Constantes et polynômes de Darboux en algèbre différentielle : application aux systèmes différentiels linéaires.

Jacques-Arthur Weil

Plan de l'exposé

I. Constantes et polynômes de Darboux

Polynômes de Darboux des champs de vecteurs non-autonomes. Chapitre I.4,6

Polynômes de Darboux et solutions d'équations différentielles quasi-linéaires. Chapitre I.1,2,4 ; ISSAC'94

Remarques de calcul. Chapitre I.3,4,5

II. Application aux systèmes différentiels linéaires

Intégrales premières : caractérisation et calcul à degré donné. Chapitre II.1-5 ; AAECC'11

Systèmes à deux variables : degré et variation sur Kovačic Chapitre III, J.S.C avec F. Ulmer

Systèmes à trois variables : constructeurs de Darboux et solutions liouvilliennes. Chapitre II.6

Systèmes à n variables : décider l'existence ou non d'intégrales premières. Chapitre II.7

La méthode de Darboux

Darboux : $P(x,y)y' = Q(x,y)$, $D = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$.

Trouver $F \in C[x,y]$ tq $DF = \alpha F$ avec $\alpha \in C[x,y]$.

- F Darboux ssi ses facteurs irréd. sont Darboux
- F Darboux et $F(x,y) = 0 \to P(x,y)y' = Q(x,y)$.
- IP rationelle $\Leftrightarrow$ suffisament de Darboux.
- Darboux irréductibles de degré borné (*théoriquement*).

$$\left\{\begin{array}{rcl} Y_1' & = & Q_1(Y_1,\ldots,Y_n) \\ & \vdots & \\ Y_n' & = & Q_n(Y_1,\ldots,Y_n) \end{array}\right. \quad \text{où } Q_i \in k[Y_1,\ldots,Y_n]$$

$$D = \partial_k + \sum_i Q_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

<u>Définition</u> : $F \in k[y_1,\ldots,y_n]$ *polynôme de Darboux* s'il existe $\alpha \in k[y_1,\ldots,y_n]$ tel que $DF = \alpha F$

Champs de vecteurs, E.D.O quasi-linéaires ?
lien avec les solutions ?
calcul (*degré* des Darboux irréductibles) ?

Trois résultats généraux

$$D = \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad (i.e\ k = C).$$

<u>Proposition 25</u> (JAW, p. 29) :
Soit $d = \max(\deg(Q_i))$. La dérivation D admet $\binom{n+d-1}{n} + n$ polynômes de Darboux premiers entre eux si et seulement si D admet une intégrale première rationelle.

<u>Mais</u> degré NON borné contre-exemple page 67.

$$P = s(y, \ldots, y^{(n-1)})y^{(n)} + t(y, \ldots, y^{(n-1)}), \qquad k \text{ différentiel}$$

<u>Théorème 17</u> (JAW, p.22) :
si F Darboux d'ordre $n-1$, alors : $F(y) = 0$ non singulier $\Rightarrow P(y) = 0$.
Si $P(y) = 0$ et $\mathrm{ord}(y) = n-1$, alors le polynôme minimal de F est de Darboux.

D'autres propriétés utiles

Proposition 15 (Moulin Ollagnier & JAW, p. 21) :
$K \supset k$ extension algébrique finie de k. Alors, D_K admet un Darboux non-trivial dans $K[y_1, \ldots, y_n]$ ssi D admet un Darboux non-trivial dans $k[y_1, \ldots, y_n]$.

Lemme 13 :
D une dérivation de $k[y_1, \ldots, y_n]$, homogène de degré p. Si $DF = \alpha F$ alors α est homogène de degré p et toutes les composantes homogènes F_i de F vérifient aussi $DF_i = \alpha F_i$.

En particulier, si D est homogène de degré 0, alors $\alpha \in k$.

Écrire une dérivation comme somme d'homogènes/isobares: donne C.N. d'existence ($D = D_{min} + \ldots + D_{max}$).

Collins-Christopher : soit $D = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ homogène et $W = xQ - yP$. W est Darboux et tout Darboux irréductible divise W.

$\rightarrow$ stratégie pour $n = 2$.

II. Systèmes différentiels linéaires

$$(A): \qquad Y' = AY \qquad \text{avec } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathcal{M}_n(k)$$

Espace V de solutions.

Extension de Picard-Vessiot K.

$\to$ Groupe de Galois différentiel G.

Même groupe pour une classe de systèmes.

$G \hookrightarrow GL_n(C)$: envoie solution sur solution.

Décrit les relations différentielles entre les solutions.

Constructions sur $V \leftrightarrow$ Constructions sur A.

Polynômes de Darboux : $DM = \alpha M$

- $\alpha \in k$ et M homogène.
- $k_1 \supset k$ liouvillienne :

$$\exists\,\text{Darboux pour } D_{k_1} \Longleftrightarrow \exists\,\text{Darboux pour } D_k$$

Darboux et semi-invariants

Proposition 33 (JAW, p. 38) :
Polynômes de Darboux, vecteur v de coefficients

$$DM = -\frac{f'}{f}M \Longleftrightarrow \begin{cases} (fv)' = (S^m(A)^*)(fv) \\ v \in k^n, \frac{f'}{f} \in k \end{cases}$$

Si $f = 1$, intégrale première polynomiale.

Déf : Semi-invariants d'une représentation :
$P \in C[X_1, \ldots, X_n]$ t.q. $\forall g \in G, g(P) = \chi_g P$.
C'est à dire $\frac{P(y_1,\ldots,y_n)'}{P(y_1,\ldots,y_n)} \in k$

Théorème 38 (JAW, p. 41) :

$$\{\text{Darboux}\} \simeq \{\text{Semi-invariants de } G^*\}$$

$$\{\text{I.P. polynomiales}\} \simeq \{\text{Invariants de } G^*\}$$

Proposition 39 (JAW, p. 42) :
Si G réductif, alors :
$\mathrm{Inv}(G) \simeq \mathrm{Inv}(G^*)$ et $\text{Semi-Inv}(G) \simeq \text{Semi-Inv}(G^*)$.

Le problème du degré est un problème de théorie de la représentation.

Algorithme de calcul des Darboux

$$z = \Lambda^t Y \rightarrow \begin{cases} Z = PY \\ L(z) = 0 \end{cases}$$

Pour un degré m donné :

1. Calculer $S^m(A)^*$ (rapide)
2. Choisir un vecteur Λ.
   (a) Si Λ est cyclique :
   calculer une équation L_m,
   calculer ses solutions rationelles/exponentielles,
   en déduire I.P, Darboux.
   (b) Si Λ n'est pas cyclique: chance!
   Construire système plus petit sur $\ker P$,
   et réappliquer l'étape 2.

Algorithme implanté en MAPLE

II.2 Équations du second ordre

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \longleftrightarrow Ri(u) = u' + a_0 + a_1 u + u^2 = 0$$

Sol. liouvillienne de $L \Leftrightarrow$ sol. algébrique de Ri

Pb : trouver $P = u^m + b_{m-1}u^{m-1} + \cdots + b_0 = 0$

Ingrédients de Kovačic:

1. Classifier les sous-groupes de $SL_2(C)$
2. b_{m-1} est une solution exponentielle de $L^{Ⓢ m}$
3. Récurence pour les coefficients de P.

Idées pour améliorer Kovačic :

1. Solutions rationelles : plus rapide que les exponentielles, pas d'extensions des constantes.
2. Décrire *toutes* les solutions.
3. Kovačic écrit pour $y'' - ry$, $r \in C(x)$, généraliser.

Deux résultats utiles

$$P(u) = u^m + b_{m-1}u^{m-1} + \ldots + b_0$$

$$P(u) = 0 \text{ et } Ri(u) = 0 \Longleftrightarrow P \text{ est Darboux pour } Ri$$

$$(\sharp)_m \ : \qquad \begin{cases} b_m = 1 \\ b_{i-1} = \dfrac{-b_i' + b_{m-1}b_i + a_1(i-m)b_i + a_0(i+1)b_{i+1}}{m-i+1}, \quad m-1 \geq i \geq 0 \\ b_{-1} = 0 \end{cases}$$

Théorème 73 (Ulmer & JAW, p. 82) :
Tous les zéros de $P(u)$ sont des solutions de $Ri(u) = 0$ ssi $b_{m-1} = -f'/f$ et $L^{ⓢ m}(f) = 0$ (f semi-invariant de $G \subseteq GL_2(C)$).

Lemme 68 (Ulmer & JAW, p. 79) :
$G \subset SL_2(C)$ fini, Z centre de G. Le nombre de polynômes minimaux irréductibles de degré $m < [G : Z]$ est égal à $2/m$ fois le nombre de sous-groupes cycliques maximaux d'indice m. Tous les autres sont de degré $[G : Z]$.

Classifications, décompositions de caractères.

Les sous-groupes de $SL_2(C)$

1. Groupe diagonal (réductible et réductif) : $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$
2. Groupe non réductif : $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$
3. Groupe imprimitif :
   (a) Diédral $D_n^{SL_2}$ d'ordre $4n$:
   $$\begin{pmatrix} e^{\frac{\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\pi i}{n}} \end{pmatrix} \text{et} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
   (b) Diédral infini :
   $$D_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{où } a \in C^*$$
4. Groupe primitif fini :
   (a) Tétraédral $A_4^{SL_2}$;
   (b) Octaédral $S_4^{SL_2}$;
   (c) Icosaédral $A_5^{SL_2}$.
5. Le groupe $SL(2, C)$.

L'algorithme

(1). $L^{ⓢ 2}$ a une solution rationelle
$\Rightarrow$ réductible. Rationalité

(2). L a une solution exponentielle *unique*
$\Leftrightarrow$ réductible non-réductif.

(3). $L^{ⓢ 4}$ a une solution rationelle $\Leftrightarrow$ imprimitif.

- Quaternions : $L^{ⓢ 4}$ a deux solutions rationelles, polynômes minimaux de degré 2 ou 4. Rationalité
- Autres : $L^{ⓢ 4}$ a une solution rationelle, P est le carré d'un polynôme de degré 2 irréductible.

(4). $L^{ⓢ m}$ a une solution rationelle pour

- $m = 6$: tétraédral Rationalité
- $m = 8$: octaédral
- $m = 12$: icosaédral

le polynôme correspondant est *toujours* irréductible.

(5). $SL_2(C)$: pas de solutions liouvilliennes.

Implanté en Maple.
Plus rapide que Kovačic pour les cas "difficiles".
Application : résolution de Riccati par radicaux.

II.3 Calculs d'invariants par les Darboux

En théorie des invariants (Fuchs, Drach, ...) :
Hessien H, Hessien bordé HB, et Jacobien J

Proposition 46 (JAW, p. 51) :
$D(M_i) = \alpha_i M_i$ (pour $i = 1, \ldots, n$) polynômes de Darboux de degré m_i pour $Y' = AY$.

$$\begin{aligned} D(H(M_i)) &= (n\alpha_i - 2Tr(A))\, H(M_i) \\ D(HB(M_i, M_j)) &= (2\alpha_j + (n-1)\alpha_i - 2Tr(A))\, HB(M_i, M_j) \\ D(J(M_1, \ldots, M_n)) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - Tr(A)\right) J(M_1, \ldots, M_n) \end{aligned}$$

Théorème 48 (JAW, p. 54) :
$L(y) = 0$ d'ordre n, $Y' = AY$ le système associé. Soit $y_{1,1}, \ldots, y_{1,n}$ un système fondamental de solutions de L. Si M est une intégrale première polynomiale de degré m pour (A^*), alors le coefficient de y_1^m dans M est un polynôme homogène de degré m en les $y_{1,j}$ (solution de $L^{\circledS m}(y) = 0$).

Accélération de l'algorithme de Singer-Ulmer

Équation de Hurwitz ($G = G_{168}$) :

$$L(y) = y''' + \frac{7\,x-4}{x\,(x-1)}y'' + \frac{72/7\,x^2 - \frac{2963}{252}\,x + 20/9}{x^2\,(x-1)^2}y' + \frac{\frac{792}{343}\,x - \frac{40805}{24696}}{x^2\,(x-1)^2}y = 0$$

$I_6 = H(I_4), \qquad I_{14} = HB(I_4, I_6), \qquad I_{21} = J(I_4, I_6, I_{14}).$

Difficulté : calcul des invariants ($L^{ⓢ 14}$ impossible)

État actuel : conditions nécessaires sur singularités.

Idée: Résoudre un seul système différentiel.

$$f = x^4(x-1)^3$$

On calcule I.P M_4 de degré 4 pour $A^* \longleftrightarrow I_4 = 0$.

Alors $M_6 = f^2.H(M_4) \longrightarrow I_6 = \frac{1}{x^4(x-1)^3}$.

Puis $M_{14} = f^2.HB(M_4, M_6) \longrightarrow I_{14} = \frac{1}{x^9(x-1)^7}$.

Et enfin $M_{21} = f.J(M_4, M_6, M_{14}) \longrightarrow I_{21} = \frac{1}{x^{14}(x-1)^{10}}$.

Remarque : on n'a pas besoin de tous les termes de M_4

Pour l'ordre 3, on reprend la classification de Singer-Ulmer.

Degré des I.P. de systèmes irréductibles

Décider l'existence (ou non) d'intégrales premières.

Première idée : bornes générales (invariants).

Deuxième idée : décision autrement. Ingrédient clé :

Lemme 53 (Brownawell, Beukers, Heckmann)
$G \subset SL_n(C)$ irréductible, V espace de solutions de $Y' = AY$. S'il existe m t.q $S^m(V)$ réductible, alors : Soit $G/Z(G)$ est fini ; solution liouvillienne
Soit $S^2(V)$ est réductible.

Décision pour $n = 2, 3$, solutions liouvilliennes, groupes spécifiques, n premier …

MAIS

il y a des "groupes" qui n'ont pas d'invariants
$\longrightarrow$ classifications.

Systèmes réductibles

Cas réductif : $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$

$\longrightarrow$ Critères.

Cas non-réductif : $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ B_1 & A_2 & 0 \\ B_2 & B_3 & \ddots \end{pmatrix}.$

$\longrightarrow$ Plus compliqué

$14^{\text{ième}}$ problème de Hilbert

En conclusion

Méthode intéressante quand le groupe de Galois est de dimension “petite” (ex : fini) ou “grande” (ex : $SO_n(C)$, $PSL_2(C)$).

Étape vers le théorème de Chevalley, quelles autres constructions utiliser ?

Questions algorithmiques:

Solutions rationelles de systèmes sans convertir ?

Calculs “efficaces” d'invariants ?

Systèmes à paramètres ?