TD n° 1 de Macroéconomie
Le Modèle AK

Licence AES AGE,AGT,CAI, semestre 6

Faculté de Droit et des Sciences Économiques de Limoges

Exercice 1 : Le modèle AK

Supposons une économie fermée sans État dans laquelle il n'y a pas de croissance de la population. La fonction de production par tête du type :

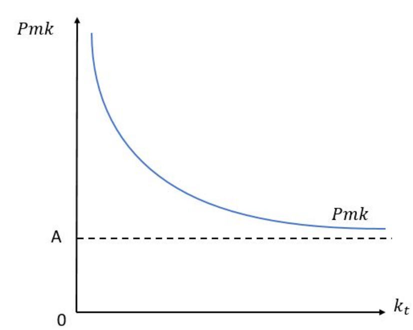
$$y_t = Ak_t + Ck_t^\alpha$$

1. **Calculez la Pmk et les limites aux bornes.**

$$Pmk_t = \frac{\partial y_t}{\partial k_t} = A + \alpha \frac{C}{k^{1-\alpha}}$$

$$\lim_{k \to 0} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} = A$$

2. **Donnez une représentation graphique de la Pmk.**



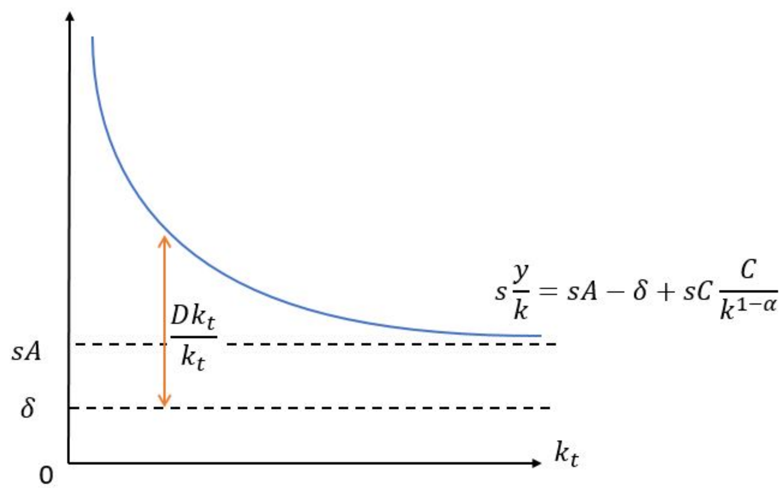
3. **Écrire l'équation dynamique fondamentale d'accumulation du capital par tête sachant que $I_t = S_t$.**

$$Dk_t = sy_t - \delta k_t$$

4. **Représentez graphiquement Dk_t/k_t.**

   On sait que :

$$\frac{Dk_t}{k_t} = s\frac{y_t}{k_t} - \delta = sA - \delta + s\frac{C}{k_t^{1-\alpha}}$$

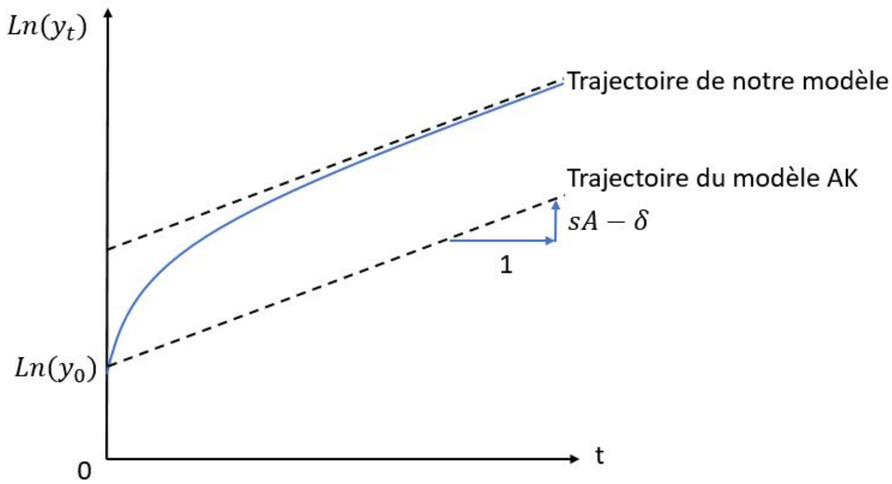


5. **Y a-t-il convergence en taux et en niveau pour diverses économies identiques sauf en ce qui concerne le dotations initiale k_0 ?**

   On constate sur le graphique qu'une économie croît d'autant plus vite que son capital est faible. A terme c'est à dire lorsque le capital devient très élevé toutes les économies ont le même taux de croissance $\gamma = sA - \delta$.

6. **Représentez dans le plan $(t, Ln(y_t))$ l'évolution d'une économie. Expliquez.**

   On sait qu'à long terme le taux de croissance de l'économie est $sA - \delta$ et qu'à court terme le taux de croissance de l'économie est d'autant plus grand qu'elle a moins de capital. On peut donc tracer l'évolution du $Log(y_t)$ en fonction de t comme dans la figure çi dessous.



7. **On suppose $s = 0.2$, $A = 0.4$, $C = 0.5$ et $\delta = 0.06$ Donnez la valeur du taux de croissance vers lequel l'économie converge.**

   Le taux de croissance du capital vers lequel converge l'économie est : $sA - \delta$. On en déduit donc en appliquant les paramètres :

$$\gamma_k = 0.2 \times 0.4 - 0.06 = 2\%$$

8. **Donnez le taux de croissance lorsque le capital par tête d'une économie $E_1 = 10$ et d'une économie $E_2 = 20$. Commentez.** Pour calculer le taux de croissance de l'économie pour un niveau de capital donné il faut appliquer :

$$\frac{Dk_t}{k_t} = sA + Ck^{\alpha-1} - \delta$$

   Application numérique :

$$\left.\frac{Dk_t}{k_t}\right|_{k_t=10} = 0.2 \times 0.4 + 0.5 10^{0.3-1} - 0.06 \approx 0.08 + 0.1 - 0.06 = 12\%$$

$$\left.\frac{Dk_t}{k_t}\right|_{k_t=20} = 0.2 \times 0.4 + 0.5 20^{0.3-1} - 0.06 \approx 0.08 + 0.06 - 0.06 = 8\%$$

9. **Pour quelle valeur de paramètre on aurait convergence en taux et en niveau ?**

Pour avoir convergence en taux et en niveau, il faudrait retrouver le modèle de Solow. Donc en posant $A = 0$ la fonction de production par tête est identique à celle du modèle de Solow :

$$y_t = Ck^{\alpha}$$

Exercice 2 : Le capital humain traité comme un vulgaire capital

Supposons une économie fermée sans État dans laquelle il n'y a pas de croissance de la population. La fonction de production par tête du type :

$$y_t = Ak_t^{\alpha}h_t^{1-\alpha}$$

On peut accumuler du capital physique en renonçant à la consommation

$$Dk_t = s^k y_t - \delta k_t$$

De ma même façon, c'est à dire en renonçant à de la consommation on peut accumuler du capital humain. Vous remarquerez qu'il suffit de payer dans ce cas pour avoir du capital humain !

$$Dh_t = s^h y_t - \delta h_t$$

1. **Calculez la Pmk_t, la Pmh_t et les limites aux bornes.**

$$Pmk_t = \alpha A k_t^{\alpha-1}h_t^{1-\alpha} = A\alpha\left(\frac{h_t}{k_t}\right)^{1-\alpha}$$

On constate que la Pmk tend vers $+\infty$ lorsque le capital physique tend vers 0 et qu'elle tend vers 0 lorsque le capital physique tend vers $+\infty$ (toutes choses étant égales par ailleurs).

$$Pmh_t = (1-\alpha)Ak_t^{\alpha}h_t^{-\alpha} = A(1-\alpha)\left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha}$$

On constate que la Pmh tend vers $+\infty$ lorsque le capital humain tend vers 0 et qu'elle tend vers 0 lorsque le capital humain tend vers $+\infty$ (toutes choses étant égales par ailleurs).

2. **Sous quelle condition la Pmk est-elle constante ?**

   Pour que la Pmk reste constante il faut que le terme h_t/k_t reste constant. On en déduit qu'il faut donc que le capital humain et le capital physique croissent au même taux.

3. **Calculez le rapport h_t/k_t à l'état régulier, c'est à dire lorsque $\gamma_h = \gamma_k$.**

   Par $Dk_t = s^k y_t - \delta k_t$ on peut en déduire :

$$\frac{Dk_t}{k_t} = s^k \frac{y_t}{k_t} - \delta$$

Par $Dh_t = s^h y_t - \delta h_t$ on peut en déduire :

$$\frac{Dh_t}{h_t} = s^h \frac{y_t}{h_t} - \delta$$

En égalisant c'est deux taux de croissance on obtient :

$$s^k \frac{y_t}{k_t} = s^h \frac{y_t}{h_t} \quad \rightarrow \quad \frac{k_t}{h_t} = \frac{s^k}{s^h}$$

4. **Remplacez ce rapport h/k dans la fonction de production et calculez la Pmk et réécrivez la fonction de production. Que constatez vous ?**

   En remplaçant le rapport précédent dans la fonction de production on a :

$$y_t = Ak_t^\alpha h_t^{1-\alpha} = \frac{Ak_t^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha}}{k_t} = Ak_t \left(\frac{h_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} = A\left(\frac{s^h}{s^k}\right)^{1-\alpha} k_t$$

   On reconnait le modèle "AK".

   En calculant la Pmk_t on obtient :

$$Pmk_t = \alpha A \left(\frac{h_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} = \alpha A \left(\frac{s^h}{s^k}\right)^{1-\alpha}$$

On voit que la Pmk est constante et dépend des paramètres du modèle.

5. **Expliquez le rôle de s^k et de s^h sur la croissance.**

De $y_t = A\left(\frac{s^h}{s^k}\right)^{1-\alpha} k_t$, on déduit facilement que :

$$\frac{y_t}{k_t} = A\left(\frac{s^h}{s^k}\right)^{1-\alpha}$$

En remplaçant dans :

$$\frac{Dk_t}{k_t} = s^k \frac{y_t}{k_t} - \delta$$

On obtient le taux de croissance de l'économie :

$$\frac{Dk_t}{k_t} = s^k A\left(\frac{s^h}{s^k}\right)^{1-\alpha} - \delta = A(s^k)^\alpha (s^h)^{1-\alpha} - \delta$$

On voit clairement que le taux de croissance dépend positivement de s^k et de s^h.