MATHÉMATIQUES III
TD 2 : Intégrales généralisées.

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes : identifier en quel point se trouve le problème et trouver si l'intégrale converge (ou non) en ce point.

$$\int_0^1 \ln t\, dt; \quad \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \;\; (\alpha \in \mathbb{R}); \quad \int_1^\infty \frac{\ln t}{t^2}\, dt; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\; dt; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\, dt \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan t\, dt.$$

Exercice 2

Etudier la nature des intégrales suivantes, en utilisant les critères de comparaison

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}; \quad \int_e^\infty \frac{dt}{\ln t}; \quad \int_0^\infty \frac{t}{e^t+1}\, dt; \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2(t)}} dt.$$

Exercice 3

On considère l'intégrale :

$$I(\alpha, \beta) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta(1+t^\alpha)}\ , \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Discuter, suivant les valeurs des paramètres α et β la nature de l'intégrale $I(\alpha, \beta)$.
2. Calculer l'intégrale $I(\alpha, 1)$ lorsqu'elle est convergente.

Exercice 4

Etudier la nature des intégrales généralisées

$$\int_0^{+\infty} te^{it^2}\, dt; \quad \int_0^{+\infty} te^{it^3}\, dt; \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{iat}}{(1+t)^\alpha}\, dt, \quad (a \in \mathbb{R}, \;\; \alpha \in [1, +\infty[).$$

Exercice 5

1. Montrer que l'intégrale
$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt, \quad (\alpha \in]0, 1])$$
est convergente, mais n'est pas absolument convergente . Indication : (1) intégration par parties ; (2) montrer puis utiliser l'inégalité
$$|\sin t| \geq \frac{1-\cos 2t}{2}.$$
2. En déduire que les intégrales de Fresnel
$$\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx; \quad \int_0^\infty \cos(x^2)\, dx$$
sont convergentes mais non absolument convergentes.