TD n^{o} 6 de Macroéconomie
Ressources fixes ou épuisables : Constituent-elles une limite à la croissance ?

Et si les écologistes avaient raison ?

Licence AES AGE,AGT,CAI, semestre 5

Faculté de Droit et des Sciences Économiques de Limoges

Les écologistes objectent souvent que la croissance ne peut être durable. On connait tous la phrase, " *il ne peut pas y avoir de croissance infinie dans un monde fini*". Une autre phrase assassine (pour les économistes) dit également "*pour croire qu'il peut exister une croissance infinie dans un monde fini il faut être fou ou économiste !*".

Dans le modèle de Solow simple, nous utilisions deux facteurs de productions i) le capital, que l'on pouvait accumuler en renonçant à de la consommation et ii) le travail qui s'accumulait grâce à la croissance de la population. L'idée était simple, on peut produire plus en ayant plus des deux inputs. Cependant, nous avons négligé deux choses. D'une part pour nourrir la population on a besoin de terres (facteur de production non accumulable)et d'autre part une grande partie de notre production se fait en utilisant des ressources épuisables telles que le pétrole le cuivre, l'acier etc...

Ce TD consiste à étudier les conséquences dans le modèle de Solow de l'introduction d'un facteur non accumulable tel que la terre et d'un facteur de production épuisable tel que le pétrole.

Exercice 1 : Introduction d'un facteur non accumulable

Le cadre d'analyse

On suppose une fonction de production Cobb-Douglas est le la forme :

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} T^{\phi} \qquad \text{avec} \qquad \alpha + \beta + \phi = 1$$

On remarque plusieurs choses :

— On introduit du progrès technique A_t neutre au sens de Harrod (c'est à dire qui porte sur le travail en augmentant son efficacité).

— On introduit un facteur de production nouveau : la terre notée T. On remarque que ce facteur n'est pas indicé du temps t afin de montrer que c'est un facteur fixe que l'on ne peut pas accumuler.

— Enfin la somme des exposants est égale à 1, ce qui assure dans une Cobb-Douglas que les rendements à l'échelle sont constants.

Question 1 : Écrire la fonction de production par tête.

Question 2 : En posant que le taux de croissance du progrès technique est $DA_t/A_t = x$, que le taux de croissance de la population est $DL_t/L_t = n$, et que le taux de croissance de la terre est nul $DT/T = 0$, montrez que le taux de croissance de la production par tête est :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \alpha\frac{DK_t}{K_t} + \beta x - (\alpha + \phi)n$$

Indication, il faut prendre le ln *de la fonction de production et dériver par rapport au temps.*

Question 3 : On sait que l'accumulation du stock de capital est :

$$DK_t = sY_t - \delta K_t$$

En déduire le taux de croissance du stock de capital puis déduire qu'à l'état stationnaire :

$$\frac{DK_t}{K_t} = \frac{DY_t}{Y_t}$$

Expliquez pourquoi :

$$\frac{DY_t}{Y_t} = \frac{Dy_t}{y_t} + n$$

Question 4 : En utilisant les résultats de la question 3 et de la question 2 montrez que le taux de croissance de la production par tête est :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \frac{\beta x - n\phi}{1-\alpha} = \frac{\beta x - n\phi}{\beta + \phi}$$

Question 5 : A quelle condition a-t-on une croissance durable de la production par tête ?

Question 6 : Empiriquement on devrait avoir $n = 0,01$,$\alpha = 0,25$, $\beta = 0,6$ et $\phi = 0,15$. Dit autrement, la rémunération du capital représente 25% de la production, la rémunération du travail 60% et la rémunération de la terre (appelée rente foncière) 15%. Quelle doit être la croissance du progrès technique qui assure une croissance durable ?

Exercice 2 : Introduction d'un facteur épuisable

Le cadre d'analyse

Cette fois l'exercice est plus périlleux. En effet, la présence d'une ressource épuisable nécessite de faire une hypothèse sur le prélèvement de cette ressource rare. On suppose que l'on dispose à la date 0 d'un stock R_0. A chaque période t, on prélève un montant E_t. La dynamique de la ressource épuisable est :

$$DR_t = -E_t$$

De plus, suppose que c'est une part constante du stock restant :

$$E_t = s^E R_t$$

La dynamique de la ressource épuisable est donc :

$$DR_t = -s^E R_t \qquad \text{et on en déduit que} \qquad \frac{DR_t}{R_t} = -s^E$$

Par ailleurs, la fonction de production est :

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^\beta E_t^\epsilon = K_t^\alpha (A_t L_t)^\beta (s^E R_t)^\epsilon \qquad \text{avec} \qquad \alpha + \beta + \epsilon = 1$$

Question 1 : Écrire la fonction de production par tête.

Question 2 : En posant que le taux de croissance du progrès technique est $DA_t/A_t = x$, que le taux de croissance de la population est $DL_t/L_t = n$, et sachant que $DR_t/R_t = -s^E$, montrez que le taux de croissance de la production par tête est :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \alpha \frac{DK_t}{K_t} + \beta x - \epsilon s^E - (\alpha + \epsilon) n$$

Indication, il faut prendre le ln *de la fonction de production et dériver par rapport au temps.*

Question 3 : On sait que l'accumulation du stock de capital est :

$$DK_t = sY_t - \delta K_t$$

En déduire le taux de croissance du stock de capital puis déduire qu'à l'état stationnaire :

$$\frac{DK_t}{K_t} = \frac{DY_t}{Y_t}$$

Expliquez pourquoi :

$$\frac{DY_t}{Y_t} = \frac{Dy_t}{y_t} + n$$

Question 4 : En utilisant les résultats de la question 3 et de la question 2 montrez que le taux de croissance de la production par tête est :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \frac{\beta x - \epsilon(s^E + n)}{1 - \alpha} = \frac{\beta x - \epsilon(s^E + n)}{\beta + \epsilon}$$

Question 5 : A quelle condition a-t-on une croissance durable de la production par tête ?

Question 6 : Le raisonnement des écologistes est le suivant :

On estime les réserves prouvées en 2015 à 1492 milliards de Barils (mais il faudrait ajouter les réserves probables). La consommation mondiale est actuellement de 95 millions de barils par jours donc 95*365=34675 millions de barils par ans. En divisant 1492000 millions de barils par 34675 (consommation annuelle) on trouve 43 ans !

Le raisonnement des économistes :

Le prélèvement actuel représente 2,3% du stock disponible. On peut donc empiriquement poser $s^E = 0,023$. Par ailleurs, empiriquement on devrait avoir $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,6$ et $\epsilon = 0,1$. Calculez le taux de croissance du progrès technique nécessaire à un croissance durable.

Remarque : On peut reformuler la critique des écologistes de la façon suivante : Peut-on maintenir un taux de croissance du progrès technique à un niveau suffisamment élevé pour continuer à connaître une croissance infinie.

Correction

Avant de se lancer dans la correction du TD nous allons voir la démarche que l'on suivre dans les deux exercices avec le modèle de Solow simple, puis le modèle de Solow avec progrès technique.

Le modèle de Solow simple

On peut donc définir le modèle de Solow simple avec une Cobb-Douglas comme étant le résultat de deux équations :

$$Y_t = AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha} \tag{1}$$

et l'équation d'accumulation du stock global de capital :

$$DK_t = sY_t - \delta K_t \tag{2}$$

De l'équation 2 on peut en tirer :

$$\frac{DK_t}{K_t} = s\frac{Y_t}{K_t} - \delta \tag{3}$$

Si l'on désire une croissance à taux constant (solution d'état stationnaire dans notre cas alors DK_t/K_t doit être constant, ce qui implique que le rapport Y_t/K_t doit rester constant. On en déduit donc :

$$\frac{DK_t}{K_t} = \frac{DY_t}{Y_t} \tag{4}$$

Maintenant nous allons exprimer le taux de croissance de la production par tête. Par définition $y_t = Y_t/L_t$. En prenant la dérivée logarithmique on obtient facilement :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \frac{DY_t}{Y_t} - n \tag{5}$$

Ou n est le taux de croissance de la population.

Remarque : les équations 4 et 5 sont toujours vraies et résulte de l'équation d'accumulation du stock de capital 2 et de la recherche d'une croissance à taux constant.

Utilisons la fonction de production : On peut, écrire la production par tête :

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t}$$

Prenons le logarithme :

$$\ln y_t = \ln A + \alpha \ln K_t + (1-\alpha)\ln L_t - \ln L_t$$

En arrangeant il vient :

$$\ln y_t = \ln A + \alpha \ln K_t - \alpha) \ln L_t$$

Dérivons par rapport au temps (Remarquons que A ne dépend pas du temps donc la dérivée sera nulle) :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \alpha\frac{DK_t}{K_t} - \alpha\frac{DL_t}{L_t} \tag{6}$$

On va maintenant utiliser les équations 4 et 5.

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \alpha\left(\frac{Dy_t}{y_t} + n\right) - \alpha n$$

En résolvant en Dy_t/y_t on obtient :

$$(1-\alpha)\frac{Dy_t}{y_t} = 0 \tag{7}$$

La seule solution est évidement $\frac{Dy_t}{y_t} = 0$

Dans le modèle de Solow simple, il ne peut pas y avoir de la croissance par tête.

Le modèle de Solow avec progrès technique

La fonction de production est :

$$Y_t = K_t^{\alpha}\left(A_t L_t\right)^{1-\alpha} \tag{8}$$

Écrivons la production par tête :

$$y_t = \frac{K_t^{\alpha}\left(A_t L_t\right)^{1-\alpha}}{L_t}$$

Prenons la dérivée logarithmique :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \alpha\frac{DK_t}{K_t} + (1-\alpha)\frac{DA_t}{A_t} + (1-\alpha)\frac{DL_t}{L_t} - \frac{DL_t}{L_t}$$

En simplifiant :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \alpha\frac{DK_t}{K_t} + (1-\alpha)\frac{DA_t}{A_t} - \alpha\frac{DL_t}{L_t}$$

Utilisons 4 et 5 :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \alpha\left(\frac{Dy_t}{y_t} + n\right) + (1-\alpha)x - \alpha n$$

En résolvant en Dy_t/y_t On obtient :

$$(1-\alpha)\frac{Dy_t}{y_t} = (1-\alpha)x$$

Soit :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = x \tag{9}$$

La seule solution est évidement $\frac{Dy_t}{y_t} = x$

Dans le modèle de Solow avec progrès technique, il peut y avoir de la croissance par tête au taux x.

Le modèle avec un facteur fixe (exercice 1)

La fonction de production est :

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} T^{\phi}$$

Donc la production par tête est :

$$y_t = \frac{K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} T^{\phi}}{L_t}$$

Prenons la dérivée logarithmique :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \alpha\frac{DK_t}{K_t} + \beta\frac{DA_t}{A_t} + \beta\frac{DL_t}{L_t} + \phi\frac{DT}{T} - \frac{DL_t}{L_t}$$

Ne perdons pas de vue que la terre ne peut pas évoluer dans le temps puisqu'elle est en quantité limité donc $DT/T = 0$:

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \alpha\frac{DK_t}{K_t} + \beta x + \beta(\beta - 1)n$$

Utilisons 4 et 5 :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \alpha\left(\frac{Dy_t}{y_t} + n\right) + \beta x + (\beta - 1)n$$

Résolvons en Dy_t/y_t :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \frac{\beta x - (1 - \alpha - \beta)n}{1 - \alpha}$$

Utilisons maintenant le fait que : $\alpha + \beta + \phi = 1$. On en tire deux choses :

$$1 - \alpha - \beta = \phi \qquad \text{et} \qquad 1 - \alpha = \beta + \phi \tag{10}$$

On peut donc réécrire l'équation de Dy_t/y_t de la façon suivante :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \frac{\beta x - \phi n}{\beta + \phi} \tag{11}$$

On ne peut avoir de la croissance par tête à taux constant que si : $\beta x > \phi n$. Il faut donc que le progrès croisse à un supérieur à :

$$\boxed{x > \frac{\phi n}{\beta}}$$

Pour se faire une idée du taux de croissance du progrès technique nécessaire à une croissance durable? Empiriquement $\phi = 0,15$, $\alpha = 0,25$ et $\beta = 0,6$ donc$x > (0,15 \times 0,01)/0,6 = 0,25\%$. Soit un taux de croissance très faible du progrès technique.

Remarque : Ce résultat est très intéressant car s'il n'y a pas de progrès technique, il ne peut pas y avoir de croissance infinie dans monde fini.

Donc avant 1820 on est en droit de penser que $x \approx 0$ donc la croissance par tête est :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = -\frac{\phi n}{\beta + \phi}$$

Ainsi pour maintenir un niveau de vie constant $Dy_t/y_t = 0$ il faut que le taux de croissance de la population soit nul. C'est le cas du modèle malthusien.

Après 1820, le monde à connu du progrés technique à un rythme proche de 2% mais la population a augmenté à un rythme à peu près équivalent. Ainsi si $x \approx n$ il y a de la croissance tant que $\beta > \phi$ c'est a dire tant que la part de rémunération du travail dans le revenu est supérieure à la part de la rémunération de la terre (rente foncière) dans le revenu. L'exploitation des travailleurs par les propriétaires fonciers nuit à la croissance (je deviens marxiste!).

Le modèle avec ressource épuisable (exercice 2)

La nouveau est le fait que la ressource croît à un rythme négatif à cause du prélèvement.

$$\frac{DR_t}{R_t} = -s^E \tag{12}$$

La fonction de production est :

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta}(s^E R_t)^{\epsilon}$$

La production par tête est :

$$y_t = \frac{K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta}(s^E R_t)^{\epsilon}}{L_t}$$

On prend la dérivée logarithmique :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \alpha \frac{DK_t}{K_t} + \beta \frac{DA_t}{A_t} + \beta \frac{DL_t}{L_t} + \epsilon \frac{Ds_t^E}{s_t^E} + \epsilon \frac{DR_t}{R_t} - \frac{DL_t}{L_t} \tag{13}$$

Par hypothèse on extrait une part constante de la ressource restante donc s^E est constant de plus on sait que $\frac{DR_t}{R_t} = -s^E$. L'équation 13 peut se ré-écrire :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \alpha \frac{DK_t}{K_t} + \beta x + \beta n - \epsilon s^E - n$$

En tenant compte de 4 et 5 on peut écrire :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \alpha \left(\frac{Dy_t}{y_t} + n \right) + \beta x + \beta n - \epsilon s^E - n$$

En résolvant en Dy_y/y_t et en tenant compte de 10 on déduit que :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = \frac{\beta x - \epsilon(s^E + n)}{\beta + \epsilon} \tag{14}$$

La croissance est durablement positive si : $\beta x > \epsilon(s^E + n)$. On peut en tirer deux conclusions :

— Pour une part de prélèvement donnée s^E on peut trouver le taux de croissance du progrès technique nécessaire :

$$x > \frac{\epsilon(s^E + n)}{\beta}$$

— Pour un niveau de progrès technique le prélévement ne doit pas dépasser :

$$s^E < \frac{\beta x - \epsilon n}{\epsilon} = \frac{\beta}{\epsilon} x - n$$

Empiriquement si :$n = 0,01$,$x = 0,01$ $\epsilon = 0,1$, $\beta = 0,6$,et $\alpha = 0.3$. Le taux prélèvement doit être inférieur à $0,6 \times 0,01/0,1 - 0,01 = 5\%$. Il ne faut pas extraire plus de 5% des ressources restantes.

Si les réserves prouvées sont de 1492000 millions de barils et que l'on extrait 34675 millions de barils par ans cela fait 2,3% donc inférieur au 5% que l'on avait déterminé.

S'il n'y avait pas de progrès technique, le fait d'utiliser des ressources qui s'épuisent conduirait inéluctablement à l'extinction de la croissance. Mais le progrès technique est une réalité, sans lui il n'y aurait pas eu de croissance. Le poids positif du progrès technique est beaucoup plus fort que le poids négatif lié à l'épuisement de la ressource. C'est cet aspect dynamique du problème que l'extrapolation de des écologistes ignore. Le problème ne notre analyse est que l'on suppose que la substituabilité des facteurs de production est sans fin. En d'autres termes, on peut arriver au fait qu'à un moment on possède telle de capital de connaissance et de travail que même avec très peu de pétrole on est capable de produire ce que l'on produisait avec moins de capital, moins de travail et plus de pétrole. Cela peut sembler irréaliste pour certain. Mais si l'on regarde le progrès en matière de téléphone portable, on voit qu'en quelques années on est passé du radiocom 2000 de quelques kilos, 12 heures d'autonomie en veille, et 30 minutes en conversation) à des téléphones de 100 gr, 5 heures d'autonomie en conversation et plusieurs jours en veille ! Avant l'invention du principe du moteur à explosion, le pétrole n'était pas considéré comme une richesse naturelle, mais comme un déchet fossile. C'est devenu une richesse à partir du moment où l'innovation du moteur s'est diffusée. C'est l'innovation – donc la création humaine – qui a transformé un élément de la nature en richesse exploitable. Mais le pétrole en lui-même n'est pas une richesse et ne peut constituer une ressource tant qu'on n'en a pas l'utilisation.