MATHÉMATIQUES III

TD 6 : Séries de Fourier.

Exercice 1

1) Pour chaque fonction ci-dessous : tracer son graphe, calculer son développement en série de Fourier et préciser si la somme de la série est égale à la fonction correspondante.

a) $f(x) = x^2$ pour $x \in [0, \pi]$, f paire et de période 2π ;
b) $g(x) = x$ pour $x \in]-\pi, \pi[$ et de période 2π ;
c) $h(x) = x$ pour $x \in]-1, 1[$ et de période 2 ;

2) Calculer les sommes des séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

Exercice 2

Soit $a > 0$. Soient g et h deux fonctions périodiques de période 2π définies par :
$g(x) = e^{ax}$, pour $x \in [0, \pi]$ et g paire.
$h(x) = e^{ax}$, pour $x \in]0, \pi]$ et h impaire.

1) Esquisser le graphe de g, calculer sa série de Fourier et montrer que sa somme coïncide avec g.

2) En déduire la série de Fourier de h. Quelle valeur faut-il donner à $h(k\pi)$ pour que h soit la somme de cette série ?

Exercice 3

Soit f une fonction périodique de période $2a$, définie par $f(x) = e^x$ dans $]-a, a[$, $a > 0$, $f(a) = b$.

1) Tracer le graphe de f dans $]-3a, 3a[$.

2) Calculer la série de Fourier de f.

3) Etudier la convergence de la série de Fourier vers f.Comment choisir b pour qu'il y ait convergence simple pour tout x ?

4) Quelle est la somme des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Exercice 4

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1 + \cos x}{4 - 2\cos x}.$$

1) On pose $X = e^{ix}$. Ecrire f sous la forme d'une fraction rationnelle.

2) Décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples.

3) En déduire la série de Fourier de f.

Exercice 5

1) Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période π égale à

$$f(x) = |\sin x|.$$

2) Utiliser 1. pour résoudre l'équation différentielle $y'' + y = |\sin x|$.