MATHÉMATIQUES III
TD 3 : Suites et Séries Numériques.

Suites

Exercice 1
[à rendre] Variations sur la définition de la limite.

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l > 2$ (par exemple $l = 3$). Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n > 2$.
2. Démontrer qu'une suite croissante et non convergente tend vers $+\infty$.

Exercice 2
On considère la suite définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que (S_n) est croissante.

2) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx < \frac{1}{k}$ (faire un dessin : l'aire mesurée par l'intégrale est comprise entre deux rectangles dont les aires respectives donnent l'inégalité).

3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) < S_n$. Quelle est la limite de la suite S_n ?

Exercice 3
Établir les équivalents (de suites) suivants :

$$\sin\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}; \qquad 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}; \qquad \cos\left(\frac{2 + n^2\pi}{2n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2};$$
$$\tan\left(\frac{2}{n^2}\right) \sim \frac{2}{n^2}; \qquad \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \sim \frac{2}{n}; \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \sim 1 + \frac{\alpha}{n} \text{ (où } \alpha \in \mathbb{R})$$

Exercice 4
1. Décomposer en éléments simples la fonction rationelle $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ (c'est à dire trouver les réels a, b tels que $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$).
2. On pose $S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)}$. Calculer une expression simple de S_m en fonction de m.
3. La suite S_m converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

Séries numériques

Exercice 5
Étudier la nature des séries de termes généraux :

- $\frac{1+n^2}{n!}$; • $\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)$; • $\ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;
- $\frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)}$; • $\frac{n!}{n^n}$; • $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

Rappel : $(\frac{n}{n+1})^n = e^{n\ln(\frac{n}{n+1})}$ (pour a réel et $x > 0$, x^a est défini par $x^a := \exp(a\ln(x))$)

Exercice 6

Etudier, en fonction de z, les séries $\sum \frac{z^n}{\ln(n)}$ puis $\sum z^n \tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 7

On pose $v_n = \frac{1}{n}$, $w_n = (-1)^n v_n$ et $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $u_n > 0$ ("dessiner" l'intégrale de 1 à n de $1/x$).
2. Prouver que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Soient $S_N = \sum_{n=1}^{N} v_n$ et $T_N = \sum_{n=1}^{N} w_n$ les sommes partielles des séries de terme général v_n et w_n. Montrer que $S_{2k} + T_{2k} = S_k$.
5. En faisant intervenir $\ln(k)$ et $\ln(2k)$, prouver que (T_{2k}) converge, et trouver sa limite.
6. Montrer que la série de terme général w_n converge. Calculer sa somme.

Exercice 8

1) Montrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente (mais pas absolument convergente).

2) Quand n tend vers l'infini, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ sont équivalents (pourquoi ?). Les séries associées sont-elles de même nature ?

Exercice 9

On considère la série $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$, où $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Déterminer un équivalent de u_n et montrer que $[u_n]$ converge puis déterminer sa somme.

Exercice 10

Soit, pour $n \geq 1$, la suite définie par $u_n = \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

1. Montrer que la série $[u_n]$ converge.
2. On pose $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$. Montrer que $R_N \leq \frac{25}{24} u_{N+1}$.
3. En déduire une estimation de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ à 10^{-3} près.

Exercice 11

1. Majorer le reste à l'ordre m de la série de terme général $\frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}$. On pourra reconnaitre la série bien connue $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ et se souvenir de la formule de Taylor-Lagrange.
2. Majorer le reste à l'ordre m de la série de terme général $\left(\frac{1}{16}\right)^n$, puis celui de la série de terme général $n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}$.
3. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ est convergente, et calculer sa somme à 10^{-2} près.