Formation Générale Scientifique Pluridisciplinaire 1
S. Vinatier Mathématiques

TD 8 : nombres complexes

Exercice 1 (Calculs)
On donne : $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -3 - \dfrac{i}{2}$, $z_3 = \sqrt{7} + i$, $z_4 = 4i$. Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

$$z_1 + z_2\ ,\quad z_1 - z_2\ ,\quad z_1 + z_3\ ,\quad z_1 + z_4\ ,\quad z_1^2\ ,\quad z_1z_2\ ,\quad z_1z_3\ ,\quad z_1z_4\ ,\quad z_3\overline{z}_3\ ,\quad 1/z_4\ ,\quad z_1/z_4\ .$$

Exercice 2 (Conjugué)
Soit $z = 3 + 2i$. On rappelle que $\overline{z} = 3 - 2i$.

(a) Montrer que $z\overline{z} = 13$, en déduire que : $\dfrac{1}{3+2i} = \dfrac{3-2i}{13}$. Quelle est la forme algébrique de $1/z$?

(b) En déduire la forme algébrique des nombres suivants : $\dfrac{1-i}{3+2i}$, $\dfrac{3-2i}{3+2i}$, $\dfrac{-5-i\sqrt{13}}{3+2i}$.

(c) A l'aide du même principe, mettre $\dfrac{2-i}{1-i}$ sous forme algébrique.

Exercice 3
Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

$$i^4\ ,\quad \frac{1+2i}{2+i}\ ,\quad (2+3i)^3\ ,\quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}\ ,\quad \frac{1+i}{1-i}\ ,\quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{32}\ .$$

Exercice 4 (Inverse)
Soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $z = 0$ si et seulement si $a^2 + b^2 = 0$.

(b) Soit $z' = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, calculer le produit zz' et le mettre sous forme algébrique.

(c) En déduire que $zz' = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{cases}$

(d) On suppose $z \neq 0$. Montrer que l'inverse de z est : $\dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

(e) En déduire que $1/i = -i$.

Exercice 5 (Equations du deuxième degré)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^2 - 3z + 4 = 0\ ,\quad z^2 - (\sqrt{3}-1)z - \sqrt{3} = 0\ ,\quad z + \frac{1}{z} = 1\ ,\quad z + \frac{1}{z} = -\sqrt{3}\ .$$

Exercice 6 (« Racines carrées »)

(a) Trouver les deux solutions complexes de l'équation (d'inconnue z) $z^2 = -2i$.

(b) Faire de même pour l'équation $z^2 = 4 - 3i$.

Exercice 7 (Le plan complexe)

(a) Placer dans un repère orthonormé les points A, B et C d'affixes respectives $3+i$, $\dfrac{4-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $2 - i\sqrt{2}$.

(b) Montrer que ces trois points se trouvent sur un cercle de centre le point M d'affixe 2 dont on précisera le rayon.

Exercice 8 (Forme trigonométrique)

Trouver le module et un argument des nombres suivants :

$$1 + i\sqrt{3}\ , \quad -\sqrt{6} + i\sqrt{2}\ , \quad (1-i)(\sqrt{3}-i)\big(\cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5)\big)\ , \quad \Big(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\Big)^4\ .$$

Exercice 9 (Equation du deuxième degré)

(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6\cos(\pi/6)z + 9 = 0$. On note z_1 et z_2 les solutions.

(b) Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$. Que peut-on dire de z_1 et z_2 ?

(c) Donner les modules et des arguments de z_1 et z_2.

Exercice 10

(a) Mettre $\sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique.

(b) En déduire une forme trigonométrique de $(\sqrt{3}+i)^2$ et $(\sqrt{3}+i)^3$. Que peut-on dire de ce dernier ?

(c) Calculer $(\sqrt{3}+i)^2 + (\sqrt{3}-i)^2$ et $(\sqrt{3}+i)^3 - (\sqrt{3}-i)^3$.

Exercice 11

Soit θ un nombre réel, on pose $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$.

(a) Calculer $|z|$ (on rappelle la formule : $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$).

(b) Tracer dans un repère orthonormé l'image A de $\cos\theta + i\sin\theta$ et l'image B de z. On note C le point d'affixe 1, que peut-on dire du quadrilatère $OABC$? En déduire un argument de z.

Exercice 12

On donne $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

(a) Mettre z_1/z_2 sous forme algébrique.

(b) Calculer le module et l'argument principal de z_1 et de z_2 ; en déduire le module et l'argument principal de z_1/z_2.

(c) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 13

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on trace le cercle de centre l'origine O du repère et de rayon 1, sur lequel on place les points A et B tels que la mesure de l'angle (Ox, OA) vaille $\pi/4$ et celle de l'angle (Ox, OB) vaille $\pi/3$.

(a) Quelles sont les formes trigonométriques et algébriques des affixes a et b de A et B ?

(b) Calculer le produit ab ; en déduire les valeurs de $\cos(7\pi/12)$ et $\sin(7\pi/12)$.