MATHÉMATIQUES III

# TD 4 : Suites et Séries de Fonctions.

## Suites de Fonctions

### Exercice 1

[vrai-faux] Soit $(f_n)$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction $f$ sur un intervalle $I$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si les $f_n$ sont croissantes, alors $f$ aussi.
2. Si les $f_n$ sont strictement croissantes, alors $f$ aussi.
3. Si les $f_n$ sont périodiques, alors $f$ aussi.
4. Si les $f_n$ sont continues en $a$, alors $f$ aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

### Exercice 2

Soit $f_n$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \dfrac{1+n^2x}{1+n^2x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.

1. Donner l'expression de $f_0$, $f_1$, $f_2$.
2. Montrer que la suite converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner sa limite $f$ et esquisser son allure graphique.
3. La convergence est-elle uniforme ?

### Exercice 3

Soit $f_n$ la suite de fonctions définie sur $I = [0,1]$ par $f_n(x) = \begin{cases} n\,(1-n\,x)\,x & \text{si} \quad x \in \ [0, \frac{1}{n}\,] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \,]\frac{1}{n}, 1\,] \end{cases}$

1. Esquisser les graphes de $f_1$ et $f_2$.
2. Montrer que $(f_n)$ converge vers une fonction $f$ que l'on donnera.
3. Déterminer $||f_n||_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$. La convergence est-elle uniforme ?

### Exercice 4

Soit $f_n$ la suite de fonctions définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$.

1. Déterminer sa limite $f$ pour la convergence simple.
2. On pose $g_n = f_n - f$. Déterminer ou majorer $\sup\limits_{x\in I} |g_n(x)|$. La convergence est-elle uniforme ?

### Exercice 5

Soit $f_n$ la suite de fonctions définie sur $I = [0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{n\mathrm{e}^{-x}+x^2}{n+x}$.

1. Montrer que $(f_n)$ converge (simplement) vers une fonction $f$ que l'on donnera.
2. Montrer que $|-x\left(-x+\mathrm{e}^{-x}\right)| \leq 1$ pour $x \in I$.
3. En déduire que $(f_n)$ est uniformément convergente.
4. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{n\mathrm{e}^{-x}+x^2}{n+x}dx$. Déterminer la limite de $u_n$.

### Exercice 6

Soit $f_n$ la suite de fonctions définie sur $I = [0, 1]$ par $f_n(x) = n\ \sin(\frac{x}{n})$.

1. Etudier la convergence simple de $f_n$.
2. Etudier la convergence uniforme de $f'_n$.
3. Que déduire de ces deux questions ?

## Séries de Fonctions

### Exercice 7

Soit $f_n$ la suite de fonctions définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{\cos(n\ x)}{n^2}$. Etudier la convergence simple, uniforme, normale de la série $\displaystyle\sum_n f_n(x)$.

### Exercice 8

Soit $f_n$ la suite de fonctions définie sur $I = [0, 1]$ par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = -\dfrac{x^n}{n}\ln(x)$ pour $x > 0$.

1. Montrer que la série géométrique $[x^n]$ converge uniformément sur $[-a, a]$ (pour $a \in [0, 1[$). En déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(1 - x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
2. Montrer que $f_n$ est continue et majorée par $\dfrac{1}{n^2 e}$.
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n f_n(x)$ converge normalement sur $I$.
4. Calculer sa somme $S(x)$.

### Exercice 9

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $A > 0$. Montrer que, pour $n$ assez grand, $u_n$ est croissante sur $[0, A]$. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformémement sur $[0, A]$.
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, puis qu'elle converge normalement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.

### Exercice 10

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1 + x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$ ?