Correction devoir surveillé n° 1

Exercice 1

1. On a $\dfrac{1}{(s+3)(s^2+9)} = \dfrac{a}{s+3} + \dfrac{bs+c}{s^2+9}$. On multiplie par $s+3$ et on fait $s=-3$: $a = \frac{1}{18}$;

$$\frac{1}{(s+3)(s^2+9)} = \frac{\frac{1}{18}}{s+3} + \frac{bs+c}{s^2+9} = \frac{(b+\frac{1}{18})s^2 + (3b+c)s + (\frac{1}{2}+3c)}{(s+3)(s^2+9)} = \frac{\frac{1}{18}}{s+3} + \frac{-\frac{1}{18}s + \frac{1}{6}}{s^2+9} \ ,$$

car $b + \frac{1}{18} = 0$ et $\frac{1}{2} + 3c = 1$.

2. La transformée de Laplace de l'équation est : $s^2Y + 2sY - 3Y = \dfrac{s}{s^2+9} - \dfrac{1}{3}\dfrac{3}{s^2+9}$, d'où

$$(s^2+2s-3)Y = (s-1)(s+3)Y = \frac{s-1}{s^2+9}\ , \text{ puis } \quad Y = \frac{1}{(s+3)(s^2+9)}\ ;$$

en utilisant le résultat de 1., on obtient $Y = \dfrac{1}{18}\dfrac{1}{s+3} - \dfrac{1}{18}\dfrac{s}{s^2+9} + \dfrac{1}{18}\dfrac{3}{s^2+9}$, si bien que

$$y(x) = \frac{1}{18}\mathrm{e}^{-3x} - \frac{1}{18}\cos(3x) + \frac{1}{18}\sin(3x)\ .$$

Vérification : $y(0) = \frac{1}{18} - \frac{1}{18} = 0$; $y'(0) = \frac{-3}{18} + \frac{3}{18} = 0$.

Exercice 2

1.
$$-s^3 - 3s^2 + 4 = (s+2)(as^2+bs+c) = as^3 + (2a+b)s^2 + (2b+c)s + 2c$$

donc $a=-1$, $2a+b=-3$, $(2b+c)=0$ et $2c=4$, si bien que

$$-s^3 - 3s^2 + 4 = (s+2)(-s^2-s+2)\ .$$

2. La transformée de Laplace du système est :

$$\begin{cases} sY - 1 + 2(sZ+1) = \frac{4}{s^2} \\ Y - (sZ+1) = \frac{2}{s} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} s(\frac{2}{s} + sZ + 1) + 2sZ + 1 = \frac{4}{s^2} \\ Y = \frac{2}{s} + sZ + 1 \end{cases}$$

puis

$$(s^2+2s)Z = s(s+2)Z = \frac{4}{s^2} - 3 - s = \frac{-s^3-3s^2+4}{s^2} = \frac{(s+2)(-s^2-s+2)}{s^2}\ ,$$

donc

$$Z = \frac{-s^2-s+2}{s^3} = \frac{-s^2}{s^3} - \frac{s}{s^3} + \frac{2}{s^3} = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3}\ .$$

On en déduit $Y = \dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{s^2}$, puis $y(x) = 1 + 2x$ et $z(x) = -1 - x + x^2$, qui **vérifient bien les conditions initiales**.

Exercice 3

1. $s^2+2s-8=(s-2)(s+4)$ et

$$\frac{2s-1}{s^2+2s-8}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{s-2}+\frac{3}{2}\,\frac{1}{s+4}\quad,\qquad \frac{s+13}{s^2+2s-8}=\frac{5}{2}\,\frac{1}{s-2}-\frac{3}{2}\,\frac{1}{s+4}\quad.$$

2. La transformée de Laplace du système est : $\begin{cases} sY-1=Y+5Z \\ sZ-2=Y-3Z \end{cases}$

   En ajoutant les deux lignes, on trouve $Y+Z=\dfrac{3}{s-2}$, d'où $Z=\dfrac{3}{s-2}-Y$; en reportant dans la première équation, on obtient

$$Y=\frac{s+13}{s^2+2s-8}\ ,\ \text{puis}\quad Z=\frac{2s-1}{s^2+2s-8}\ ;$$

   on conclut à l'aide de 1. que

$$y(x)=\frac{5}{2}\mathrm{e}^{2x}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-4x}\quad,\quad z(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-4x}\quad,$$

   qui vérifient bien les conditions initiales.

Exercice 4

1. $\mathcal{L}(x\mathrm{e}^{-x})=-\mathcal{L}(\mathrm{e}^{-x})'=-\left(\dfrac{1}{s+1}\right)'=-\left(-\dfrac{1}{(s+1)^2}\right)=\dfrac{1}{(s+1)^2}$;

   $\mathcal{L}(x^2\mathrm{e}^{-x})=-\mathcal{L}(x\mathrm{e}^{-x})'=-\left(\dfrac{1}{(s+1)^2}\right)'=-\left(-2\dfrac{1}{(s+1)^3}\right)=\dfrac{2}{(s+1)^3}$.

2. La transformée de Laplace de l'équation différentielle est :

$$sY+Y=4\frac{1}{(s+1)^2}\ ,\quad \text{donc}\quad Y=4\frac{1}{(s+1)^3}=2\frac{2}{(s+1)^3}\ ,\quad \text{donc}\quad y(x)=2x^2\mathrm{e}^{-x}\quad.$$

Exercice 5

La transformée de Laplace du système est :

$$\begin{cases} 2sY_1+2-sY_3=-\dfrac{1}{s} \\ sY_1+1+sY_2+sY_3=\dfrac{6}{s^2}+\dfrac{4}{s} \\ 3Y_1+sY_2-\dfrac{3}{2}Y_3=-\dfrac{3}{2s^2} \end{cases}\quad \text{donc}\quad \begin{cases} sY_1=-\dfrac{1}{2s}-1+\dfrac{s}{2}Y_3 \\ sY_2+\dfrac{3}{2}sY_3=\dfrac{6}{s^2}+\dfrac{9}{2s} \\ sY_2=\dfrac{3}{s} \end{cases}$$

en substituant l'expression de Y_1 obtenue en première ligne dans les deux autres. On en déduit :

$$\begin{cases} Y_2=\dfrac{3}{s^2} \\ Y_3=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{4}{s^3} \\ Y_1=-\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{s^3} \end{cases}\quad \text{d'où}\quad \begin{cases} y_1(x)=-1+x^2 \\ y_2(x)=3x \\ y_3(x)=x+2x^2 \end{cases}$$

qui **vérifient bien les conditions initiales**.