TD1 - Suites numériques

Exercice 1

1. On pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
   a) Donner les sens de variation des sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.
   b) Établir que $0 < u_n \leq 1$ pour tout n.
   c) Montrer que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent. Que peut-on dire de leurs limites respectives ℓ_0 et ℓ_1 ?
   d) En déduire que $(u_n)_n$ converge vers une limite ℓ.
2. On pose, pour tout $n \geq 1$, $v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.
   a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.
   b) En déduire $\ln \frac{2n+1}{n+1} \leq v_n \leq \ln 2$ pour tout $n \geq 1$.
   c) Montrer que $(v_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
3. a) Comparer $v_{n+1} - v_n$ et $u_{2n+2} - u_{2n}$, v_1 et u_2. Quelle relation peut-on en déduire entre v_n et u_{2n} ?
   b) Que vaut ℓ ?

Exercice 2

a) Soit $(u_n)_n$ une suite croissante, convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer par un raisonnement par l'absurde que $u_n \leq \ell$ pour tout n.
b) Qu'en déduit-on pour une suite $(v_n)_n$ minorée et décroissante ?
c) On suppose maintenant $(u_n)_n$ croissante, $(v_n)_n$ décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0. Montrer qu'il existe ℓ, à préciser, tel que pour tous n, m :

$$u_n \leq \ell \leq v_m \ .$$

Exercice 3

Soit $\alpha > 0$, étudier la convergence des suites définies par

$$u_n = \left(\frac{1 + \sin n\alpha}{3 + \cos n\alpha}\right)^n \quad , \quad v_n = \left(\frac{1 + \alpha n}{3 + n}\right)^n \quad .$$

Indication pour (v_n) *: on pourra introduire la fonction* $g(x) = \frac{1 + \alpha x}{3 + x}$*, dont on étudiera les variations en fonction de* α *; on traitera à part le cas* $\alpha = 1$*.*

Exercice 4

On considère la fonction f donnée par $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que u_0 est un réel fixé et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) Déterminer les deux racines $\ell_1 < 0 < \ell_2$ de l'équation $f(x) = x$.
   b) Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < \ell_1 \Rightarrow f(x) < \ell_1$ et $1 < x < 2 \Rightarrow 1 < f(x) < 2$.
   c) Dresser le tableau de variations de f, en faisant figurer ℓ_1, ℓ_2, 1 et 2.
   d) Tracer l'esquisse de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f (repère ortohnormé, unité 2cm).
   e) Décrire les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de la diagonale $y = x$.
2. a) Représenter les 4 premiers termes de $(u_n)_n$ sur le graphique précédent dans les cas suivants : $u_0 = -0{,}7$; $u_0 = 1{,}25$.
   b) Démontrer que si la suite $(u_n)_n$ converge vers un réel U alors $U \in \{\ell_1, \ell_2\}$.
   c) Dans cette question on suppose $u_0 < \ell_1$.
      (i) Démontrer que $u_n < \ell_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
      (ii) démontrer que $(u_n)n$ est décroissante ;
      (iii) la suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.
3. Dans cette question on suppose $u_0 \in]1, \ell_2[$. On note $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$, $w_n = u_{2n+1}$.
   a) Démontrer que $\ell_2 < u_1 < 2$;
   b) démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < v_n < \ell_2$ et $\ell_2 < w_n < 2$;
   c) déterminer 2 réels a, b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) - x = (-x^2 + x + 1)(x^2 + ax + b)$;
   d) déterminer les solutions de $(f \circ f)(x) - x = 0$. En déduire le signe de $(f \circ f)(x) - x$ pour $x \in]1, 2[$;
   e) démontrer que $(v_n)_n$ est décroissante et $(w_n)_n$ croissante ;
   f) prouver que $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont convergentes et préciser leur(s) limite(s) ;
   g) La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Exercice 5

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 1 + k\cos\theta + \cdots + k^n \cos n\theta$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, majorer $|u_{n+1} - u_n|$ indépendamment de θ ;
b) montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $1 + k + \cdots + k^{p-1} < \frac{1}{1-k}$;
c) en déduire la majoration *(on pourra utiliser l'inégalité triangulaire)* :

$$|u_{n+p} - u_n| < \frac{k^{n+1}}{1-k} \quad .$$

d) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 6

À une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de réels **non nuls**, on associe la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$p_n = \prod_{i=1}^{n} u_i = u_1 \cdot u_2 \cdots u_n \quad .$$

1. a) On suppose que $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $p_n = n + 1$ pour tout n, en déduire sa limite.
   b) Soit a un réel non congru à 0 modulo 2π.
      (i) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \cos \frac{a}{2^n}$?
      (ii) Montrer que la suite $(q_n)_n$ définie par $q_n = p_n \sin \frac{a}{2^n}$ est géométrique.
      (iii) En déduire la limite de $(p_n)_n$.
   c) Montrer que si $(p_n)_n$ converge vers une limite non nulle, alors $(u_n)_n$ tend vers 1 *(on pourra étudier le rapport $\frac{p_{n+1}}{p_n}$)*.
      Étudier la réciproque de cette proposition.
2. Désormais on suppose que $(u_n)_n$ tend vers 1.
   a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow u_n > 0$.
      On se donne un tel n_0.
   b) Pour $n \geq n_0$, on pose $S_n = \sum_{i=n_0}^{n} \ln(u_i)$. Montrer que $(p_n)_n$ converge vers une limite non nulle si et seulement si $(S_n)_{n\geq n_0}$ converge.
   c) On pose $u_n = \sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}$.
      (i) Vérifier que cette suite tend vers 1 et qu'on peut choisir $n_0 = 1$.
      (ii) Montrer que pour tout entier $k \geq 3$, on a $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{\ln k}{k}$.
      (iii) Etudier la limite de (S_n) ; en déduire la convergence de $(p_n)_n$.

Exercice 7

Soient a, b des réels avec $a \neq 1$. On s'intéresse aux suites $(u_n)_n$ telles que, pour tout entier n,

$$(*) \qquad u_{n+1} = a u_n + b \quad .$$

a) Déterminer $c \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_n$ satisfait la récurrence $(*)$ si et seulement si la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - c$ est géométrique de raison a.
b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et de u_0, lorsque $(u_n)_n$ satisfait la récurrence $(*)$.

c) Montrer que l'ensemble des suites satisfaisant la récurrence $(*)$ est un sous-espace affine de l'espace des suites réelles. Quelle est sa dimension ?

Exercice 8
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad .$$

a) Vérifier que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont croissantes, à termes positifs ;

b) montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1} < 1 + v_n \quad ; \quad v_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad .$$

c) Qu'en déduit-on pour la convergence des deux suites ?

d) Déduire de ce qui précède la convergence de la suite de terme général

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \quad .$$

Exercice 9
On va montrer, pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de réels > 0 :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} \quad , \quad \text{avec égalité si et seulement si } x_1 = \cdots = x_n \quad .$$

a) Démontrer l'inégalité quand $n = 2$. On étudiera le cas d'égalité.

b) On étudie le cas général.

(i) Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{N}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} 1 \in \mathcal{A} \; ; \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \; n \in \mathcal{A} \Rightarrow 2n \in \mathcal{A} \; ; \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \; n+1 \in \mathcal{A} \Rightarrow n \in \mathcal{A} \; . \end{cases}$$

Démontrer que $\mathcal{A} = \mathbb{N}^*$.
On pourra commencer par montrer que $2^n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) En déduire l'inégalité ci-dessus et son cas d'égalité.
Pour le passage de n à $2n$, on pourra utiliser le cas $n = 2$ et pour le passage de $n+1$ à n, on pourra généraliser l'égalité :

$$\frac{a + b + \frac{a+b}{2}}{3} = \frac{a+b}{2} \quad .$$