et f_A l'application restriction de f à A. Il est alors facile de vérifier que $\int_A f_A d\mu_A = \int_A f d\mu$

Ainsi, pour une application mesurable f de **R** dans **R**, il revient au même d'étudier l'appartenance de f à $\mathcal{L}^1_\lambda([01])$ ou la λ-intégrabilité de f sur $[01]$.

Proposition 3.4.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et A un élément de $\mathcal{T}$ de mesure nulle. Soit $f : \Omega \to$ **R** une application mesurable. Alors f est intégrable sur A et :*

$$\int_A f d\mu = 0$$

Démonstration en exercice (ex 11).

Exercice 3.2 .

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et A un élément de $\mathcal{T}$ de mesure nulle. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application mesurable.

Montrer que f est intégrable sur A et :

$$\int_A f d\mu = 0$$

Résultats fondamentaux à retenir de ce chapitre :

* Les définitions correspondant aux intitulés des paragraphes.

Il faut attendre le chapitre suivant pour pouvoir manipuler vraiment la notion d'intégrale qui est juste introduite ici.

Bien voir que la notion d'intégrale est relative à la mesure considérée. On verra au chapitre suivant que la notion bien connue d'intégrale de Riemann $\int_a^b f(x)dx$, correspond à l'intégrale $\int_{[a,b]} f d\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue, mais pour une mesure μ autre que λ, le symbole $\int_\Omega f d\mu$ correspond à une notion nouvelle qu'il faudra s'habituer à manipuler.

Idée à retenir : La progression conduisant à la construction de l'intégrale, sera utilisée souvent dans les démonstrations. Pour démontrer qu'une propriété concernant l'intégrale d'une fonction f est vraie, on la montre pour les fonctions étagées positives, puis, par un passage à la limite, à justifier soigneusement, pour les fonctions mesurables positives, puis pour les fonctions intégrables quelconques.

Chapitre 4

Propriétés de l'intégrale, théorèmes de convergence

Contenu du chapitre :

I - Propriétés de l'intégrale.
II- Théorèmes de convergence.
III- Applications des théorèmes de convergence ; (intégrales semi-convergentes. Intégrales dépendant d'un paramètre).
IV-Rappels de premier cycle. (convergence des intégrales de Riemann généralisées. Séries numériques.

Chapitre 5

Espace produit. Théorème de Fubini

Contenu du chapitre :

Chapitre 6

Espaces L^p

Contenu du chapitre 5

I - Inégalités de Hölder et Minkowski.
II- Espaces L^p.
III-Dualité dans les espaces L^p.
IV-Quelques résultats de densité.