Chapitre 4

Séries entières

On appelle *série entière* réelle (resp. complexe) une série de fonction de la forme $\sum a_n x^n$ où x est une variable réelle (resp. $\sum a_n z^n$ où z est une variable complexe).
Les nombres (réels ou complexes) a_n sont appelés les *coefficients* de la série entière.
Le premier terme a_0 d'une série entière $\sum a_n z^n$ est dit terme constant.
Dans tout ce qui suit, le corps K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant le contexte.

Les séries entières sont importantes pour plusieurs raisons.

- Les fonctions les plus simples à étudier et surtout à *évaluer* sont les fonctions polynomiales : il est donc naturel d'approcher des fonctions compliquées par des polynômes.

- L'étude des séries entières permet de préciser le domaine de validité des développements de Taylor, c'est à dire le passage à la limite des approximations polynomiales d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.

- Elles permettent de trouver des solutions à des problèmes (par exemple des équations différentielles) pour lesquelles il n'y a pas de « formule explicite » donnant les solutions. Elles sont aux fonctions ce que les développements décimaux sont aux nombres réels.

I. Disque et rayon de convergence

Rappelons que si, pour z_0 fixé dans K, la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est convergente, alors, nécessairement $\lim\limits_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$. En particulier, la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée.

Lemme 4.1. *On considère une série entière $\sum a_n z^n$. Soit $z_0 \in K$ non nul. Si la série $\sum a_n z_0^n$ converge, alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < |z_0|$.*
De même, si la suite numérique $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < |z_0|$.

Dit autrement : Si la suite numérique $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors, la série $\sum a_n z^n$ converge (absolument) sur tout le disque ouvert $\Delta(0, |z_0|)$ de centre 0 et de rayon $|z_0|$.

DÉMONSTRATION- Comme la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, il existe un réel A tel que, quel que soit l'entier naturel n, $|a_n z_0^n| \leq A$. Cela implique, pour $z_0 \neq 0$, que

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n}| \leq A|\frac{z^n}{z_0^n}|.$$

Par conséquent, si $|z| < |z_0|$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument car elle est majorée par une série géométrique de raison inférieure strictement à 1. □

Exemples

1. Une fonction polynomiale est une série entière particulière. la suite $(a_n z^n)$ correspondante est évidemment bornée (pourquoi ?).
2. La suite (z^n) est bornée en $z_0 = 1$. Par conséquent, la série entière $\sum z^n$ est absolument convergente sur le disque unité ouvert centré en 0 (fait déjà connu).
3. La suite $(\frac{z^n}{n!})$ est bornée quel que soit z appartenant à $\mathbb{C}$ (à montrer). Par conséquent la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente sur $\mathbb{C}$.

Théorème/Définition 1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.*
Il existe un unique réel $R \in [0, +\infty]$ tel que :
- *la série diverge pour $|z| > R$.*
- *la série converge absolument pour $|z| < R$.*

Ce nombre R est appelé rayon de convergence *de la série.*
Le disque de convergence *de la série est $D(O,R) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.*

Le rayon de convergence d'une série entière peut être fini (éventuellement nul) ou infini. Le domaine de convergence d'une série entière est un disque ouvert auquel s'ajoutent éventuellemnt des points de sa « frontière » : une fois R connu, il faut étudier séparément le cas $|z| = R$.

Remarquons aussi que si pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}$, la série $\sum a_n z_0^n$ converge, alors, nécessairement $|z_0| < r$.

Corollaire 2. *Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est égal à la borne supérieure des modules $|z_0|$ tels que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée.*

Le rayon de convergence d'une fonction polynomiale (considéré comme série entière) est égal à l'infini.

Les rayons de convergences des séries entières $\sum z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$ sont respectivement égaux à 1 et $+\infty$.

Corollaire 3. *Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence R. S'il existe z_0 tel que $\sum a_n\, z_0^n$ soit convergente mais pas absolument convergente, alors $R = z_0$.*

DÉMONSTRATION- En cours □

Théorème 4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. La série converge normalement sur tout disque $\Delta(0,\rho)$ de rayon $\rho < R$.*

Ceci montre aussi que la série entière converge uniformément sur tout disque $\Delta(0,\rho)$ où $\rho < R$.

DÉMONSTRATION- En cours $\square$

Exemples

1. Nous avons déjà vu que la série entière $\sum z^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$. En fait, elle converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[-\alpha,\alpha]$ où $\alpha \in [0,1[$.
2. La série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ est normalement convergente sur tout disque fermé $\overline{\Delta(0,R)}$, mais n'est pas uniformément convergente sur tout $\mathbb{C}$.
   Réécrire cette phrase pour l'exponentielle réelle.

Remarque : Le domaine de convergence d'une série entière n'est jamais vide. puisqu'il contient au moins le nombre nul. Par contre, le disque de convergence (qui ne comprend pas sa frontière) peut être vide (voir, par exemple, la série entière $[n!z^n]$).

Théorème 5 (critère de d'Alembert)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $a_n \neq 0$ (pour n assez grand). Si la suite $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ admet une limite $L \in [0,+\infty[$, alors le rayon de convergence de $[a_n]$ est $R = \frac{1}{L}$.*

Nous employons ici la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

DÉMONSTRATION- En cours $\square$

II. Opérations sur les séries entières

II.1 Somme et produit de séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R et R'.

Définition 4.2.
1. *On appelle* somme *des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.*
2. *On appelle* produit [1] *des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$ définie par $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.*

Proposition 6. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2. Les rayons de convergence r_s et r_p des somme et produit de deux séries sont supérieurs ou égaux au minimum des rayons R_1 et R_2 : $R_s \geq \min(R_1,R_2)$ et $R_p \geq \min(R_1,R_2)$.*

1. On parle parfois de « produit de Cauchy » des séries.

DÉMONSTRATION- La série somme converge absolument pour tout z tel que $|z| < \min(R_1, R_2)$, car elle est majorée par la série numérique $\sum(|a_n| + |b_n|)|z|^n$ qui converge.
Le cas de la série produit sera traité en cours. $\square$

Remarque : Pour la somme comme pour la produit, lorsque $|z| \geq \min(R_1, R_2)$, tout peut se produire.
Ainsi, les séries $\sum z^n$ et $\sum b_n z^n$ où $b_0 = 1, b_1 = -1, b_n = 0$ pour tout $n \geq 2$ ont pour rayons de convergence respectivement 1 et $+\infty$; le rayon de convergence de leur série produit est égal à l'infini.

II.2 Série dérivée d'une série entière

Définition 4.3. *On appelle série dérivée de la série entière* $\sum a_n z^n$ *la série* $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$.

Exemple
La série dérivée de la série entière $\sum z^n$ est $\sum(n+1)z^n$

Remarque : La série dérivée peut aussi s'écrire $\sum n a_n z^{n-1}$.

II.3 Série intégrale d'une série entière

Définition 4.4. *On appelle série intégrale de la série entière* $\sum a_n z^n$ *la série* $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.

On l'écrit aussi $\sum \frac{a_{n-1}}{n} z^n$.

Exemple
La série intégrale de la série entière $\sum z^n$ est $\sum \frac{1}{n+1} z^{n+1}$.

III. Propriétés de la fonction somme $S(z) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n z^n$

Désignons par $S(z) := \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme de la série numérique $\sum a_n z^n$, quand elle converge.
Elle est définie pour $|z| < R$ (et éventuellement des points de la frontière du disque de convergence $\Delta(0, R)$).

III.1 Dérivation et intégration terme à terme

Théorème 7. *Soit* $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *la somme d'une série entière, de rayon de convergence* R, *pour* $|z| \leq r < R$. *Alors la série dérivée* $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$ *a aussi pour rayon de convergence* R. *La fonction* S *est dérivable sur le disque* $\Delta(0, r)$ *et la série dérivée a pour somme* S' *sur* $\Delta(0, r)$:
$S'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$

DÉMONSTRATION- En cours □

Corollaire 8. *La fonction S est continue dans le disque* $\Delta(0,r)$.

DÉMONSTRATION- En cours □

Corollaire 9. *Dans le cas d'une série entière à coefficients réels, la fonction S est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $]-r,r[$ *et la dérivée* p*-ième de S est égale à la somme de la série dérivée* p*-ième de la série* $\sum a_n z^n$ *:*

$$S^{(p)}(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n)^{(p)} = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n z^{n-p}.$$

DÉMONSTRATION- En cours □

Corollaire 10. *Pour tout* $p \geq 0, \quad S^{(p)}(0) = p!a_p$.

Corollaire 11. *Une série entière* $\sum_n a_n x^n$ *a pour somme la fonction* 0 *sur* $]-R,R[$ *si et seulement si tous les* a_n *sont nuls.*

Théorème 12 (Théorème d'intégration terme à terme)**.** *Dans le cas d'une série entière à coefficients réels La fonction S est intégrable et son intégrale est égale à la somme de la série intégrale :*

$$\forall\, t \in]-r,r[, \quad \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}.$$

Exemples

1. Pour tout nombre z tel que $|z| < 1$, la série entière $[na_n z^{n-1}]$ (série dérivée de $[a_n z^n]$) a pour somme la dérivée de la somme $\frac{1}{1-x}$, c'est-à-dire $\frac{1}{(1-x)^2}$.
2. D'après le théorème précédent, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ sur $]-1,1[$.

IV. Applications

IV.1 Développements en série entières usuels

Définition 4.5. *Soit* $R \in \mathbb{R}_+$ *et* $f :]-R,R[\to \mathbb{R}$. *On dit que* f *est* développable en série entière *sur* $]-R,R[$ *s'il existe une série* $\sum a_n x^n$ *telle que*

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On dit que f *est développable en série entière en 0 s'il existe* $R > 0$ *tel que la condition ci-dessus soit satisfaite.*

Il découle du paragraphe précédent que si f est développable en série entière sur $]-R,R[$, alors elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ (i.e indéfiniment dérivable). De plus, si c'est le cas, alors la série entière $\sum a_n x^n$ coïncide avec le développement de Taylor de f : $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Les développements en série entière des fonctions usuelles apparaissent comme étant leurs développements limités « infinis » (la limite de leur développement limité quand l'ordre tend vers l'infini). Ils se déduisent presque tous des trois développements que vous connaissez déjà par coeur :

$$\frac{1}{1-x}, \quad \exp(x), \quad (1+x)^\alpha.$$

En voici quelques-uns :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \dfrac{1}{1-x} & = & 1+x+x^2+x^3+\cdots & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad , R=1 \\
\dfrac{1}{(1-x)^2} & = & (\dfrac{1}{1-x})' & = & 1+2\,x+3\,x^2+\cdots & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \quad , R=1 \\
\ln(1-x) & = & \displaystyle\int \frac{1}{1-x} & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \quad , R=1 \\
\arctan(x) & = & \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \quad , R=1 \\
 & & \exp(x) & = & 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\cdots & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , R=+\infty \\
\cos(x) & = & \dfrac{1}{2}(e^{i\,x}+e^{-i\,x}) & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \quad , R=+\infty \\
\sin(x) & = & \dfrac{1}{2i}(e^{i\,x}-e^{-i\,x}) & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \quad , R=+\infty \\
\cosh(x) & = & \dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \quad , R=+\infty \\
\sinh(x) & = & \dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}) & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \quad , R=+\infty \\
 & & (1+x)^\alpha & = & 1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad , R=1 & & \\
 & = & & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \quad , R= \\
 & = & & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \quad , R=
\end{array}$$

IV.2 Résolution d'équation différentielle

On considère l'équation différentielle linéaire

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{IV.1}$$

où P, Q, R sont trois fonctions polynomiales.
On admet le théorème d'existence de solutions de l'équation différentielle linéaire (IV.1) suivant.

Théorème 13 (de Cauchy)**.** *Pour tout point a qui n'annule pas la fonction polynomiale P, il existe une solution développable en série entière $\sum a_n(x-a)^n$ de rayon de convergence $\rho_a > 0$.*

Se mettant dans le cadre de ce théorème, résoudre une équation différentielle linéaire (IV.1) revient à trouver les coefficients de son développement en série entière.

Remarque : Les coefficients de la série entière $\sum a_n(x-a)^n$, solution de l'équation différentielle linéaire (IV.1), vérifient une (double) relation de récurrence.

Exemple : Résolvons l'équation $(x^2-2x)y'' + 6(x-1)y' + 6y = 0$ dans $\mathbb{R}$, sachant que $y(1) = 0$ et $y'(1) = 1$.
Cherchons y sous forme d'une série entière en $(x-1)$. Posons $X = x-1$. L'équation devient

$$(X^2-1)y'' + 6Xy' + 6y = 0$$

Après les substitutions

$$\begin{array}{rcl} y & = & X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots \\ y' & = & 1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1} + \cdots \\ y'' & = & 2a_2 + 6a_3X + \cdots + n(n-1)a_n\,X^{n-2}. \end{array}$$

l'équation devient

$$-2a_2 + X(-6a_3+12) + X^2(20a_2 - 12a_4) + \cdots + X^n(n(n-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2}$$

$$+6na_n + 6a_n) + \cdots = 0.$$

D'où $a_2 = 0$; $a_3 = 2; \cdots; a_{n+2} = \dfrac{n+3}{n+1}a_n$, pour $n \geq 2$.
On en déduit $a_{2n} = 0$ et $a_{2n-1} = n$, c'est-à-dire

$$y = \sum_{n\geq 1} n(x-1)^{2n-1}.$$

Le rayon de convergence de cette série est égal à 1. L'intervalle de convergence est $]0,2[$.
On pouvait considérer cette équation différentielle dans $\mathbb{C}$. Les mêmes calculs nous conduiront au disque de convergence de centre 1 et de rayon 1.

IV.3 Calcul d'intégrales

Les primitives de certaines fonctions sont difficiles à exprimer à l'aide des fonctions élémentaires. Pour les évaluer, il existe de nombreuses méthodes et parmi elles, la méthode du develppement en série entière.

On veut, par exemple, calculer l'intégrale $I(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. on ne peut pas exprimer une primitive de e^{-t^2} à l'aide des fonctions usuelles (c'est un beau théorème de Liouville). Mais nous savons que pour tout nombre réel t

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}.$$

D'après le théorème de l'intégration des séries entières (cette série converge uniformément sur tout intervalle fermé et borné),

$$I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

est la « valeur » cherchée.

C'est une série alternée dont il est facile de calculer une valeur approchée avec une précision donnée.

Calculons les trois premières termes de $I(1)$.

Si $I_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$, on a

$$I_4 = 0,747486.., \ I_5 = 0,746729.., \ I_6 = 0,746836..$$

Comme $I_5 < I < I_6$, on peut écrire $I \simeq 0,746...$

IV.4 Constantes classique

Le développement en série entière donne une méthode d'approximation de constantes classiques. Par exemple, nous savons que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Nous savons que

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Cette série a pour rayon de convergence 1 (facile). De plus, elle converge pour $x = 1$ (c'est une série alternée satisfaisant le critère des séries alternées). On en déduit que

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Pour en déduire une valeur approchée de π, il nous faut donc majorer le reste de cette suite (ou bien remarquer que la valeur de la somme est toujours comprise entre deux valeurs consécutives.

On peut se demander si ce procédé est « efficace ». Pour cela, regardons combien de termes de la somme il faut pour avoir une précision de 10^{-2}. Nous savons (revoir le chapitre sur les séries alternées) que $|R_N(1)| < |a_{N+1}| = \dfrac{1}{2N+1}$. Nous voyons donc qu'il faudra 50 termes pour avoir une précision de 10^{-2}, 500 termes pour avoir une précision de 10^{-3}, etc. Ce procédé n'est donc pas très très efficace.
On peut néanmoins, avec ce genre de technique, construire des procédés efficaces de sommation.

Prenons un autre exemple, plus efficace. L'exponentielle a pour développement en série entière

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Comme son rayon de convergence est infini, on a donc $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$. Ceci nous donne une série pour calculer une approximation de e. La formule de Taylor-Lagrange permet de majorer le reste. Par exemple, $|R_N(1)| \leq \dfrac{3}{(N+1)!}$. Pour avoir $|R_N(1)| \leq 10^{-5}$, il suffit que $N = 8$; pour avoir 10 chiffres corrects (c'est à dire $|R_N(1)| \leq 10^{-10}$), il suffit que $N = 13$. On voit que cette approximation est *beaucoup* plus efficace que la précédente !
Pour calculer en pratique, on pose $f_1 = 1$, $e_1 = 1$ puis $f_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} f_n$ et $e_{n+1} = e_n + f_n$. Pour avoir une approximation de e à 10^{-10} près, il suffit donc de 13 multiplications et 13 additions.