

UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE

THÈSE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : **Mathématiques**

**Analyse de Quelques Problèmes Elliptiques et Paraboliques non
Linéaires Dégénérés : Existence, Unicité, Limites Singulières et
Comportement Asymptotique.**

Noureddine IGBIDA

Soutenue le 9 Décembre 2005

Après avis des rapporteurs :

Thierry GALLOUET
Olivier GOUBET
Michel PIERRE
Juna Luis VAZQUEZ

Devant le jury composé de :

Mark ASCH
Thierry GALLOUET
Olivier GOUBET
José MAZON
Michel PIERRE
Petra WITTBOLD

**Analyse de Quelques Problèmes Elliptiques et Paraboliques non
Linéaires Dégénérés : Existence, Unicité, Limites Singulières
et Comportement Asymptotique**

Noureddine IGBIDA

LAMFA, CNRS-UMR 6140
UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE
33 RUE SAINT LEU, 80038 AMIENS.

INSSET DE ST QUENTIN,
48 RUE RASPAIL 02100 SAINT-QUENTIN

EMAIL : NOUREDDINE.IGBIDA@U-PICARDIE.FR

Table des matières

Chapitre 0. Introduction.	7
1. Opérateurs.	8
2. Bonnes solutions.	9
3. Problème de Stefan.	11
4. Problème de Hele-Shaw.	13
5. Espaces fonctionnels.	13
6. Notations.	14
7. Lemmes techniques.	15
Chapitre 1. Limites singulières de problèmes d'évolution.	17
1. Introduction.	17
2. Limite singulière et projection.	19
3. Résultat abstrait et applications.	23
4. Limite singulière de l'EMP et Hele-Shaw.	26
5. Limite singulière de l'EMP et loi de conservation.	28
6. Equation de diffusion rapide.	28
7. Limite singulière localisée.	30
8. Travaux en cours et perspectives.	33
Chapitre 2. Problèmes d'évolution avec des conditions au bord dynamiques.	35
1. Introduction.	35
2. Unicité.	39
3. Problème sans contraintes.	41
4. Non linéarité de type Hele-Shaw.	41
5. Problème sans contraintes sur les domaines.	44
6. Problème avec contraintes sur les domaines.	45
7. Solution Entropique.	46
Chapitre 3. Unicité de solutions pour des problèmes de diffusion-convection non linéaires .	49
1. Introduction.	49
2. Conditions au bord homogènes.	51
3. Condition au bord non homogène.	55
Chapitre 4. Comportement asymptotique pour des problèmes paraboliques dégénérés.	57
1. Introduction.	57
2. Résultats de stabilisation.	58
3. Quelques interprétations pour le problème de Stefan.	62
4. Remarques sur l'asymptotique du problème de Stefan et la limite singulière de l'EMP.	62
Chapitre 5. Autre travaux	65
1. Explosion pour les solutions d'un système de réaction-diffusion.	65
2. Solution auto-similaire pour une équation de type Barenblatt	65
Chapitre 6. Liste des travaux	67

CHAPITRE 0

Introduction.

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse d'habilitation concernent l'analyse appliquée des EDPs¹ non linéaires. Ils s'articulent principalement autour de 4 thèmes de recherche :

- (1) Limites singulières de problèmes d'évolution.
- (2) Problèmes d'évolution avec des conditions au bord dynamiques.
- (3) Unicité de solutions pour des problèmes de diffusion-convection non linéaires.
- (4) Comportement asymptotique pour des problèmes de type Stefan.

Les liens entre ces quatre thématiques sont des EDPs non linéaires paraboliques ou elliptiques ou hyperbolique-paraboliques ou elliptique-paraboliques. Les différences entre elles sont les questions qui sont spécifiques à chaque modèle. Je note qu'il y a un fort lien entre la première thématique et la dernière, qui sera expliqué dans la dernière section de Chapitre 4. Quant à la deuxième thématique et la troisième, je me pose les mêmes questions, qui sont l'existence et l'unicité de solutions ; cependant vu la différence des questions sous-jacentes, j'ai choisi de présenter les deux problèmes séparément.

Je regroupe de manière très synthétique tous mes travaux de recherche (y compris ceux de ma thèse de Doctorat). Chaque chapitre représente une thématique, où je présente les questions que je me pose et les résultats obtenus ; puis viennent mes travaux en cours et mes perspectives dans la thématique concernée. Ce mémoire est formé principalement de cinq chapitres, représentant chacun une des thématiques énumérées ci dessus. Dans la prochaine section, je rappelle quelques résultats classiques de la théorie des semi-groupes non linéaires (voir [17], [26], [44] et [53] pour les preuves). Je donne quelques lemmes techniques plus ou moins connus qui nous ont servis pour montrer des résultats présentés, le lemme d'intégration par parties et un lemme dû à Carillo dans [39] très utile pour montrer l'unicité de solution faible. Je rappelle aussi deux exemples de modèles typiques qui nous ont servis de base d'interprétation de quelques résultats ; le modèle de Stefan et le modèle de Hele-Shaw.

Dans le chapitre 1, je traite les limites singulières des problèmes d'évolution non linéaire. Sujet que j'ai débuté dans ma thèse (sous la direction de Philippe Bénilan), et sur lequel j'ai poursuivi une partie de mes activités de recherche. Je pense ici à l'étude des limites singulières localisés, l'étude de la relation entre limite singulière et projection et aussi quelques phénomènes de compétition en limite singulière. J'étudie la question du point de vue théorique, c-à-d du point de vue semigroupe non linéaire, et du point de vue analyse appliquée des edps. Bien qu'une grande partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de l'équation des milieux poreux lorsque $m \rightarrow \infty$, je note que les applications des résultats abstraits et l'étendue des techniques permettrait de traiter beaucoup d'autres problèmes d'évolutions tels les systèmes de réaction diffusion par exemple.

Dans le chapitre 2, j'étudie l'existence et l'unicité de solutions pour des problèmes elliptique-paraboliques avec des conditions au bord dynamiques. Bien que ce type de conditions au bord n'est pas suffisamment considéré dans la littérature mathématique, il est très naturel dans beaucoup de modèles physiques. L'exemple typique est l'équation de la chaleur (non linéaire) avec une chaleur spécifique non nulle sur le bord (voir l'exemple de modélisation dans l'introduction du Chapitre 2). D'autre part, lors de la discrétisation du problème par un schéma Euler implicite en temps, on obtient un problème elliptique non linéaire avec des conditions au bord non linéaires et non homogènes. Il existe une littérature assez vaste sur le cas homogène mais le cas non homogène n'est pas assez bien exploré et fait intervenir des propriétés mathématiques assez intéressantes.

¹équations aux dérivées partielles.

Notons par exemple le phénomène de non existence de solution faible pour le problème

$$\begin{cases} u - \Delta w = f, & u \in \gamma(w) & \text{dans } \Omega \\ \partial_\eta w = g & & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

lorsque $f \leq 0$, $g \leq 0$ et γ est le graphe maximal monotone donné par $\gamma(r) = 0$ si $r > 0$ et $\gamma(0) = (-\infty, 0]$. Remarquons que la condition de compatibilité sur les moyennes de f et g est bien vérifiée ici.

Dans le chapitre 3, je discute la question d'unicité de solutions pour des problèmes de diffusion convection non linéaires en fonction de certaines conditions de structure et des hypothèses de régularité de la convection et du domaine. Je discuterai aussi les limites de la notion de solution intégrale pour répondre à cette question et je montre comment elle laisse le champ à la technique de doublement et dédoublement de variables.

Le chapitre 4 est réservé aux questions de comportement asymptotique pour des problèmes paraboliques dégénérés (en particulier les problèmes introduits dans les chapitres précédents). Je m'intéresse à la stabilisation dans $L^1(\Omega)$ des solutions et je discute les questions d'identification de l'état stationnaire exacte (lorsqu'il y en a plusieurs) sur laquelle une solution se stabilise en fonction de la donnée initiale.

Enfin, dans le chapitre 5, je présente deux problèmes isolés que j'ai étudiés. Le premier concerne l'explosion en temps fini des solutions d'un système de réaction diffusion, et le deuxième concerne l'existence de solutions auto-similaires pour une équation de type Barenblatt non linéaire.

1. Opérateurs.

Soit $(X, |\cdot|)$ un espace de Banach muni du crochet

$$[x, y] = \inf_{\lambda > 0} \frac{|x + \lambda y| - |x|}{\lambda}, \quad \forall x, y \in X$$

et $A : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ un opérateur de domaine $\mathcal{D}(A) := \{x \in X; Ax \neq \emptyset\}$. On identifie A à son graphe et on dit que $(x, y) \in A$ si et seulement si $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y \in Ax$. On note $\tilde{\Gamma}(A)$ (domaine généralisé) l'ensemble défini par

$$\tilde{\Gamma}(A) = \{x \in X; |x|_A < \infty\}$$

où $|x|_A = \liminf_{r \downarrow 0} \{|\hat{y}|; \hat{y} \in A\hat{x}, |x - \hat{x}| < r\}$ pour tout $x \in X$.

• On dit que A est accréatif dans X s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

- i) pour tout $\lambda > 0$, la résolvante $\mathcal{J}_\lambda^A := (I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction de $\mathcal{D}(\mathcal{J}_\lambda^A) = R(I + \lambda A)$ vers $\mathcal{D}(A)$;
- ii) pour tout $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A$, on a $[x - \hat{x}, y - \hat{y}] \geq 0$.

Si, de plus, X est réticulé, on définit $[\cdot, \cdot]^+$ par

$$[\cdot, \cdot]^+ = \inf_{\lambda > 0} \frac{|(x + \lambda y)^+| - |x^+|}{\lambda}$$

où $x^+ = \max(0, x)$ pour tout $x \in X$.

• On dit que A est T-accréatif dans X s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

- i) pour tout $\lambda > 0$, $y, \hat{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{J}_\lambda^A)$, on a $|(\mathcal{J}_\lambda^A y - \mathcal{J}_\lambda^A \hat{y})^+| \leq |(y - \hat{y})^+|$;
- ii) pour tout $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A$, on a $[x - \hat{x}, y - \hat{y}]_+ \geq 0$.

• A est dit m-accréatif (resp. m-T-accréatif) sur X si A est accréatif (resp. T-accréatif) et $R(I + \lambda A) = X, \forall \lambda > 0$.

• Pour tout $m = 1, 2, \dots, \infty$, soit A_m un opérateur accréatif sur X . On dit que $(x, y) \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ s'il existe $(x_n, y_n) \in A_n$ tel que $(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$.

THÉORÈME 1.1. *Si, pour tout $m = 1, 2, \dots, \infty$, A_m est un*

opérateur m-accréatif sur X et D un sous espace dense dans X , alors les propriétés suivantes sont équivalentes (cf. [26]) :

$$(i) \quad A_\infty \subseteq \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

$$(ii) \quad A_\infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (I + \lambda A_n)^{-1} x = (I + \lambda A_\infty)^{-1} x, \quad \forall x \in D \text{ et } \lambda > 0.$$

THÉORÈME 1.2. *Si A est un opérateur m -accrétif sur un Banach X et $B : X \rightarrow X$ est continu accrétif sur X , alors $A + B$ est m -accrétif sur X (cf. [26]).*

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert et $X = L1(\Omega)$.

• Pour tout $u, v \in L1(\Omega)$, on a

$$(1.1) \quad [u, v] = \int v \operatorname{sign}_0(u) + \int_{[u=0]} |v|,$$

$$(1.2) \quad [u, v]^+ = \int_{[u>0]} v + \int_{[u=0]} v^+$$

où $\operatorname{sign}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sign}_0(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r = 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

de plus, tout opérateur T-accrétif est accrétif.

• Pour tout $u, v \in L1(\Omega)$, on note $u \ll v$ si et seulement si

$$\int j(u) \leq \int j(v) \quad \text{pour tout } j : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty] \text{ convexe, s.c.i. et } j(0) = 0.$$

• Un opérateur A défini sur $L1(\Omega)$ est dit complètement accrétif s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes (cf. [24]) :

$$(1.3) \quad u - \hat{u} \ll u - \hat{u} + \lambda(v - \hat{v}), \quad \forall (u, v), (\hat{u}, \hat{v}) \in A \text{ et } \lambda > 0 ;$$

$$(1.4) \quad \int_{[u-\hat{u}>k]} (v - \hat{v}) \geq 0, \quad \forall (u, v), (\hat{u}, \hat{v}) \in A \text{ et } k > 0 ;$$

$$(1.5) \quad \int_{\Omega} (v - \hat{v}) p(u - \hat{u}) \geq 0, \quad \forall (u, v), (\hat{u}, \hat{v}) \in A \text{ et } p \in P_0$$

où $P_0 := \{p \in C^1(\mathbb{R}) ; p(0) = 0 \text{ et } 0 \leq p' \leq 1\}$.

• Un opérateur complètement accrétif est accrétif pour toutes les normes L^p avec $1 \leq p \leq \infty$.

2. Bonnes solutions.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \quad \frac{du}{dt} + Au \ni f \quad \text{sur } [0, T)$$

où A est un opérateur accrétif sur X , $T > 0$ et $f \in L1(0, T; X)$. On utilise la théorie des semi-groupes non-linéaires pour étudier (P), où on considère la discrétisation par le schéma implicite par rapport à t ,

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} \frac{u_\varepsilon^i - u_\varepsilon^{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Au_\varepsilon^i \ni f_\varepsilon^i \\ u_\varepsilon^i \in \lceil(A), \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

où $\varepsilon > 0$ et $(t_0, t_1, \dots, t_n : f_\varepsilon^1, \dots, f_\varepsilon^n)$ est une discrétisation telle que

$$(D_\varepsilon) \quad \begin{cases} 0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T, & t_i - t_{i-1} < \varepsilon, & T - t_n \leq \varepsilon \\ |t_0| \leq \varepsilon, & f_\varepsilon^1, \dots, f_\varepsilon^n \in X \text{ et } \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t) - f_\varepsilon^i| dt < \varepsilon. \end{cases}$$

• On appelle bonne solution de (P) toute application $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ et $(t_0, t_1, \dots, t_n : f_\varepsilon^1, \dots, f_\varepsilon^n)$ vérifiant (D_ε) ; et pour lesquels (P_ε) détermine $(u_\varepsilon^1, \dots, u_\varepsilon^n)$ telles que $|u(t) - u_\varepsilon^i| < \varepsilon$ pour tout $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1 \dots n$.

THÉORÈME 2.3. *Si $f \equiv 0$, $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ et $R(I + \lambda A) \supseteq \overline{\mathcal{D}(A)}$ pour tout $\lambda > 0$, alors (cf. [26]) (P) admet une unique bonne solution $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$ telle que $u(0) = u_0$ et on a*

$$\begin{aligned} u(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (I + \frac{t}{n}A)^{-n} u_0 \\ &= : e^{-tA} u_0, \end{aligned}$$

ainsi $(e^{-tA})_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de contraction continu défini sur $\overline{\mathcal{D}(A)}$ et engendré par $-A$.

THÉORÈME 2.4. *Si A est m -accréatif sur X et $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, alors le problème (P) admet une unique bonne solution $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$ telle que $u(0) = u_0$ (cf. [26]).*

THÉORÈME 2.5. *Si A est un opérateur accréatif sur X , $f, \hat{f} \in L1(0, T; X)$ et u, \hat{u} sont les bonnes solutions respectives de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ et $\frac{d\hat{u}}{dt} + A\hat{u} \ni \hat{f}$, alors (cf. [26])*

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} |u(t) - \hat{u}(t)| \leq [u(t) - \hat{u}(t), f(t) - \hat{f}(t)] \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T)$$

et si de plus, X est réticulé et A est T -accréatif alors (cf. [17])

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt} |(u(t) - \hat{u}(t))^+| \leq [u(t) - \hat{u}(t), f(t) - \hat{f}(t)]^+ \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T).$$

THÉORÈME 2.6. *Pour tout $m = 1, 2, \dots, \infty$, soient A_m un opérateur m -accréatif sur X , $u_{0m} \in \overline{\mathcal{D}(A_m)}$, $f_m \in L1(0, T; X)$ et u_m la bonne solution de*

$$\begin{cases} \frac{du_m}{dt} + A_m u_m \ni f_m \text{ sur } (0, T) \\ u_m(0) = u_{0m}. \end{cases}$$

Si, lorsque $m \rightarrow \infty$, on a

$$(i) \quad (I + A_m)^{-1} x \rightarrow (I + A_\infty)^{-1} x \quad \text{dans } X, \quad \forall x \in X,$$

$$(ii) \quad u_{0m} \rightarrow u_{0\infty} \quad \text{dans } X,$$

et

$$(iii) \quad f_m \rightarrow f_\infty \quad \text{dans } L1(0, T; X),$$

alors (cf. [26])

$$u_m \rightarrow u_\infty \quad \text{dans } \mathcal{C}([0, T]; X), \text{ lorsque } m \rightarrow \infty.$$

THÉORÈME 2.7. *Pour tout $m = 1, 2, \dots, \infty$, soient A_m un opérateur accréatif sur X , $u_{0m} \in \overline{\mathcal{D}(A_m)}$ et u_m la bonne solution de*

$$(i) \quad \begin{cases} \frac{du_m}{dt} + A_m u_m \ni 0 \text{ sur } (0, T) \\ u_m(0) = u_0. \end{cases}$$

Si,

$$(ii) \quad A_\infty \subseteq \liminf_{m \rightarrow \infty} A_m$$

et

$$(iii) \quad u_{0m} \rightarrow u_{0\infty} \quad \text{dans } X, \text{ lorsque } m \rightarrow \infty,$$

alors (cf. [26])

$$u_m \rightarrow u_\infty \quad \text{dans } \mathcal{C}([0, T]; X), \text{ lorsque } m \rightarrow \infty.$$

3. Problème de Stefan.

Le problème de Stefan est un problème à frontière libre qui décrit l'évolution d'un système impliquant un changement de phase solide-liquide. Il apparaît dans des modèles de diffusion dans des milieux poreux saturés, et on en rencontre aussi une classe importante dans de nombreux procédés industriels thermiques : la coulée continue, le soudage, la purification des métaux ou l'usinage par faisceaux laser. Ces phénomènes sont fondés principalement sur la fusion et la solidification. Ici on donne une brève description du modèle dans le cas avec convection.

Soit un milieu poreux occupant un domaine borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limité par une surface Γ et divisé par une surface inconnue Φ , qui le sépare en deux ensembles Ω_s et Ω_l , correspondant respectivement à une région solide et une région liquide. Notons par $Q = (0, T) \times \Omega$, pour $T > 0$ et sa frontière latérale par $\Sigma = (0, T) \times \Gamma$. L'équation de conservation d'énergie pour les milieux poreux s'écrit

$$\partial_t e + v \cdot \nabla e + \nabla \cdot q = 0$$

où, on a normalisé la densité $\rho \equiv 1$ et on a noté par q le flux d'énergie, e est l'énergie interne et v le champ de vitesse. Une version généralisée de la loi de Fourier classique est prise comme loi constitutive entre la température et le flux de chaleur et est donnée par

$$q = -|\nabla \theta|^{p-2} \nabla \theta, \quad \text{avec } p > 1.$$

Ceci implique qu'on peut écrire pour la zone liquide et solide respectivement comme

$$Q_s = \{(t, x) \in Q; \theta(t, x) < 0\}, \quad Q_l = \{(t, x) \in Q; \theta(t, x) > 0\}$$

et la surface inconnue devient l'ensemble de niveau de la température du mélange ; c-à-d

$$\Phi = \{(t, x) \in Q; \theta(t, x) = 0\}.$$

La relation constitutive entre l'énergie interne et la température tient compte du saut qui arrive au niveau de l'interface Φ , et on suppose que

$$e(\theta) = d(\theta) + lh(\theta),$$

où d est une fonction continue donnée et strictement croissante, $l = \left[e \right]_-^+ > 0$ est la chaleur latente pour la transition de phase, où on note par $\left[\cdot \right]_-^+$ le saut à travers Φ , et h la fonction d'Heaviside ($h(s) = 0$ si $s < 0$ et $h(s) = 1$ si $s > 0$). Sans perte de généralité, on peut supposer que $d(0) = 0$.

Ainsi, la conservation d'énergie avec les deux lois constitutives, implique l'équation de diffusion convection pour le p-Laplacien $\Delta_p u = \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-1} \nabla u)$:

$$(3.8) \quad \partial_t d(\theta) + v \cdot \nabla d(\theta) = \Delta_p \theta \quad \text{dans } Q \setminus \Phi = \{\theta < 0\} \cup \{\theta > 0\}.$$

Sur la frontière libre, en plus de la condition $\theta = 0$, on a la condition de Stefan qui correspond à une loi d'équilibre du flux de chaleur

$$(3.9) \quad \left[q \right]_{-}^{+} \cdot n = \left[-|\nabla u|^{p-1} \nabla u \right]_{-}^{+} \cdot n = l(v-w) \cdot n \quad \text{sur } \Phi = \{\theta = 0\},$$

où n est vecteur unitaire normal à Φ , qui pointe du solide vers le liquide, et w est la vitesse de la frontière libre.

On suppose que le champ de vitesse v satisfait, dans la zone liquide, l'équation de continuité et la loi de Darcy ; c-à-d

$$(3.10) \quad \left. \begin{array}{l} \nabla \cdot v = 0 \\ v = -\nabla \pi + b(\theta) \end{array} \right\} \quad \text{dans } \{\theta > 0\},$$

où π est le potentiel hydraulique et $b = b(\theta)$ une force qui peut être non linéaire en θ . Dans la zone solide, on a

$$(3.11) \quad v = 0 \quad \text{dans } \{\theta < 0\},$$

et la condition sur le bord de l'interface est

$$(3.12) \quad v \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\{\theta > 0\}.$$

On remarque que le potentiel hydraulique résout le problème de Neumann

$$(3.13) \quad \Delta \pi = \nabla \cdot b(\theta) \quad \text{dans } \{\theta > 0\}, \quad \frac{\partial \pi}{\partial n} = b(\theta) \cdot n \quad \text{sur } \partial\{\theta > 0\}$$

sur le domaine $\{\theta > 0\}$ à priori inconnu.

On considère H le graphe d'Heaviside, c-à-d

$$H(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0 \\ [0, 1] & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

et définissons l'enthalpie par

$$(3.14) \quad \eta \in \gamma(\theta) = d(\theta) + lH(\theta).$$

En intégrant formellement par parties l'équation (3.8) avec une fonction test régulière, telle que $\xi(T) \equiv 0$ et $\xi = 0$ sur Σ , en supposant que Φ est régulière et en tenant compte du saut de γ en 0 et la condition au bord, en particulier (3.9) et (3.11), on obtient

$$-\iint_Q \eta \partial \xi - \iint_Q d(\theta) v \cdot \nabla \xi - \iint_Q |\nabla \theta|^{p-2} \nabla \theta \cdot \nabla \xi = \int_{\Omega} u_0 \xi(0),$$

où la condition initiale u_0 porte sur l'enthalpie et est telle que $u_0 \in \gamma(\theta_0)$ (cette condition donne plus d'information que celle donnée par w_0).

Pour la vitesse on prend le problème de Neumann (3.13) sur tout le domaine Ω au lieu de $\{\theta > 0\}$ et on définit v à posteriori par l'expression

$$v = \left[-\Delta \pi + b(\theta) \right] \chi_{\{\theta \geq 0\}}$$

où on note par χ_A la fonction caractéristique de A . Ceci étant consistant avec (3.10) et (3.12) et fondé sur le simple fait suivant

$$d(\theta) v = d^+(\theta) \left[-\nabla \pi + b(\theta) \right] = d(\theta) \left[-\nabla \pi + b(\theta) \right] \chi_{\{\theta \geq 0\}}.$$

Par conséquent le modèle de Stefan avec convection et des conditions au bord Dirichlet est donné par

$$\begin{cases} \partial_t \eta - \Delta_p \theta + v \cdot \nabla d(\theta) = 0, & \eta \in \gamma(\theta) & \text{dans } Q \\ \theta = \theta_D & \text{sur } \Sigma \\ \eta(0) = \eta_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où γ est le graphe maximale monotone donné par (3.14).

4. Problème de Hele-Shaw.

C'est un problème à frontière libre qui décrit l'évolution d'un liquide visqueux dans un domaine sous l'effet d'injection ou de succion du liquide sur le bord. Il apparaît quand un écoulement incompressible lent se déplace entre deux plaques légèrement séparées. Plus précisément, notons Ω une région laminaire constituée entre deux plaques parallèles très proches l'une de l'autre et Γ sa frontière ($\Gamma = \partial\Omega$). Dans certaines expériences pratiques (simulation dans des milieux poreux, industrie d'injection de plastique etc...), le fluide est injecté dans Ω et/ou aspiré de Ω par la frontière Γ , de sorte que la région variable $\Omega(t)$ occupée par le liquide à chaque instant $t > 0$ avance par l'injection de fluide ou recule par l'aspiration du fluide à travers Γ . La pression $w = w(t, x)$ du fluide satisfait

$$(4.15) \quad \Delta w(t, x) = 0 \quad \text{pour } t > 0 \text{ et } x \in \Omega(t).$$

Si on note par $[S(t, x) = 0]$ la frontière de $\Omega(t)$, c.-à-d. la surface de séparation entre $\Omega(t)$ et $\omega \setminus \Omega(t)$, alors l'écoulement de Hele-Shaw est décrit par

$$(4.16) \quad w = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t S = \nabla w \cdot \nabla S \quad \text{sur } [S = 0].$$

En d'autres termes, ceci signifie que la pression est constante sur la frontière libre et est égale à la pression atmosphérique (supposée égale à 0 sans perte de généralité) et la vitesse v_n de la frontière libre le long de la normale extérieure n est donnée par $v_n = -\nabla w \cdot n$. Ainsi, la formulation classique du problème de Hele-Shaw est

$$\left| \begin{array}{l} \text{Etant donnée } S_0, \text{ trouver } S(t, x), w(t, x), \text{ telle que } S(0) = S_0 \\ \Delta w = 0 \text{ sur } (t, \Omega(t)), t > 0 \\ w = 0 \text{ et } \partial_t S = \nabla w \cdot \nabla S \text{ sur } [S = 0] \\ \text{condition (au bord) sur } w \text{ pour } t > 0 \text{ et } x \in \Gamma. \end{array} \right.$$

L'équation de (w, S) peut être reformulée de telle sorte à minimiser les hypothèses de régularité sur w et S . Pour ceci, on peut utiliser les mêmes arguments que pour le problème de Stefan : on introduit la fonction u , appelée fonction de phase, qui représente $u(t) = \chi_{\Omega(t)}$. On intègre formellement par parties l'équation (4.15) avec une fonction test ξ régulière, telle que $\xi(T) \equiv 0$ et $\xi = 0$ sur Σ , en supposant que S est régulière et en tenant compte du saut de u en 0 et la condition au bord, en particulier (4.16), on montre que (u, w) vérifie l'équation

$$(4.17) \quad u_t = \Delta w \quad \text{dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega) \quad \text{et} \quad u \in H(w),$$

où H est la graphe d'Heaviside défini par

$$H(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ [0, 1] & \text{si } r = 0 \\ 1 & \text{si } r > 0. \end{cases}$$

Ainsi la formulation faible du problème du Hele-Shaw est

$$\left| \begin{array}{l} \partial_t u - \Delta w = f(t, x), \quad u \in H(w) \quad \text{dans } Q_T = (0, T) \times \Omega \\ \text{condition au bord pour } w \quad \text{sur } \Sigma_T = (0, T) \times \Gamma \\ \text{donnée initiale pour } u \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

où la fonction f représente un terme source ou de réaction.

5. Espaces fonctionnels.

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert et $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$ désignant respectivement, l'espace de Lebesgue et l'espace de Sobolev habituels. Pour tout $k > 0$, T_k désigne l'application définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , par

$$T_k(s) = \begin{cases} s & \text{si } |s| \leq k \\ k \operatorname{sign}_0(s) & \text{si } |s| > k. \end{cases}$$

Pour toute fonction $u = u(x)$ définie p.p. $x \in \Omega$, on note $T_k u$ la fonction définie p.p. $x \in \Omega$ par $T_k u(x) = T_k(u(x))$.

- Pour tout $1 \leq p < \infty$, on note $T_{loc}^{1,p}(\Omega)$ et $T_0^{1,p}(\Omega)$ les espaces fonctionnels suivants :

$$T_{loc}^{1,p}(\Omega) \text{ (resp. } T^{1,p}(\Omega)) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } T_k u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega) \right. \\ \left. \text{(resp. } W^{1,p}(\Omega)), \forall k > 0 \right\}$$

et

$$T_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in T^{1,p}(\Omega) ; \forall k > 0, \exists \Phi_n \in C_0^\infty(\Omega), \nabla \Phi_n \rightarrow \nabla T_k u \text{ dans } L^p(\Omega) \right. \\ \left. \text{et } \Phi_n \rightarrow T_k u \text{ dans } L_{loc}^1(\Omega), \text{ lorsque } n \rightarrow \infty \right\}.$$

On constate que $W_{loc}^{1,p}(\Omega) \subseteq T_{loc}^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq T_0^{1,p}(\Omega)$ et $T_{loc}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) = W_{loc}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

- On sait que si $u \in W^{1,1}(\Omega)$ alors $\nabla T_k u = \mathbb{I}_{[|u|<k]} \nabla u$ où \mathbb{I}_B est la fonction caractéristique de $B \subseteq \Omega$. Il est aussi possible de donner un sens à la dérivée ∇u d'une fonction $u \in T_{loc}^{1,1}$, généralisant le concept de dérivée faible dans $W_{loc}^{1,1}$ et ceci grâce au Lemme suivant (cf. [21]).

LEMME 5.1. (cf. [21]) *Pour tout $u \in T_{loc}^{1,1}$, il existe une unique $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $\nabla T_k u = v \mathbb{I}_{[|v|<k]}$ p.p. Ω , $\forall k > 0$. Si en plus, $u \in W_{loc}^{1,1}$ alors $v = \nabla u$ au sens faible.*

Comme dans [8], on note par $\mathcal{T}_{tr}^{1,p}(\Omega)$ l'ensemble des u dans $T^{1,p}(\Omega)$ satisfaisant les conditions suivantes, il existe une suite u_n dans $W^{1,p}(\Omega)$ telle que

- u_n converge vers u p.p. dans Ω ,
- $DT_k(u_n)$ converge vers $DT_k(u)$ dans $L^1(\Omega)$ pour tout $k > 0$,
- il existe une fonction mesurable v sur $\partial\Omega$, telle que u_n converge vers v p.p. dans $\partial\Omega$.

La fonction v est la trace de u au sens généralisé introduit dans [8]. Dans la suite, la trace de $u \in \mathcal{T}_{tr}^{1,p}(\Omega)$ sur $\partial\Omega$ est notée par $tr(u)$ ou u . Rappelons que dans le cas où $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $tr(u)$ coïncide avec u , au sens classique, et l'espace $\mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ est égal à $\text{Ker}(tr)$. De plus, pour tout $u \in \mathcal{T}_{tr}^{1,p}(\Omega)$ et tout $k > 0$, $\tau(T_k(u)) = T_k(tr(u))$, et si $\phi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, alors $u - \phi \in \mathcal{T}_{tr}^{1,p}(\Omega)$ et $tr(u - \phi) = tr(u) - \tau(\phi)$.

6. Notations.

- Si φ est un graphe maximal monotone, on note par φ_0 sa section minimale

$$\varphi_0(r) = \text{l'élément de plus petite valeur absolue de } \varphi(r).$$

- Pour tout $\varepsilon > 0$, $H_\varepsilon(r) = \inf(1, r^+/\varepsilon)$, pour tout $r \in \mathbb{R}$.
- EMP est l'abréviation pour équation des milieux poreux.
- Sign_0^+ est donné par

$$\text{Sign}_0^+(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ 1 & \text{si } r > 0, \end{cases}$$

désigne la section minimale du graphe Sign^+ donné par

$$\text{Sign}^+(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ [0, 1] & \text{si } r = 0 \\ 1 & \text{si } r > 0. \end{cases}$$

- Sign_0 est donné par

$$\text{Sign}_0(r) = \begin{cases} -1 & \text{si } r < 0 \\ 0 & \text{si } r = 0 \\ 1 & \text{si } r > 0, \end{cases}$$

désigne la section minimale du graphe Sign donné par

$$\text{Sign}(r) = \begin{cases} -1 & \text{si } r < 0 \\ [-1, 1] & \text{si } r = 0 \\ 1 & \text{si } r > 0. \end{cases}$$

- $\text{Sign}_0^-(r) = \text{Sign}_0^+(-r)$, pour tout $r \in \mathbb{R}$.
- Pour tout graphe maximal monotone β donné dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on note j_β^* la transformation de Legendre-Fenchel tel que $\beta = \partial j_\beta^*$; c-à-d $j_\beta^* : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ convexe, semi-continue inférieurement et telle que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$b \in \beta(a) \Leftrightarrow j_\beta^*(a) \geq j_\beta^*(r) + b(a - r) \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}.$$

7. Lemmes techniques.

Soient Ω un ouvert borné et $1 < p < \infty$. On note par (\cdot, \cdot) le produit de dualité entre $(W^{1,p}(\Omega))'$ et $W^{1,p}(\Omega)$.

LEMME 7.2. Lemme d'intégration par parties : Soient $z \in C([0, T; L^1(\Omega)])$, $w \in C([0, T; L^1(\partial\Omega)])$ et $F \in L^p(0, T; (W^{1,p}(\Omega))')$, telles que

$$(7.18) \quad \int_0^T \int_\Omega z(t) \psi_t + \int_0^T \int_{\partial\Omega} w(t) \psi_t = \int_0^T (F(t), \psi(t)) dt,$$

pour tout $\psi \in W^{1,1}(0, T; W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \cap L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$, $\psi(0) = \psi(T) = 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \left(\int_0^{z(t)} H(\cdot, (\gamma^{-1})_0(s)) ds \right) \psi_t + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^{w(t)} H(\cdot, (\beta^{-1})_0(s)) ds \right) \psi_t \\ = \int_0^T (F(t), H(\cdot, u(t)) \psi(t)) dt, \end{aligned}$$

pour tout $u \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$, $z \in \gamma(u)$ p.p. dans Q_T , $w \in \beta(u)$ p.p. dans S_T , pour tout $\psi \in \mathcal{D}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ et $H : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de Caratheodory telle que $H(x, r)$ croissante en r , $H(\cdot, u) \psi \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$, $\int_0^z H(x, (\gamma^{-1})_0(s)) ds \in L^1(Q_T)$ et $\int_0^w H(x, (\beta^{-1})_0(s)) ds \in L^1(S_T)$.

La preuve de ce lemme est analogue à celle donnée dans [42] (voir aussi [1] et [39]) pour les fonctions $H1_0(\Omega)$. La preuve complète pour ce cas est donnée dans [Ig21].

LEMME 7.3. [39] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné avec des bords Lipchitz $\partial\Omega$. Soit $u \in L^\infty(\Omega)$, $e \in \mathbb{R}^p$, $F \in (L^2(\Omega))^p$ et soit G_1 et $G_2 \in L^1(\Omega)$. On pose

$$H = \begin{cases} \text{soit } H1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \\ \text{soit } H1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

S'il existe $m < M$ telle que

$$\int_\Omega \left((u - M)^+ e \cdot \nabla \xi + F \cdot \nabla \xi + G_1 \xi \right) dx \leq 0,$$

et

$$\int_\Omega \left((u - m)^+ e \cdot \nabla \xi + F \cdot \nabla \xi + G_2 \xi \right) dx \leq 0,$$

pour tout $\xi \in H$, alors

$$\int_\Omega \left((u - s)^+ e \cdot \nabla \xi + F \cdot \nabla \xi + (G_1(1 - h(u - s)) + G_2 h(u - s)) \xi \right) dx \leq 0,$$

pour tout $s \in [m, M]$ et tout $\xi \in H$ avec $h(u - s)$ un élément de $\text{Sign}^+(u - s)$.

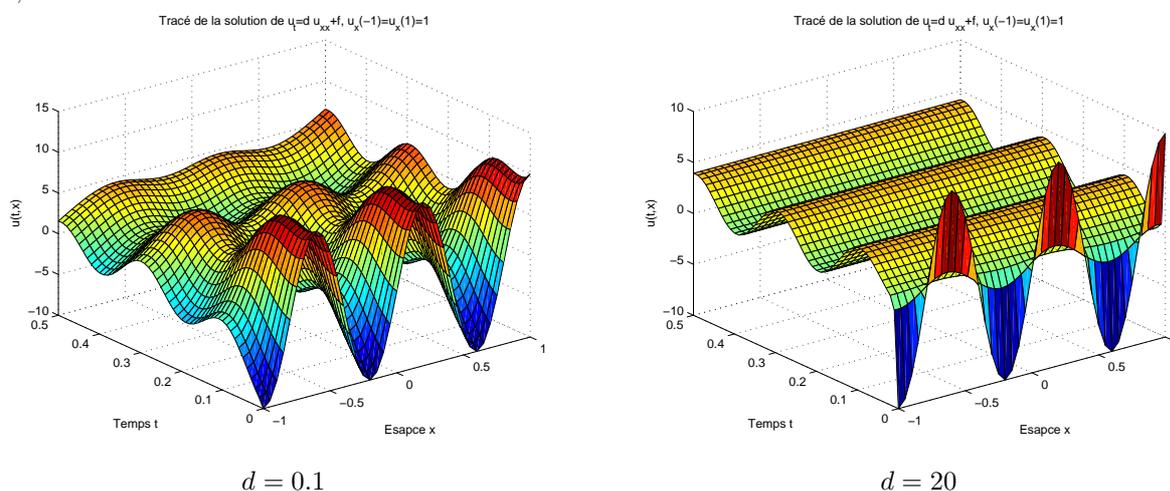
Limites singulières de problèmes d'évolution.

1. Introduction.

L'évolution et le comportement de certains problèmes physiques (et/ou mécaniques) sont décrits par l'étude de perturbations d'EDPs. En effet, les équations modèles décrivant ces problèmes dépendent de paramètres physiques qui peuvent varier, et en fonction desquels il faut étudier le comportement asymptotiques. Pour une grande classe de problèmes, cette variation peut être assez importante pour donner lieu à un problème limite de nature complètement différente : on dit qu'on a une *perturbation singulière* ou *limite singulière*. Afin de simplifier la description de ce phénomène, on considère l'exemple¹ suivant :

$$(1.1) \quad \begin{cases} u_t - (d u)_{xx} = f & \text{sur } Q_T := (0, T) \times (a, b) \\ u_x(a) = u_x(b) = 1 & \text{sur } (0, T) \\ u(0) = u_0 & \text{sur } (a, b). \end{cases}$$

Cette équation apparaît dans certains modèles de diffusion de fluide ou de dynamique de population ; elle permet de décrire, en fonction du coefficient de diffusion $d > 0$, l'évolution du paramètre physique² u , pour une réaction f et une valeur initiale u_0 données. En faisant des calculs numériques pour différentes valeurs de d , on retient les deux cas suivants :



où $u_0(x) = 10 \sin(2.5\pi x)$ et $f(t, x) = 8^2 \sin(10\pi t)$ sont fixées. On constate que, contrairement au cas de petites valeurs de d , le cas où d a une grande valeur, la solution de (1.1) devient une fonction constante en espace qui évolue en temps ; de plus il apparaît une couche limite³ au voisinage de $t = 0$, décrivant un changement instantané de profil. L'étude théorique de la perturbation de (1.1) en fonction de d , montre

¹c'est un exemple classique de limite singulière, les résultats qu'on présente sont bien connus dans certains cas, par exemple $f \equiv 0$. Pour le cas présenté ici les preuves constituent un cas particulier de [Ig3].

²par exemple la température dans le cas de l'équation de la chaleur ou bien la densité dans le cas d'écoulement d'un fluide ou de dynamique de populations.

³la couche au voisinage de $t = 0$ qui représente un saut.

que, lorsque $d \rightarrow \infty$, la limite d'une solution de (1.1) est bien une fonction constante en espace vérifiant l'équation :

$$(1.2) \quad u_t = \bar{f} \quad \text{sur } (0, T).$$

où $\bar{f}(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t, x) dx + \frac{2}{b-a}$. De ce fait, la couche limite au voisinage de $t = 0$ provient de l'incompatibilité de la condition initiale de (1.1) avec celle de (1.2). En effet, alors que l'équation limite (1.2) est une EDO⁴ dont les données initiales admissibles sont des constantes, dans le calcul numérique on force la solution à vérifier la condition initiale de (1.1). Ce type de phénomène de couche limite est très fréquent dans les études de perturbation singulière, il provient principalement d'une rupture avec les données fixes qui sont incompatibles avec le problème limite (du fait qu'il est de nature complètement différente). En général, suite au réarrangement du problème lors du passage à la limite il faut aussi réarranger les données fixes. Pour (1.1), on montre que la limite de u est la solution de (1.2) qui vérifie

$$u(0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u_0(x) dx.$$

Mes travaux de recherche dans cette thématique concernent l'étude de quelques exemples d'EDPs non linéaires présentant ces phénomènes de perturbations singulières. Ils portent sur deux aspects :

– théorique : montrer des résultats généraux pour les problèmes d'évolution nonlinéaires abstraits associés.

En particulier, l'étude du réarrangement des données fixes, telles que les données initiales, pour s'adapter au problème limite.

– analyse appliquée : décrire (de plus près) les EDPs et les solutions du problème limite.

Les EDPs concernées par cette thématique représentent différents cas de l'équation dite des milieux poreux qui est :

$$(1.3) \quad u_t = \nabla \cdot \left(d |\nabla u^m|^{p-2} \nabla u^m + F(x, u) \right) + \tau g(t, x, u) + f \quad \text{sur } Q_T := (0, T) \times \Omega,$$

où Ω est un ouvert borné, $m > 0$, $1 < p < \infty$, $d \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, $d > 0$, $\tau \in \mathcal{C}(\Omega)$, $\tau \geq 0$ et $r^m = |r|^{m-1}r$, pour tout $r \in \mathbb{R}$. Cette équation est assujettie à des conditions au bord qui sont soit Dirichlet⁵ soit Neumann⁶. Les limites singulières auxquelles je m'intéresse sont fondées sur l'étude du comportement de la solution en fonction d'importantes variations des paramètres m , d et τ . Plus précisément,

– $m \rightarrow \infty$: diffusion très lente.

– $d \rightarrow \infty$: diffusion très large.

– $m \rightarrow 0$: diffusion très rapide.

– $\tau \rightarrow 0$: réaction très large.

On s'intéresse aussi au cas où la singularité de la limite est localisée dans une sous-région du domaine. Concrètement, cette situation apparaît dans des modèles où le processus de diffusion diffère fortement d'une région à une autre. Elle se rencontre dans la physique des matériaux composites, dynamique de populations et beaucoup d'autres situations. En rapport avec les questions posées au paragraphe précédent, cette localisation de singularité fait que le passage à la limite exhibe une redistribution locale (en espace) de l'inhomogénéité de la solution. Ceci rend plus ou moins difficile la modélisation d'échange de données entre les régions où la limite est régulière et celles où elle est singulière.

⁴équation différentielle ordinaire.

⁵ $u = 0$ sur $(0, T) \times \partial\Omega$.

⁶ $(d |\nabla u^m|^{p-2} \nabla u^m + F(x, u)) \cdot \eta = g$ sur $(0, T) \times \partial\Omega$, où η est la normale extérieure à la frontière de Ω et g est une fonction donnée.

2. Limite singulière et projection.

On considère un cas très simplifié de l'équation (1), soit le problème d'évolution :

$$(P_m) \quad \begin{cases} u_t = \Delta |u|^{m-1}u & \text{dans } Q := (0, \infty) \times \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma := (0, \infty) \times \Gamma \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N pas nécessairement borné, $m \geq 1$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$. Il est bien connu que (P_m) admet une unique solution forte u , i.e. $u \in \mathcal{C}([0, \infty); L^1(\Omega)) \cap L^\infty((\delta, \infty) \times \Omega) \cap W^{1,1}(\delta, \infty; L^1(\Omega))$, $u^m \in L^2(\delta, \infty; H_0^1(\Omega))$, pour tout $\delta > 0$, $\partial_t u = \Delta u^m$ dans $\mathcal{D}'(Q)$ et $u(0) = u_0$ p.p. dans Ω . Notons u_m cette solution. On s'intéresse à la limite de u_m , lorsque $m \rightarrow \infty$. Si $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, on sait que (voir [23] et [27])

$$u_m \rightarrow u_0 \quad \text{dans } \mathcal{C}([0, \infty), L^1(\Omega)).$$

Mais, si $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} > 1$, alors on peut montrer que u_m est relativement compacte dans $\mathcal{C}((0, \infty), L^1(\Omega))$, mais pas dans $\mathcal{C}([0, \infty), L^1(\Omega))$, une couche limite apparaît en $t = 0$ lors du passage à la limite : la limite est singulière. En effet, puisque la non linéarité $\varphi_m(r) = r^m$ dans l'équation (P_m) converge au sens des graphes vers le graphe maximal monotone φ_∞ donné par

$$\varphi_\infty(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ \pm[0, \infty) & \text{si } r = \pm 1, \end{cases}$$

alors, l'équation limite est

$$u_t = \Delta w, \quad w \in \varphi_\infty(u) \quad \text{dans } Q$$

pour laquelle u satisfait $|u| \leq 1$ et les données initiales compatibles doivent rester dans $[-1, 1]$.

Notre but consiste à décrire la limite de u_m , lorsque $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} > 1$. Ce type de question est motivé par des intérêts physiques puisque pour m assez large, par exemple $m = 3$ elle apparaît en propagation d'un film liquide sous la pesanteur [74] et dans la fabrication des semi-conducteurs [69], et pour $m \in (5.5, 6.5)$, dans les problèmes de radiation dans gaz ionisés [98]. Elle présente aussi des intérêts mathématiques puisque c'est un cas particulier de l'étude de perturbation singulière de semi groupe non linéaire (voir [19] and [Ig13]). En effet, soit X un espace de Banach et A_n une suite d'opérateurs m-accretifs dans X telle que $\overline{\mathcal{D}(A_n)} = X$ et, lorsque $n \rightarrow \infty$, $A_n \rightarrow A$ au sens de la résolvante, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} \neq X$. Pour tout $u_0 \in X$, le problème de Cauchy

$$(2.4) \quad u_t + A_n u \ni 0 \quad \text{dans } (0, \infty), \quad u(0) = u_0$$

admet une unique bonne solution u_n , donnée par la formule exponentielle de Crandall-Liggett

$$u_n(t) = L^1 - \lim_{k \rightarrow \infty} (I + \frac{t}{k} A_n)^{-k} u_0 \quad =: e^{-tA_n} u_0.$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, on sait que (voir [36]) si $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, alors $u_n \rightarrow u$ in $\mathcal{C}([0, \infty), X)$ et u est la bonne solution de

$$(2.5) \quad u_t + Au \ni 0 \quad \text{dans } (0, \infty), \quad u(0) = u_0.$$

Mais, si $u_0 \in X \setminus \overline{\mathcal{D}(A)}$, alors (2.5) n'est pas bien posé et la limite de u_n peut ne pas exister. Par exemple, si $X = \mathbb{C}$ et $A_k = \exp(ik) A_k$ converge vers l'opérateur de graphe $\{(0, z) ; z \in \mathbb{C}\}$ et $e^{-tk} u_0$, n'a pas de limite si $u_0 \neq 0$. Cependant pour une grande classe de problèmes, cette limite existe et on a besoin de la caractériser. Dans ce cas, la conjecture est qu'il existe $\underline{u}_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, telle que u est une solution de

$$u_t + Au \ni 0 \quad \text{dans } (0, \infty), \quad u(0) = \underline{u}_0,$$

mais la caractérisation de \underline{u}_0 n'est pas encore claire en général.

Revenons au problème (P_m) : $X = L^1(\Omega)$ et la famille d'opérateurs A_m est donnée par

$$(2.6) \quad A_m u = -\Delta u^m \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

avec

$$\mathcal{D}(A_m) = \left\{ z \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) ; z^m \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \Delta z^m \in L^1(\Omega) \right\}.$$

Lorsque $m \rightarrow \infty$, on montre que A_m converge vers A_∞ l'opérateur multivoque donné par

$$(2.7) \quad z \in A_\infty v \Leftrightarrow \begin{cases} v, z \in L^1(\Omega), \exists w \in H_0^1(\Omega), v \in \text{Sign}(w) \text{ p.p. sur } \Omega \\ \text{et } \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \xi = \int_\Omega z \xi, \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \end{cases}$$

avec $\overline{\mathcal{D}(A_\infty)} = \{u \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) ; \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1\}$. Il est bien connu que la bonne solution u_m est l'unique solution forte de l'EDP (P_m) et que u_m converge dans $L^1(\Omega)$. Dans le cas où $u_0 \geq 0$, la caractérisation de \underline{u}_0 est complètement résolue. On a

THÉORÈME 2.1. *Si $u_0 \in L^1(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ et u_m la solution de (P_m) , alors*

$$u_m \rightarrow \underline{u}_0 \quad \text{dans } \mathcal{C}((0, \infty), L^1(\Omega)), \text{ lorsque } m \rightarrow \infty,$$

où $\underline{u}_0 = u_0 \chi_{[\underline{w}=0]} + \chi_{[\underline{w}>0]}$ et \underline{w} est l'unique solution du "mesa problem"

$$\underline{w} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \underline{w} \geq 0, 0 \leq \Delta \underline{w} + u_0 \leq 1, \underline{w}(\Delta \underline{w} + u_0 - 1) = 0 \text{ p.p. } \Omega.$$

Ce théorème a été démontré dans un premier temps dans [41] pour les solutions radiales dans \mathbb{R}^N , dans [20] dans le cas général, i.e. Dirichlet ou bien Neumann dans un ouvert quelconque. Nous avons aussi donné dans [Ig15] et [Ig26] une généralisation pour les solutions radiales au cas de Δ_p . D'autre part, on vérifie aisément les résultats suivants.

COROLLAIRE 2.1. *Sous les hypothèses du Théorème précédent*

$$\begin{aligned} \underline{u}_0 &= (I + A_\infty)^{-1} u_0 \\ &= Proj_K^{H^{-1}} u_0, \end{aligned}$$

où $Proj_K^{H^{-1}} u_0$ et la projection de u_0 sur le convexe $K = \{z \in L^\infty(\Omega) ; \|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1\}$, pour la norme de $H^{-1}(\Omega)$ ⁷.

Notons que K est la fermeture dans $L^1(\Omega)$ de $\mathcal{D}(A_\infty)$. Ces résultats ont laissé penser pendant longtemps que les limites singulières des problèmes d'évolutions de type (2.4) sont des solutions de (2.7) avec comme données initiales la "projection" de u_0 sur la fermeture du domaine de l'opérateur limite A_∞ . Rappelons que ceci est vrai lorsque X est un espace de Hilbert et A_m est l'approximation de Yoshida de A_∞ , i.e.

$$A_m = m \left(I - \left(I - \frac{1}{m} A_\infty \right)^{-1} \right)^{-1}. \text{ Mais comme nous allons le voir, ceci est faux en général.}$$

Les preuves du Théorème 2.1 existantes dans la littérature utilisent fortement le fait que $u_m \geq 0$, puisqu'elles sont fondées sur l'effet régularisant (voir [22]) de type

$$-u_t \leq \frac{u}{(m-1)t} \quad \text{p.p. dans } Q,$$

qui n'est vérifiée que pour les solutions positives. Pour le cas où la solution change de signe, on donne, avec une approche complètement différente, une caractérisation de \underline{u}_0 , dans un ouvert quelconque. Cette dernière utilise de manière très simple quelques idées de [55] où les auteurs étudient la limite, lorsque $p \rightarrow \infty$, de la solution de $u_t = \Delta_p u$, et utilise fortement l'homogénéité de l'équation. En effet, on considère le changement de variable suivant

$$v_m(t) = u_m(t^m/m)$$

et la valeur $a = \inf(1, 1/\|u_0\|_\infty)$.

⁷ $H^{-1}(\Omega)$ est le dual de $H_0^1(\Omega)$

Il est clair que v_m est une solution de

$$\begin{cases} v_t = t^{m-1} \Delta v^m & \text{sur } Q \\ v = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

et que la nonlinéarité $\varphi_m^t(r) = t^{m-1}r^m$ converge au sens des graphes vers le graphe maximal monotone :

$$\varphi_\infty^t(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < \frac{1}{t} \\ \pm[0, \infty) & \text{si } r = \pm \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Ainsi, formellement, le problème limite pour v_m est de type

$$(2.8) \quad \begin{cases} \partial_t v = \Delta w, & w \in \varphi_\infty^t(v) & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega \\ w = 0 & & \text{dans } (0, \infty) \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Mais, pour le passage à la limite dans v_m , il donne les résultats suivants

THÉORÈME 2.2. *On suppose que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Lorsque $m \rightarrow \infty$, on a*

$$v_m \rightarrow v \quad \text{dans } \mathcal{C}([0, \infty); L^1(\Omega))$$

où v est donnée par

- i - $v(t) = u_0$ pour tout $t \in [0, a]$.
- ii - Sur $[a, \infty)$, v est l'unique solution du problème (2.8) au sens suivant : $v \in \mathcal{C}([a, \infty); L^1(\Omega))$, $v(a) = u_0$ p.p. dans Ω et il existe $w \in L^2_{loc}(a, \infty; H_0^1(\Omega))$ tel que pour tout $t \geq a$, $w(t) \in \varphi_\infty^t(v(t))$ p.p. Ω et $\partial_t v = \Delta w$ dans $\mathcal{D}'((a, \infty) \times \Omega)$.

Et comme conséquence immédiate, on a

COROLLAIRE 2.2. *Lorsque $m \rightarrow \infty$, on a*

$$u_m(t) \rightarrow v(1) \quad \text{dans } L^1(\Omega), \text{ uniformément pour } t \text{ dans tout compact de } (0, \infty)$$

où v est donnée par Théorème 2.2.

Le Corollaire 2.2 implique que la limite de u_m , lorsque $m \rightarrow \infty$, est indépendante de t , et que si $\|u_0\|_\infty > 1$, la convergence ne s'étend ni vers 0, ni vers ∞ . Ceci signifie que la question se pose quant au comportement asymptotique de $u_m(x, t)$ lorsque $t \rightarrow 0$ ou bien $t \rightarrow \infty$, pour m assez grande. Théorème 2.1, implique qu'avec la nouvelle variable $\tau = t^m/m$, la limite de u_m , dépend de t et le comportement au voisinage de $t = 0$ et $+\infty$ peut être déduit de l'équation (2.8). Ce type de d'étude a été fait par A. Friedman and Sh. Huang [57] (voir aussi [56] and [52]) dans le cas où $u_0 \geq 0$. Dans ces papiers, la nouvelle variable est $\tau = t^m$ suggérée par les Solutions auto similaires de Barenblatt. Les auteurs montrent que la limite avec la nouvelle variable coïncide avec des mesas de hauteur $1/\tau$; i.e. des projections sur des convexes $k(\tau)$, donnée par

$$k(\tau) = \{z \in L^1(\Omega) ; \|z\|_\infty \leq 1/\tau\}.$$

Dans le cas où u_0 change de signe, le comportement est complètement différent. Afin de donner une idée sur le profil de la limite, notons qu'une solution de (2.8) au sens de Théorème 2.2 est aussi une solution forte du problème de Cauchy

$$(2.9) \quad v_t + \partial\Phi^t(v) \ni 0 \quad \text{dans } (a, \infty), \quad v(a) = u_0$$

où, pour tout $t \geq a$, Φ^t est la fonctionnelle définie de $H^{-1}(\Omega)$ vers $[0, \infty]$ donnée par

$$\Phi^t(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1/t, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que $(I + \lambda \partial\Phi^h)^{-1}$ est indépendante de $\lambda > 0$, pour tout $h > 0$, et est égale (voir Théorème 2.2 de [32]) à une projection ; plus précisément , pour chaque $h > 0$ et $\lambda > 0$,

$$(2.10) \quad (I + \lambda \partial\Phi^h)^{-1} = \mathbb{P}_{K(h)},$$

où $\mathbb{P}_{K(h)}$ la projection, par rapport à la norme H^{-1} , sur le convexe $k(h)$. Ainsi, en utilisant la solution ε -approximante de (2.9), on peut voir, au moins formellement que pour tout $t \geq a$,

$$v(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{K(\delta_n^{n,t})} \mathbb{P}_{K(\delta_{n-1}^{n,t})} \dots \mathbb{P}_{K(\delta_1^{n,t})} u_0,$$

où pour tout $t > a$, $n, k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n$, $K(\delta_k^{n,t})$ est donné par

$$\begin{aligned} \delta_k^{n,t} &= \frac{1}{t - (n-k)(t-a)/n} \\ &= \frac{\|u_0\|_\infty}{1 + (t\|u_0\|_\infty - 1)k/n}, \end{aligned}$$

ainsi

$$(2.11) \quad v(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{K(\delta_n^{n,1})} \mathbb{P}_{K(\delta_{n-1}^{n,1})} \dots \mathbb{P}_{K(\delta_1^{n,1})} u_0.$$

Ce qu'il faut retenir est que pour tout $t > 0$ et $n, \in \mathbb{N}$, $(\delta_k^{n,t})^{-1}$ est croissante pour $k = 1, \dots, n$, ce qui implique que $K(\delta_k^{n,t}) \subset K(\delta_{k-1}^{n,t})$, la première projection est une mesa de hauteur $\delta_1^{n,t} = \frac{\|u_0\|_\infty}{1 + (t\|u_0\|_\infty - 1)/n}$ et la dernière est de hauteur $\delta_n^{n,t} = 1/t$. D'autre part, il n'est pas vrai, en général, que

$$(2.12) \quad \mathbb{P}_{K(\delta_k^{n,t})} \mathbb{P}_{K(\delta_{k-1}^{n,t})} z = \mathbb{P}_{K(\delta_k^{n,t})} z.$$

Cependant, en utilisant (2.10), on peut montrer que (2.12) est vrai si $z \geq 0$, ainsi pour $u_0 \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{K(\delta_n^{n,t})} \mathbb{P}_{K(\delta_{n-1}^{n,t})} \dots \mathbb{P}_{K(\delta_1^{n,t})} u_0 &= \mathbb{P}_{K(\delta_n^{n,t})} u_0 \\ &= \mathbb{P}_{K(\delta_n^{n,t})} u_0 \\ &= \mathbb{P}_{K(1/t)} u_0; \end{aligned}$$

ce qui implique, dans ce cas, que $v(t)$ est une mesa de hauteur $1/t$ et que $v(1) = \underline{u}_0$.

Pour montrer le Théorème 2.2, on a besoin dans un premier temps, d'étudier la limite du problème stationnaire associé à (P_m) ; i.e.

$$\begin{cases} u - \Delta u^m = f & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ceci a été fait pour $\Omega = \mathbb{R}^N$ dans [22] et pour Ω borné dans [27]. Dans ma thèse, j'ai traité le cas général $1 < p < \infty$, Ω un ouvert quelconque et les conditions au bord de type Dirichlet; i.e.

$$(2.13) \quad \begin{cases} u_{(m)} - \Delta_p |u_{(m)}|^{m-1} u_{(m)} = f & \text{sur } \Omega, \\ u_{(m)} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il est clair que pour tout $f \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, il existe une solution unique de (2.13) au sens suivant :

$$\begin{cases} u_{(m)} \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad w_{(m)} := |u_{(m)}|^{m-1} u_{(m)} \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \text{et } -\Delta_p w_{(m)} = f - u_{(m)} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

THÉORÈME 2.3. (1) *Lorsque $m \rightarrow \infty$, on a*

$$\begin{aligned} u_{(m)} &\rightarrow u_{(\infty)} & \text{dans } L^1(\Omega), \\ w_{(m)} &\rightarrow w_{(\infty)} & \text{dans } W^{1,p}(\Omega) \end{aligned}$$

et

$$\nabla w_{(m)} \rightarrow \nabla w_{(\infty)} \quad \text{dans } L_{loc}^p(\Omega)$$

de plus, $(u_{(\infty)}, w_{(\infty)})$ est l'unique solution de :

$$(2.14) \quad \begin{cases} u_{(\infty)} \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega), \quad w_{(\infty)} \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_{(\infty)} \in \text{sign}(w_{(\infty)}) \text{ p.p. } \Omega \\ -\Delta_p w_{(\infty)} = f - u_{(\infty)} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

(2) Si $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, alors $u_{(\infty)} = f$ et $\Delta_p w_{(m)} \rightarrow 0$ dans $L^1(\Omega)$.

Dans un premier temps, on utilise la deuxième partie du Théorème 2.3, pour montrer que v_m converge vers u_0 pour tout $t \in [0, \alpha]$. Ensuite en utilisant les résultats de perturbation régulière on montre, à l'aide de la première partie de Théorème 2.3, le reste du Théorème 2.2 .

3. Résultat abstrait et applications.

3.1. Résultat abstrait. Les problèmes de type (1.3) peuvent s'écrire sous la forme :

$$(3.15) \quad \begin{cases} \frac{du_m}{dt} + A_m u_m \ni F(u) & \text{sur } [0, T) \\ u_m(0) = u_0 \end{cases}$$

dans un espace de Banach X , avec $u_0 \in X$, $F : X \rightarrow X$ une fonction continue, A_m une suite d'opérateurs m -accrétifs de domaine $\mathcal{D}(A_m)$ dense dans X , et tels que A_m converge au sens de la résolvante vers un opérateur A_∞ m -accrétif sur X , lorsque $m \rightarrow \infty$. Pour tout $u_0 \in X$, il existe une unique solution u_m de (3.15) (au sens de bonne solution). On s'intéresse à la limite de u_k . Ainsi, si $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, le Théorème de Trotter-Kato-Brezis-Pazy [36] reste vrai, i.e. $u_k \rightarrow u$ dans $\mathcal{C}([0, T], X)$ et u est la solution de

$$(3.16) \quad u_t + Au \ni F(t, u) \quad \text{sur } (0, T)$$

avec $u(0) = u_0$. Mais, si $\overline{\mathcal{D}(A)} \neq X$ et $u_0 \in X \setminus \overline{\mathcal{D}(A)}$, alors de la même manière que pour le cas $F \equiv 0$, la limite de u_k peut ne pas exister et si elle existe elle est singulière. La singularité ainsi créée provient de la limite de l'opérateur A_m , et le but de cette section est de voir l'influence d'un terme de type réaction sur cette limite. Peut être qu'un des résultats les plus importants de ma thèse est le résultat abstrait, et ses applications, qui donne une caractérisation de la limite de la solution u_k du problème d'évolution non homogène en fonction de la limite dans le cas homogène ; i.e. $F \equiv 0$.

THÉORÈME 3.4. Soient A_m une suite d'opérateurs m -accrétifs sur X à domaine dense, $u_0 \in X$ et $F : X \rightarrow X$ continue bornée telle que $F + kI$ est accrétive, où $k \in \mathbb{R}$ et I est l'application identité de X . On note u_m la bonne solution du problème

$$\begin{cases} \frac{du_m}{dt} + A_m u_m \ni F(u_m) & \text{sur } (0, T) \\ u_m(0) = u_0 \end{cases}$$

et on suppose qu'il existe A_∞ , un opérateur m -accrétif sur X , tel que pour tout $x \in X$, on a

$$(I + A_m)^{-1}x \rightarrow (I + A_\infty)^{-1}x \quad \text{dans } X, \text{ lorsque } m \rightarrow \infty.$$

S'il existe $\underline{u}_0 \in \overline{\mathcal{D}(A_\infty)}$ telle que pour $t > 0$, on a

$$e^{-tA_m}u_0 \rightarrow e^{-tA_\infty}\underline{u}_0 \quad \text{dans } X, \text{ lorsque } m \rightarrow \infty,$$

alors $u_m \rightarrow u_\infty$ dans $\mathcal{C}((0, T); X)$, lorsque $m \rightarrow \infty$ et u_∞ est la bonne solution de

$$\begin{cases} \frac{du_\infty}{dt} + A_\infty u_\infty \ni F(u_\infty) & \text{sur } [0, T) \\ u_\infty(0) = \underline{u}_0. \end{cases}$$

Dans [Ig13], nous démontrons le théorème sous des conditions plus générales de dépendance de F en t et m .

3.2. Application 1 : Equation des milieux poreux avec une condition de Dirichlet au bord.

Revenons au problème (1.3) dans le cas où Ω est borné, $d = 1$, $p = 2$ et $F \equiv 0$. On considère

$$(3.17) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u^m + g(u) & \text{sur } Q = [0, T) \times \Omega \\ u^m = 0 & \text{sur } \Sigma = [0, T) \times \partial\Omega \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) & \text{p.p. } \Omega, \end{cases}$$

Pour tout $m \geq 1$, il existe une solution unique du problème (3.17), au sens suivant :

$$\begin{cases} u_m \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L_{loc}^\infty([0, T] \times \overline{\Omega}), & u_m \geq 0, & u_m(0, \cdot) = u_0(\cdot), \\ u_m^m \in L_{loc}^2([0, T]; H_0^1(\Omega)), & \frac{\partial u_m}{\partial t} = \Delta u_m^m + g(u_m) & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

Pour $g \equiv 0$, la solution est donnée par $u_m(t) = e^{-tA_m}u_0$ où A_m est l'opérateur m -accréatif dans $L^1(\Omega)$ défini par $A_m u = L(|u|^{m-1}u)$ et L est l'opérateur Laplacien Dirichlet dans $L^1(\Omega)$ (voir [31]). Lorsque $m \rightarrow \infty$, d'après [27], A_m converge au sens de la résolvante vers A_∞ , l'opérateur multivoque non-linéaire m -accréatif dans $L^1(\Omega)$ défini par

$$A_\infty u = \{Lw ; u \in \text{sign}(w) \text{ p.p. } \Omega\}.$$

On sait que

$$e^{-tA_m}u_0 \rightarrow e^{-tA_\infty}\underline{u}_0 = \underline{u}_0, \quad \text{dans } \mathcal{C}((0, \infty); L^1(\Omega))$$

où \underline{u}_0 est donnée par Théorème 2.1. En appliquant le Théorème 3.4 et en explicitant en terme d'e.d.p. la notion de bonne solution, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 3.5. *Soient Ω un ouvert borné, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant*

$$(3.18) \quad g(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{dg}{dr} \leq K \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$$

où $k \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ tel que la solution de l'o.d.e.

$$M' = g(M), \quad M(0) = \|u_0\|_\infty$$

est définie sur $[0, T]$. Lorsque $m \rightarrow \infty$, on a

$$u_m \rightarrow u_\infty \quad \text{dans } \mathcal{C}((0, T); L^1(\Omega))$$

où u_∞ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} u_t = \Delta w + g(u) & \text{sur } Q = [0, T] \times \Omega \\ u \in \text{sign}(w) & \text{p.p. } Q \\ w = 0 & \text{sur } \Sigma = [0, T] \times \partial\Omega \\ u(0, \cdot) = \underline{u}_0(\cdot) & \text{p.p. } \Omega \end{cases}$$

au sens suivant :

$$\begin{cases} u_\infty \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega)), & u_\infty(0, \cdot) = \underline{u}_0(\cdot), & 0 \leq u_\infty \leq 1 \\ \exists w \in L_{loc}^2([0, T]; H_0^1(\Omega)), & w \geq 0, & w(u - 1) = 0 \\ \frac{\partial u_\infty}{\partial t} = \Delta w + g(\cdot, u_\infty) & \text{dans } \mathcal{D}'(Q). \end{cases}$$

Dans [Ig13], nous démontrons ce théorème sous des conditions plus générales de dépendance de g en (t, x) . La partie principale de la preuve consiste à expliciter en terme d'edp la bonne solution du problème limite; i.e. le problème de Cauchy non homogène avec l'opérateur limite A_∞ . En particulier, si $g(1) \leq 0$, alors $u_\infty(t) \equiv v$ sur Ω pour tout $t \in [0, T]$, où v est la solution de l'o.d.e. suivante :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g(v) & \text{sur } [0, T] \\ v(0) = \underline{u}_0 \end{cases}.$$

Ce dernier résultat a été montré dans [66] dans le cas particulier $g(u) = -u^q$ avec $q > 1$, en re-démontrant toutes les estimations du cas $g \equiv 0$.

3.3. Application 2 : Equation de milieux poreux avec la condition Neuman au bord. Sous les mêmes hypothèses que la section précédente, on considère le cas de conditions au bord de type Neumann, c'est-à-dire :

$$(3.19) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u^m + g(u) & \text{sur } Q = [0, T) \times \Omega, \\ \frac{\partial u^m}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ et g vérifie les hypothèses du Théorème 3.5.

Le problème (3.19) admet une solution unique au sens suivant :

$$(3.20) \quad \begin{cases} u \in C([0, T); L^1(\Omega)) \cap L_{loc}^\infty([0, T) \times \bar{\Omega}), \quad u \geq 0, \quad u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \\ u^m \in L_{loc}^2([0, T); H^1(\Omega)) \text{ et } \iint u \frac{\partial \xi}{\partial t} + \iint g(u)\xi = \iint \nabla u^m \nabla \xi + \\ \int u_0 \xi(0, \cdot) \text{ pour tout } \xi \in C^\infty(\bar{Q}) \text{ avec } \text{supp}(\xi) \subseteq [0, T) \times \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Notons u_m cette solution. Dans le cas où $g \equiv 0$, on sait (voir [20]) que, lorsque $m \rightarrow \infty$, on a

$$u_m \rightarrow \underline{u}_0 \quad \text{dans } C((0, T); L^1(\Omega))$$

avec

$$(3.21) \quad \begin{cases} \underline{u}_0 \equiv \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0 & \text{si } \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0 \geq 1, \\ \underline{u}_0 = u_0 \chi_{[\underline{u}=0]} + \chi_{[\underline{u}>0]} & \text{si } \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0 < 1, \end{cases}$$

où \underline{u} est l'unique solution du problème variationnel

$$\begin{cases} \underline{w} \in H^2(\Omega), \quad \underline{w} \geq 0, \quad 0 \leq \Delta \underline{w} + u_0 \leq 1, \\ \underline{w}(\Delta \underline{w} + u_0 - 1) = 0 \text{ p.p. } \Omega \text{ et } \frac{\partial \underline{w}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

Pour généraliser le résultat au cas d'une perturbation g , et afin d'utiliser le Théorème 3.4, on définit l'opérateur A_m dans $L^1(\Omega)$ par

$$(3.22) \quad v = A_m u \Leftrightarrow \begin{cases} u, v \in L^1(\Omega), \quad |u|^{m-1} u \in W^{1,1}(\Omega), \\ \text{et } \int \nabla |u|^{m-1} u \nabla \xi = \int v \xi, \quad \forall \xi \in W^{1,\infty}(\Omega). \end{cases}$$

D'après [31], l'opérateur A_m est m -accréatif dans $L^1(\Omega)$ et d'après [27], il existe A_∞ opérateur multivoque accréatif dans $L^1(\Omega)$ et qui est défini par

$$v \in A_\infty u \Leftrightarrow \begin{cases} u, v \in L^1(\Omega), \quad \exists w \in W^{1,1}(\Omega), \quad u \in \text{sign}(w) \text{ p.p. } \Omega \\ \int \nabla |u|^{m-1} u \nabla \xi = \int v \xi, \quad \forall \xi \in W^{1,\infty}(\Omega) \end{cases}$$

tel que, pour tout $\lambda > 0$ et $f \in L^1(\Omega)$ vérifiant $\left| \oint f \right| < 1$, on a

$$(I + \lambda A_m)^{-1} f \rightarrow (I + \lambda A_\infty)^{-1} f \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

Cette convergence est insuffisante pour étudier la limite de la solution du problème (3.19) avec g non-identiquement nulle. En effet, le problème d'évolution (3.15) dans $X = L^1(\Omega)$ qui correspond au problème limite de (3.19), c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A_\infty u \ni g(u) & \text{sur } [0, T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

n'a pas de solution pour tout g et ceci même si u_0 est dans le domaine de A_∞ . D'où la nécessité de caractériser la limite m-accréitive dans $L^1(\Omega)$ de A_m . Ainsi, on démontre (voir Corollaire 4.1.) qu'il existe \tilde{A}_∞ un opérateur multivoque m-accréitif dans $L^1(\Omega)$, défini par

$$\tilde{A}_\infty = A_\infty \cup \left\{ \left(\oint f, f - \oint f \right); f \in L^1(\Omega) \text{ et } \left| \oint f \right| > 1 \right\},$$

tel que,

$$A_m \rightarrow \tilde{A}_\infty \text{ au sens de la résolvante .}$$

Et, on montre que

THÉORÈME 3.6. (voir [Ig4]) *Étant donné Ω un ouvert borné régulier, u_0 et g vérifiant les hypothèses du Théorème 3.4, u_m la solution de (3.19) au sens de (3.20), lorsque $m \rightarrow \infty$, on a*

$$u_m \rightarrow u \quad \text{dans } \mathcal{C}((0, T); L^1(\Omega))$$

et u est l'unique solution du problème d'évolution suivant : $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega))$, $u \geq 0$, $u(0, \cdot) = \underline{u}_0(\cdot)$ p.p. Ω ,

il existe $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T$ tels que $u(T_i) \equiv 1$ si $T_i \neq 0$, $i = 1, 2$, $[T_1, T_2] = \bar{I}$ où $I = \{t \in (0, T); \oint u(t) < 1\}$

et on a

– pour tout $t \in (0, T_1)$, $u(t, \cdot) \equiv q_1(t)$ p.p. sur Ω où q_1 est la solution de l'o.d.e.

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = g(q_1(t)) & \text{sur } (0, T_1) \\ q_1(0) = \oint u_0 \\ q_1 \geq 1; \end{cases}$$

– il existe $w \in L^2_{loc}(I; H^1(\Omega))$, $u \in \text{sign}(w)$ p.p. $I \times \Omega$, telle que $\forall (s, t) \subseteq I$ et $\forall \xi \in C^\infty([s, t] \times \bar{\Omega})$,

$$\int_s^t \int_\Omega u \frac{\partial \xi}{\partial t} + \int_s^t \int_\Omega g(u) \xi = \int_s^t \int_\Omega \nabla w \nabla \xi + \int_\Omega u(s) \xi(s, \cdot),$$

– pour tout $t \in (T_2, T)$, $u(t, \cdot) \equiv q_2(t)$ p.p. sur Ω où q_2 est la solution de l'ode

$$\begin{cases} \frac{dq_2}{dt} = g(q_2(t)) & \text{sur } (T_2, T) \\ q_2(T_2) = 1 \text{ si } T_2 \neq 0 \text{ ou } q_2(T_i) = \underline{u}_0 \text{ si } T_2 = 0 \\ q_2 \geq 1 \end{cases}$$

où \underline{u}_0 est donnée par (3.21).

4. Limite singulière de l'EMP et Hele-Shaw.

Il est bien clair que l'équation limite, lorsque $m \rightarrow \infty$, de $u_t = \Delta u^m$, est une équation de type Hele-Shaw, et que dans le cas de conditions aux bord homogènes, la limite de u_m est une mesa⁸ \underline{u}_0 qui ne dépend pas de t et correspond à une solution stationnaire du problème de Hele-Shaw. Pour le cas de conditions aux bord non homogènes, il a été démontré pour Dirichlet que la limite évolue dans le temps et que c'est l'unique solution du problème de Hele-Shaw dont la donnée initiale est \underline{u}_0 . Dans cette section, on considère le problème

$$(4.23) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m & \text{sur } Q = (0, \infty) \times \Omega \\ \frac{\partial u^m}{\partial n} = g & \text{sur } \Sigma = (0, \infty) \times \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

⁸c'est un autre nom donné aux projections sur K .

où $g \in L^2(\Gamma)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. Pour tout $m \geq 0$ (voir par exemple [Ig10]), il existe une unique solution u de (4.23) au sens suivant :

$$(4.24) \quad \begin{cases} u \in L^2(Q), w := |u|^{m-1}u \in L^2_{loc}(0, \infty; H^1(\Omega)) \\ \int_0^\infty \int_\Omega \xi_t u + \int_\Omega \xi(0, \cdot) u_0 = \int_0^\infty \int_\Omega Dw \cdot D\xi + \int_0^\infty \int_\Gamma \xi g \\ \forall \xi \in \mathcal{C}^1([0, \infty) \times \bar{\Omega}) \text{ à support compacte.} \end{cases}$$

On s'intéresse toujours à la limite de la solution u_m , lorsque $m \rightarrow \infty$. Formellement, lorsque $m \rightarrow \infty$ l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial u^m}{\partial n} = g & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

converge vers

$$(4.25) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta w = 0 & \text{dans } Q \\ u \in H(w) & \text{dans } Q \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = g & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

qui représente la formulation faible du problème de type Hele-Shaw. Puisque, l'ensemble des valeurs de la solution de (4.25) est inclus dans $[-1, +1]$, alors u_0 est une donnée initiale incompatible avec (4.25) si $\|u_0\|_\infty > 1$. D'autre part, on voit que la solution de (4.25) vérifie

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u = \int_\Gamma g.$$

Ainsi, si $\int_\Gamma g \neq 0$ cette solution n'est plus définie pour t assez grand. Ceci implique que la limite n'est pas solution du problème de Hele-Shaw pour tout $t \in (0, \infty)$. Cette analyse formelle montre que même pour la limite régulière, i.e. $\|u_0\|_\infty \leq 1$, le problème avec Neumann nonhomogène est complètement différent que son similaire avec Dirichlet sur le bord (see [75, 90, 96]).

Rappelons que pour le cas homogène, i.e. $g \equiv 0$, $u_m(t) \rightarrow \underline{u}_0$ dans $L^1(\Omega)$ pour $t > 0$, où \underline{u}_0 est donnée par (3.21) Dans le cas non homogène on montre dans [Ig10], que pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ et $g \in L^2(\Gamma)$, lorsque $m \rightarrow \infty$,

$$u_m \rightarrow u \quad \text{dans } \mathcal{C}((0, \infty); L^1(\Omega)),$$

où, en posant

$$\mu(t) = \int_\Omega u_0 + \frac{t}{|\Omega|} \int_\Gamma g \quad \text{pour } t \geq 0,$$

et

$$I = \{t \geq 0 ; |\mu(t)| \leq 1\} := [a, b]$$

avec $a = b = +\infty$ si $I = \emptyset$, u est l'unique solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad u \in \mathcal{C}([0, \infty); L^1(\Omega)), \quad u(0) = \underline{u}_0, \\ ii) \quad u(t) \equiv \mu(t) \text{ p.p. sur } \Omega, \text{ pour tout } t \in (0, a] \cup [b, \infty) \\ iii) \quad \exists w \in L^2_{loc}(a, b; H^1(\Omega)) \text{ tel que } u \in \text{sign}(w) \text{ p.p. dans } \Omega \\ \\ \text{et } \int_a^b \int_{\Omega} (\xi_t u - Dw \cdot D\xi) = \int_a^b \int_{\Gamma} \xi g, \quad \forall \xi \in \mathcal{C}^1((a, b) \times \overline{\Omega}), \\ \\ \text{à support compact.} \end{array} \right.$$

Ainsi, la limite u est une solution du problème de Hele-Shaw pour $t \in I$ et u est une fonction de t constante en espace pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \setminus I$. D'autre part, I peut être vide, en particulier si $\int_{\Gamma} g \geq 0$ et $\int_{\Gamma} u_0 \geq 1$, alors $u(t) \equiv \int_{\Gamma} u_0 + \frac{t}{|\Omega|} \int_{\Gamma} g \geq 1$, pour tout $t \geq 0$.

5. Limite singulière de l'EMP et loi de conservation.

Afin d'étudier l'influence d'une convection sur la limite singulière de l'équation (1.3), on étudie dans [Ig12], le cas où le terme $F \neq 0$ et $g \equiv 0$. On considère la limite, lorsque $m \rightarrow \infty$, de la solution du problème de Cauchy

$$(5.26) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u^m + \text{div}F(u) = 0 & \text{sur } Q = (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

où $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est supposée pour simplifier localement lipchitzienne et $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \geq 0$.

Pour tout $m \geq 1$, il existe une unique solution faible u_m de (5.26) : $u_m \in \mathcal{C}([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty(Q)$, $u_m \geq 0$, $\nabla u_m^m \in L^2(Q)$ (voir [58],[39],[38],[40]). Nous prouvons que

$$u_m \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{C}((0, \infty); L^1(\mathbb{R}^N))$$

où u est l'unique solution entropique (au sens de Kruzhkov, voir [71]) de

$$\begin{cases} u_t + \text{div}F(u) = 0 & \text{sur } Q \\ u(0, \cdot) = \underline{u}_0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

avec \underline{u}_0 , la "mesa" de u_0 (voir [52], [20]), i.e. $\underline{u}_0 = u_0 \chi_{[w=0]} + \chi_{[w>0]}$ où w est l'unique solution de

$$\left(\begin{array}{l} w \in H^2(\mathbb{R}^N), \quad w \geq 0, \quad 0 \leq \Delta w + u_0 \leq 1, \\ \text{et } w(\Delta w + u_0 - 1) = 0 \text{ p.p. } \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

Ainsi, contrairement au cas de réaction diffusion où la diffusion, même très lente, reste bien présente dans le problème limite et notamment sur l'ensemble où la solution est égale à 1; dans le cas de convection, le problème limite est juste un problème de transport (loi de conservation). Notons d'autre part, que dans ce cas, en plus de la couche limite au voisinage de $t = 0$, une autre couche limite au voisinage du bord se forme; elle est du même type que la loi de conservation avec faible viscosité.

6. Equation de diffusion rapide.

Si $0 < m < 1$, l'équation (1.3) est dite de diffusion rapide. On considère le cas simplifié de cette équation

$$(E_\alpha) \quad u_t = \nabla \cdot (|u|^{-\alpha} \nabla u) + f,$$

où on a posé $\alpha = 1 - m$ et $d = 1/(\alpha + 1)$. Si $0 \leq \alpha < 1$, alors le coefficient de diffusion $D(u) = |u|^{-\alpha}$ est très grand pour les petites valeurs de u , et il est très petit pour les grandes valeurs de u . Cette équation apparaît en physique des plasmas, en théorie cinétique des gaz et aussi en géométrie Riemannienne.

Bien que 0 est un point singulier pour l'équation pour toute valeur de $\alpha \in [0, 1)$, l'équation a un comportement complètement différent pour la valeur $\alpha = 1$. En effet, l'équation (E_α) peut être écrite sous sa forme standard

$$u_t = \Delta \varphi_\alpha(u) + f$$

où φ_α est donnée par

$$\varphi_\alpha(r) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \text{Sign}(r)|r|^{1-\alpha} & \text{pour } r \in \mathbb{R} \quad \text{si } \alpha < 1 \\ \text{Sign}(r) \log(|r|) & \text{pour } r \in \mathbb{R}^* \quad \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

ainsi, si $\alpha < 1$, alors φ_α est une fonction continue croissante sur \mathbb{R} , alors que le cas $\alpha = 1$, le graphe de φ_1 est l'union de deux graphes continus croissants sur \mathbb{R} avec une singularité en 0. Comme on le verra, la singularité du graphe φ_1 en 0 semble créer une obstruction à l'existence de solutions qui changent de signe. En effet, si $\alpha < 1$, le problème admet des solutions (uniques) qui peuvent changer de signe pour tout $t > 0$, alors que pour le cas $\alpha = 1$, il admet des solutions (uniques) qui, pour tout $t > 0$, elle sont soit strictement positives soit strictement négatives soit identiquement nulles. Cette différence de comportement entre le cas $\alpha < 1$ et $\alpha = 1$ provoque un phénomène de limite singulière lors du passage à la limite $\alpha \uparrow 1$, et l'apparition d'une couche limite pour les petits temps, lorsque la donnée initiale est une fonction qui change de signe. Plus précisément, on a étudié l'équation (E_α) avec des conditions au bord de type Neumann non homogènes, i.e.

$$u^{-\alpha} \nabla u \cdot \vec{n} = g \quad \text{sur} \quad \Sigma = (0, T) \times \Gamma$$

où Γ est la frontière de Ω ouvert régulier, \vec{n} est la normale extérieur à Γ et $g \in L^2(\Sigma)$. Le choix de l'équation (E_α) avec ce type de conditions au bord est motivé aussi par le faite que si $\Omega = B(0, R)$, alors pour R assez grand les solutions de (E_α) approchent, pour g donnée, les solutions maximale de (E_α) sur \mathbb{R}^N qui ont fait l'objet de nombreuse étude vu leurs intérêt en 'Ricci Flow'.

Ainsi, on considère le problème

$$E_\alpha(u_0, f, g) \quad \begin{cases} u_t = \nabla \cdot (u^{-\alpha} \nabla u) + f & \text{dans} \quad Q = (0, T) \times \Omega \\ u^{-\alpha} \nabla u \cdot \vec{n} = g & \text{sur} \quad \Sigma = (0, T) \times \Gamma \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Rappelons tout d'abord un résultat d'existence et d'unicité plus au moins connu pour l'équation $(E_\alpha(u_0, f, g))$, lorsque $\alpha < 1$.

PROPOSITION 6.1. *Pour tout $\alpha < 1$, si $u_0 \in L^{2-\alpha}(\Omega)$, $f \in L^2(Q)$ et $g \in L^2(\Sigma)$, il existe une unique u solution de $E_\alpha(u_0, f, g)$ au sens suivant*

$$(6.27) \quad \begin{cases} u \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega)), \quad \varphi_\alpha(u) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad u(0) = u_0 \text{ p.p. } \Omega, \\ \frac{d}{dt} \int_\Omega \xi u + \int_\Omega \nabla \varphi_\alpha(u) \cdot \nabla \xi = \int_\Gamma \xi g + \int_\Omega \xi f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall \xi \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}). \end{cases}$$

Quand à l'étude du cas $\alpha = 1$ et compte tenu de la nature du graphe φ_1 , on introduit les espaces suivants : $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq \infty$,

$$L^p(\Omega)^+ = \left\{ u \in L^p(\Omega) ; u \geq 0 \text{ p.p. } \Omega \right\}, \quad L^p(\Omega)^- = \left\{ u \in L^p(\Omega) ; u \leq 0 \text{ p.p. } \Omega \right\}$$

et

$$L^p(\Omega)^\pm = L^p(\Omega)^- \cup L^p(\Omega)^+.$$

D'autre part, comme on travaille avec des conditions au bord de type Neumann, la quantité

$$\mu(t) = \int_\Omega u_0 + \int_0^t \left(\int_\Gamma g + \int_\Omega f \right) \quad \text{pour tout } t \in [0, T),$$

joue un rôle très important dans l'étude du problème $(E_\alpha(u_0, f, g))$, et ceci à travers les sous-intervalles de $[0, T)$ suivants :

$$I^- = \{t \in [0, T) ; \mu(t) < 0\}, \quad I^+ = \{t \in [0, T) ; \mu(t) > 0\}, \quad I^\pm = I^+ \cup I^-$$

et

$$I = \{t \in [0, T) ; \mu(t) = 0\}.$$

Ainsi pour $\alpha = 1$, on montre dans [Ig16] le résultat suivant :

THÉORÈME 6.7. *Pour tout $u_0 \in L^p(\Omega)^\pm$, avec $p > 1$, $f \in L^2(Q)$ et $g \in L^2(\Sigma)$, il existe une unique u solution de $E_1(u_0, f, g)$ au sens suivant*

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0, T); L^1(\Omega)^\pm), \quad u(0) = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad u(t) \equiv 0 \text{ dans } \Omega, \text{ pour tout } t \in I, \\ u(t) \mu(t) > 0 \text{ p.p. in } \Omega, \text{ pour tout } t \in I^\pm, \quad \log(|u|) \in L^2(I^\pm; H^1(\Omega)), \\ \frac{d}{dt} \int_\Omega \xi u + \int_\Omega \nabla \varphi_1(u) \cdot \nabla \xi = \int_\Gamma g \xi + \int_\Omega f \xi \quad \text{dans } \mathcal{D}'(t_1, t_2), \\ \forall \xi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \quad \text{and } (t_1, t_2) \subseteq I^\pm. \end{cases}$$

Quant au passage à la limite lorsque $\alpha \uparrow 1$, de la solution de $(E_\alpha(u_0, f, g))$, on montre le résultat suivant :

THÉORÈME 6.8. *Supposons que $u_0 \in L^p(\Omega)$, pour $p > 1$, $f \in L^2(Q)$, $g \in L^2(\Sigma)$ et pour $2-p < \alpha < 1$, soit u_α la solution de $E_\alpha(u_0, f, g)$. Alors, il existe $\underline{u}_0 \in L^\infty(\Omega)^\pm$, telle que, en prenant une sous suite si nécessaire, on a*

$$(6.28) \quad u_\alpha \rightarrow \underline{u} \text{ dans } \mathcal{C}([\delta, T), L^1(\Omega)) \quad \text{pour tout } 0 < \delta < T, \quad \text{lorsque } \alpha \rightarrow 1,$$

et \underline{u} est la solution de $E_1(\underline{u}_0, f, g)$. De plus, \underline{u}_0 satisfait

i) Si $u_0 \in L^2(\Omega)^\pm$, alors $\underline{u}_0 = u_0$, et $\delta = 0$ est admissible (6.28).

ii) Si $\int_\Omega u_0 = 0$, alors $\underline{u}_0 \equiv 0$.

iii) Si $\int_\Omega u_0 > 0$, alors $0 \leq \underline{u}_0 \leq u_0^+$ p.p. dans Ω and $\underline{u}_0 = 0$ p.p. dans $[u_0 \leq 0]$.

iv) Si $\int_\Omega u_0 < 0$, alors $-u_0^- \leq \underline{u}_0 \leq 0$ p.p. dans Ω et $\underline{u}_0 = 0$ p.p. dans $[u_0 \geq 0]$.

Notons que la passage à la limite impose un changement de donnée initiale, phénomène standard pour les perturbations singulières. Le théorème 6.8 donne une description de cette nouvelle donnée \underline{u}_0 , mais ne donne pas de caractérisation de \underline{u}_0 . Ceci reste encore un problème ouvert.

Les preuves de ces résultats utilisent principalement la théorie des semi groupe non linéaire. On étudie le problème stationnaire associé, c-à-d

$$\begin{cases} u - \Delta \varphi_\alpha u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla \varphi_\alpha u \cdot \vec{n} = g, \end{cases}$$

qui constitue, surtout dans le cas $\alpha = 1$, un exemple typique de problème elliptique non coercif et mal posé en général. Il y a peu d'étude concernant ce type de problème dans le cas de Neumann non homogène. Dans [Ig16], on étudie la limite $\alpha \uparrow 1$ pour le problème stationnaire et ensuite moyennant la théorie des semigroupes non linéaires on montre les Théorème 6.7 et Théorème 6.8.

7. Limite singulière localisée.

Les phénomènes de limite singulière localisée apparaissent dans des modèles où le processus de diffusion diffère fortement d'une région à une autre. Elle se rencontre dans la physique des matériaux composites, dynamique

de populations et beaucoup d'autres situations. Plus précisément, on s'intéresse au comportement de la solution d'une équation de type (1.3) avec

$$d = d_\varepsilon(x) \rightarrow \begin{cases} d_0(x) \text{ uniformément dans } \Omega_0 \\ +\infty \text{ uniformément sur tout compact de } \Omega_1, \end{cases}$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, où Ω_0 et Ω_1 est une partition de Ω . On identifie le problème limite appelé "shadow problem", on définit la notion de solution pour ce problème et on montre qu'il est bien posé et que les solutions sont bien des limites du problème non perturbé avec un phénomène de couche limite en $t = 0$ sur Ω_1 , lorsque la donnée initiale est non compatible.

Pour simplifier la présentation, on considère le modèle

$$(P_\varepsilon(u_0, f, g)) \quad \begin{cases} \partial_t u = \nabla \cdot (d_\varepsilon \nabla \varphi(u) + F(\varphi(u))) + f & \text{dans } Q = (0, T) \times \Omega \\ (d_\varepsilon \nabla \varphi(u) + F(\varphi(u))) \cdot \vec{n} = g & \text{sur } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où φ est une fonction continue croissante sur \mathbb{R} , $f \in L^2(Q)$, $g \in L^2(\Sigma)$, $F \in (C^1(\mathbb{R}))^N$, \vec{n} est la dérivée normale au bord $\partial\Omega$ et d_ε est une fonction régulière sur Ω telle que pour tout $\varepsilon > 0$, $0 < m \leq d_\varepsilon \leq M_\varepsilon$. Il n'est pas difficile de montrer que $P_\varepsilon(u_0, f, g)$ admet une unique solution faible u_ε , i.e. $u_\varepsilon \in L^2(Q)$, $\varphi(u_\varepsilon) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, et satisfait l'équation au sens faible. Soit Ω_1 un sous domaine de Ω , telle que pour tout $K \subset\subset \Omega_1$, $\inf_{x \in K} d_\varepsilon(x) \rightarrow \infty$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et $d_\varepsilon \rightarrow d_0$ uniformément dans $\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_1$. On s'intéresse au

comportement asymptotique de u_ε , lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans le cas où $\Omega_0 = \emptyset$, il est connu qu'une redistribution rapide de l'inhomogénéité spatiale implique que u devient une fonction constante en espace, qui est égale à $f u_0 + \frac{1}{|\Omega|} \int_0^t \left(\int_\Omega f + \int_\Gamma g \right)$, à chaque instant $t > 0$. Alors que pour le cas $\Omega_1 = \emptyset$, évidemment $u_\varepsilon \rightarrow u$ et u est une solution de

$$(7.29) \quad u_t = \nabla \cdot (d_0 \nabla \varphi(u) + F(\varphi(u))) + f$$

avec les valeurs correspondantes au bord

$$(7.30) \quad (d_0 \nabla \varphi(u) + F(\varphi(u))) \cdot \vec{n} = g.$$

Ainsi, si Ω_0 et Ω_1 ne sont pas vides, u_ε converge vers une fonction u qui satisfait (7.29) dans Ω_0 et (7.30) sur $(0, T) \times (\partial\Omega \cap \partial\Omega_0)$. Alors qu'à l'intérieur de Ω_1 , u_ε approche u_{Ω_1} une fonction constante en espace sur Ω_1 . Cette dernière n'est pas arbitraire; elle doit tenir compte de la limite de la valeur des dérivées normales sur le bord $\partial\Omega_1$. En effet, en intégrant l'équation sur Ω_1 et en utilisant la normale vers l'intérieur \vec{n}_1 dans l'intégration par partie, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} u_\varepsilon + \int_{\partial\Omega_1} (d_\varepsilon \nabla \varphi(u_\varepsilon) F(\varphi(u))) \cdot \vec{n}_1 = \int_{\Omega_1} f$$

et en prenant formellement la limite et en divisant par $|\Omega_1|$ on obtient

$$\frac{d}{dt} u_{\Omega_1} + \frac{1}{|\Omega_1|} \int_{\partial\Omega_1} (d_0 \nabla \varphi(u) + F(\varphi(u))) \cdot \vec{n}_1 = \frac{1}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_1} f \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega_1.$$

Ainsi, en prenant en compte les données au bord et initiales, le problème limite devient

$$Sh(u_0, f, g) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = \nabla \cdot (d_0 \nabla w + F(\varphi(u))) + f, \quad w = \varphi(u), & \text{dans } (0, T) \times \Omega_0 \\ u(t) \text{ est une constane sur } \Omega_1 & \text{pour } t \in (0, T) \\ \frac{d}{dt} u(t) + \frac{1}{|\Omega_1|} \int_{\partial\Omega_1} (d_0 \nabla w + F(\varphi(u))) \cdot \vec{n}_1 = \frac{1}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_1} f(t) & \text{dans } (0, T) \times \Omega_1 \\ d_0 \nabla w \cdot \vec{n} = g & \text{sur } (0, T) \times (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Lorsque $\varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, $F \equiv 0$, et Ω_1 est à l'intérieur de Ω , i.e. $\partial\Omega \cap \partial\Omega_0 = \partial\Omega$, alors le problème est un cas particulier de [10]. En effet, dans ce cas $(P_\varepsilon(u_0, f, g))$ est un problème semi-linéaire dans $L^p(\Omega)$, avec $p > 1$,

pour lequel les auteurs utilisent les résultats de [94] pour le problème elliptique associé et les résultats de [65] et [9] les problèmes d'évolution abstraits semi-linéaires. Parmi les résultats de [10], il est montré que pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$ telle que u_0 est constante dans Ω_1 , $Sh(u_0, f, g)$ admet une unique solution u qui est la limite de u_ε . De plus, u est la solution de $Sh(u_0, f, g)$ au sens fort, plus précisément u et u_t sont des fonctions de $\mathcal{C}([0, T]; X)$ où X est un espace à puissance fractionnaire, de telle sorte que toutes les dérivées existent et sont des fonctions intégrables et peuvent être utilisées explicitement dans la formulation des solutions (en d'autre terme $Sh(u_0, f, g)$ est vérifiée partout $\bar{\Omega}$). Dans le cas non linéaire ; i.e. $\varphi \neq Id_{\mathbb{R}}$, ce type de formulation devient insuffisant pour décrire les solutions, puisque même pour $\varepsilon > 0$, l'existence de solutions fortes n'est pas vraie en général, une formulation faible de la solution est nécessaire. Ainsi, on introduit une notion de solution faible assez naturelle pour les problèmes de type $Sh(u_0, f, g)$, donnée comme suit. On introduit les espaces

$$L_{\Omega_1}^p = \left\{ u \in L^p(\Omega) ; u \text{ est constante sur } \Omega_1 \right\}$$

muni de sa norme naturelle L^p , pour $1 \leq p \leq \infty$, et on note $H_{\Omega_1}^1 = V \cap L_{\Omega_1}^2$.

DÉFINITION 7.1. Pour tout $g \in L^1(\Sigma_N)$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$, on dit que u est une solution de $Sh(u_0, f, g)$, si

$$(7.31) \quad \begin{cases} u \in L^2(Q), w := \varphi(u) \in L^2(0, T; H_{\Omega_1}^1), \text{ et} \\ \iint_Q \left(-u \xi_t + d_0 \nabla w + F(w) \right) \cdot \nabla \xi = \int_{\Omega} u_0 \xi(0) + \iint_Q F(\cdot, u) \xi \\ + \iint_{\Sigma_N} (g - \rho(\cdot, w)) \xi, \forall \xi \in \mathcal{C}(\bar{Q}) \cap L^2(0, T; H_{\Omega_1}^1) \text{ telle que } \xi(T) \equiv 0. \end{cases}$$

Dans [Ig3], on montre que les problèmes de type $Sh(u_0, f, g)$ sont bien posé. Plus précisément

THÉORÈME 7.9. Pour tout $g \in L^2(\Sigma_N)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$ telle que

$$(7.32) \quad \int_0^u \varphi(r) dr \in L^1(\Omega),$$

il existe une unique solution u de $Sh(u_0, f, g)$. De plus, $u \in \mathcal{C}([0, T]; L_{\Omega_1}^1)$, $u(0) = u_0|_{\Omega_1}$, et si pour $i = 1, 2$, $u_{0i} \in L^2(\Omega)$ satisfait (7.32), $g_i \in L^2(\Sigma_N)$, et u_i est une solution de $Sh(u_{0i}, f_i, g_i)$ alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_1(t) - u_2(t))^+ \leq \int_{[u_1 > u_2]} (f_1 - f_2) + \int_{[u_1 = u_2]} (f_1 - f_2)^+ + \int_{\Gamma_N} (g_1 - g_2)^+$$

dans $\mathcal{D}'(0, T)$.

Il n'est pas difficile de montrer qu'avec des choix appropriés de fonctions tests ξ , la Définition 7.1 implique que $Sh(u_0, f, g)$ est vérifiée partout si u, w, Γ_0 et Γ_1 sont assez régulières.

Pour la limite, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, des solutions de $P_\varepsilon(u_0, f, g)$, on montre le résultat suivant.

THÉORÈME 7.10. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ satisfaisant (7.32), $g \in L^2(\Sigma_N)$ et u_ε la solution de $P_\varepsilon(u_0, f, g)$. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(7.33) \quad u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{dans } \mathcal{C}([\delta, T]; L^1(\Omega)),$$

pour tout $\delta > 0$, et, en prenant une sous-suite si nécessaire,

$$(7.34) \quad \varphi(u_\varepsilon) \rightarrow \varphi(u) \quad \text{dans } L^2(0, T; V) - \text{faible}$$

et u est l'unique solution de $Sh(u_0, f, g)$. De plus, si $u_0 \in L_{\Omega_1}^2$, alors $\delta = 0$ est admissible dans (7.33).

Dans [Ig3], on étudie ces questions pour le problème général

$$\beta(w)_t = \nabla \cdot \left(d_\varepsilon \nabla w + \sigma(x, w) \right) + F(t, x, w) \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega$$

où $T > 0$, Ω est un ouvert, borné et régulier, d_ε est une fonction régulière, la fonction β est continue croissante, la convection σ est supposée dissipative et le terme de réaction F est une fonction de Caratheodory telle que

$$\begin{cases} i) \quad \frac{\partial F}{\partial u}(t, x, u) \leq K \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), K \in \mathbb{R}^+ \\ ii) \quad |F(t, x, u)| \leq K_1(t, x)|u| + K_2(t, x) \end{cases}$$

avec $K_i \in L^\infty(Q)$, pour $i = 1, 2$. Cette équation est considéré avec des conditions au bord de type

$$\left(d_\varepsilon \nabla w + \sigma(x, w) \right) \cdot \vec{n} + \gamma(x, w) = g(x, t)$$

sur une partie du bord de Ω et Dirichlet homogène sur le reste.

8. Travaux en cours et perspectives.

Dans un cadre abstrait général, on considère le problème d'évolution :

$$u_t + A_\lambda^\mu u \ni H(t, u) \quad \text{sur } (0, T), \quad u(0) = u_0,$$

où A_λ^μ est l'opérateur défini par $A_\lambda^\mu = \lambda A_1 + \mu A_2$, A_1 et A_2 sont deux opérateurs donnés. On étudie les limites singulières suivantes :

- λ fixé et $\mu \rightarrow \infty$.
- $\mu = \lambda^2 \rightarrow \infty$.
- $\mu = \frac{1}{\lambda} \rightarrow \infty$.

Ceci est dans le but de décrire le comportement des solutions de problèmes de réaction diffusion en fonction des compétitions réaction/diffusion. Quelques résultats dans le cas abstrait ainsi que des applications à des équations et des systèmes de réaction diffusion, en particulier la limite de (1.3) lorsque $\tau \rightarrow \infty$ et/ou $d \rightarrow \infty$, sont en cours de rédaction ([Ig23] et [Ig24]).

Problèmes d'évolution avec des conditions au bord dynamiques.

1. Introduction.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné de frontière $\Gamma := \partial\Omega$ régulière, $T > 0$ et $1 < p < \infty$. On considère l'équation

$$(1.1) \quad v_t - \operatorname{div}a(x, Du) = f, \quad v \in \gamma(u), \quad \text{dans } Q_T = \Omega \times (0, T),$$

où a est un opérateur de type Leray-Lions, i.e $a : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction de Carathéodory satisfaisant

(H₁) il existe $\lambda > 0$ tel que $a(x, \xi) \cdot \xi \geq \lambda|\xi|^p$ pour p.p. $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

(H₂) Il existe $c > 0$ et $\varrho \in L^{p'}(\Omega)$ tel que $|a(x, \xi)| \leq \sigma(\varrho(x) + |\xi|^{p-1})$ pour p.p. $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, où $p' = \frac{p}{p-1}$,

(H₃) $(a(x, \xi) - a(x, \eta)) \cdot (\xi - \eta) > 0$ pour p.p. $x \in \Omega$ et pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, $\xi \neq \eta$.

La non linéarité γ est un graphe maximal monotone sur \mathbb{R} et en particulier, γ peut être multivoque, alors (1.1) apparaît dans de nombreux modèles de transition de phases comme le problème de Stefan. Il peut être aussi continu sur \mathbb{R} , auquel cas (1.1) est l'équation de filtration qui décrit la diffusion d'un fluide dans un milieu poreux, la propagation de chaleur dans un plasma, la dynamique de population et d'autres phénomènes de diffusion non linéaires. L'équation (1.1) doit être complétée avec des conditions au bord et une condition initiale.

Par rapport aux considérations physiques, différentes conditions au bord sont possibles pour ce type d'équations. Les plus classiques et standards sont

- Dirichlet : une valeur imposée à la solution sur le bord.
- Neumann : une valeur imposée au flux sur le bord.

Mais, dans quelques situations pratiques, il n'est possible de prescrire ni la valeur de w ni celle du flux sur le bord. La loi de Newton¹ sur la surface froide, les conditions au bord unilatérales ainsi que de nombreuses autres situations (voir par exemple [49] ou [33]) avaient donné lieu à des conditions au bord non linéaires (statiques) de type :

$$\beta(x, u) + a(x, \nabla u) \cdot \eta = g(t, x) \quad \text{pour } x \in \Gamma,$$

où $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory croissante pour $r \in \mathbb{R}$, et $g : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont données. Ce type de condition au bord a été largement couvert dans la littérature dans le cas homogène, i.e. $g \equiv 0$. Ici, on s'intéresse au cas de condition au bord dynamiques, c'est la situation où ni u ni le flux n'est connu sur le bord mais reliés par la relation

$$(1.2) \quad \mu(x, w) \partial_t w + a(x, Du) \cdot \eta = g, \quad w \in \beta(u), \quad \text{sur } S_T = \partial\Omega \times (0, T)$$

où $\mu : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $g : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables données. Ce type de conditions au bord, bien qu'elle ne sont pas suffisamment considérées dans la littérature mathématique, sont très naturelles dans beaucoup de modèles physiques de transfert thermique dans un solide en contact avec le fluide mobile, thermoelasticité, les phénomènes de diffusion, le transfert thermique dans le milieu biphasique (problème de Stefan), des problèmes dans la dynamique liquide, etc. (voir [46], [50], [76], [37], [2], [64], [63] et [88]).

¹Dans le cas de l'équation de la chaleur, elle exprime le fait que le taux de perte de chaleur est proportionnel à la différence de température à travers la surface : $J(t, x) \cdot n + k_0(x)(u(t, x) - h(t, x)) = g(t, x)$ sur Γ où u est la température, J est le flux, g un terme source sur la frontière et h la température extérieure.

EXEMPLE . Équation de la chaleur avec condition au bord dynamique : Si pour une partie $\Omega_0 \subset \Omega$, $Ec(t, \Omega_0)$ désigne l'énergie de chaleur de Ω_0 à l'instant $t > 0$, alors

$$Ec(t, \Omega_0) = \int_{\Omega_0} \rho(x) c(x) u(t, x) dx$$

où $u(t, x)$ est la température, ρ est la densité et c est la capacité de chaleur ou bien la chaleur spécifique "specific heat". L'équation de conservation de la masse² (appelée aussi équation de continuité) implique que

$$\frac{d}{dt} Ec(t, \Omega_0) + \tau(t, S) = \int_{\Omega_0} f(t, x) dx,$$

où $\tau(t, S)$ est le taux avec lequel l'énergie de chaleur traverse l'élément de surface $S = \partial\Omega_0$ et f désigne une distribution de chaleur dans Ω . Enfin la loi de Fourier³ exprimant $\tau(t, S)$ est proportionnelle à l'aire de S et au gradient de la température dans la direction normale n à la surface, implique que

$$\tau(t, S) = - \int_S k(s) \nabla u(s, t) \cdot n ds,$$

où k est la conductivité et $J := -k(s) \nabla u(t, x)$ est le flux de chaleur. Ainsi, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_0} \rho(x) c(x) u(t, x) dx - \int_{\partial\Omega_0} k(s) \nabla u(t, x) \cdot n ds = \int_{\Omega_0} f(t, x) dx,$$

pour tout $t > 0$, $\Omega_0 \subseteq \Omega$ et où n le vecteur unitaire normal sortant. En utilisant le théorème de Gauss, on obtient

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho(x) c(x) u(t, x)) dx - \int_{\Omega_0} \nabla \cdot k(s) \nabla u(t, x) dx = \int_{\Omega_0} f(t, x) dx,$$

pour tout $\Omega_0 \subseteq \Omega$ et $t > 0$, ce qui implique l'équation de la chaleur

$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho(x) c(x) u(t, x)) - \nabla \cdot (k(s) \nabla u(t, x)) = f(t, x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega \text{ et } t > 0.$$

Si la structure du milieu fait que le bord Γ admet une capacité de chaleur non nulle (chaleur spécifique) noté c_0 , alors, pour tout $S \subset \Gamma$, $Ec(t, S)$ l'énergie de chaleur sur S est donnée par

$$Ec(t, S) = \int_S \rho_0(s) c_0(s) u(t, s) ds.$$

Et, si on suppose que l'énergie de chaleur est approvisionnée vers le bord $S \subset \Gamma$ par le flux sur S depuis l'intérieur, alors

$$\frac{d}{dt} Ec(t, S) + \int_S J(t, x) \cdot n = \int_S g(t, x) \quad t > 0,$$

où g est une source de distribution sur le bord. D'où la condition au bord dynamique

$$(1.4) \quad \rho_0(x) c_0(x) \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + J(t, x) \cdot n = g(t, x) \quad \text{pour tout } x \in \Gamma \text{ et } t > 0.$$

Les deux équations (1.3) et (1.4) deviennent non linéaires dès qu'on suppose en plus l'une des conditions suivantes $c = c(u)$, $\rho = \rho(u)$, $c_0 = c_0(u)$ ou $\rho_0 = \rho_0(u)$. Rappelons que ces quantités sont toutes positives.

²c'est une équation quantitative exprimant le fait basique qu'il doit y avoir un équilibre entre ce qui entre, ce qui sort et ce qui est modifié.

³c'est une loi constitutive fondée sur une évidence expérimentale exprimant le fait que la chaleur se diffuse d'endroits chauds vers ceux qui sont froids.

Complété avec des données initiales, le problème d'évolution avec des conditions au bord dynamiques auxquelles on s'intéresse deviennent

$$DP \quad \begin{cases} v_t - \operatorname{div} a(x, Du) = f, \quad v \in \gamma(u), \quad \text{dans } Q_T \\ w_t + a(x, Du) \cdot \eta = g, \quad w \in \beta(u), \quad \text{sur } S_T \\ v(0) = v_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad w(0) = w_0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

En particulier, si β est le graphe donné par $\beta(r) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, on obtient les conditions au bord Neumann non homogènes (statiques), i.e.

$$\begin{cases} z_t - \operatorname{div} a(x, Du) = f, \quad z \in \gamma(u), \quad \text{dans } Q_T \\ a(x, Du) \cdot \eta = g, \quad \text{sur } S_T \\ v(0) = v_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

En outre, si $\gamma \equiv 0$, on obtient le problème elliptique avec des conditions au bord dynamiques non-linéaires sur le bord

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(x, Du) = f, \quad \text{dans } Q_T \\ w_t + a(x, Du) \cdot \eta = g, \quad w \in \beta(u), \quad \text{sur } S_T \\ w(0) = w_0 \quad \text{dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

Enfin, si on permet à β de dépendre de l'espace; $\beta(\cdot) = \beta(x, \cdot)$, on inclut ainsi le cas de conditions au bord statiques sur une partie et dynamique sur le reste.

Afin d'utiliser le schéma d'Euler implicite pour l'étude du problème DP , on considère aussi le problème elliptique associé

$$S \quad \begin{cases} -\operatorname{div} a(x, Du) + \gamma(u) \ni \phi \quad \text{dans } \Omega \\ a(x, Du) \cdot \eta + \beta(u) \ni \psi \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où ϕ et ψ sont des fonctions données. Pour $\phi \in L^1(\Omega)$ et $\psi \in L^1(\partial\Omega)$, un triplet $[u, z, w] \in W^{1,p}(\Omega) \times L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ est dit *solution faible* du problème S si $z(x) \in \gamma(u(x))$ *p.p.* dans Ω , $w(x) \in \beta(u(x))$ *p.p.* dans $\partial\Omega$, et

$$\int_{\Omega} a(x, Du) \cdot Dv + \int_{\Omega} zv + \int_{\partial\Omega} wv = \int_{\partial\Omega} \psi v + \int_{\Omega} \phi v,$$

pour tout $v \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$.

Il est bien clair, que dans le cas où $\mathcal{D}(\beta) \neq \{0\}$, on a conservation de la masse, i.e.

$$\int_{\Omega} z + \int_{\Gamma} w = \int_{\Omega} \phi + \int_{\Gamma} \psi,$$

ce qui implique que nécessairement ϕ et ψ doivent vérifier

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \inf\{\operatorname{Im}(\gamma)\}\operatorname{meas}(\Omega) + \inf\{\operatorname{Im}(\beta)\}\operatorname{meas}(\partial\Omega) &< \int_{\Omega} \phi + \int_{\partial\Omega} \psi \\ &< \sup\{\operatorname{Im}(\gamma)\}\operatorname{meas}(\Omega) + \sup\{\operatorname{Im}(\beta)\}\operatorname{meas}(\partial\Omega). \end{aligned}$$

pour que $(S(\gamma, \beta))$ admette une solution. Ainsi, on introduit $\mathcal{R}_{\gamma,\beta} :=]\mathcal{R}_{\gamma,\beta}^-, \mathcal{R}_{\gamma,\beta}^+[$ lorsque $\mathcal{R}_{\gamma,\beta}^- < \mathcal{R}_{\gamma,\beta}^+$ où

$$\mathcal{R}_{\gamma,\beta}^+ := \sup\{\operatorname{Im}(\gamma)\}\operatorname{meas}(\Omega) + \sup\{\operatorname{Im}(\beta)\}\operatorname{meas}(\partial\Omega)$$

et

$$\mathcal{R}_{\gamma,\beta}^- := \inf\{\operatorname{Im}(\gamma)\}\operatorname{meas}(\Omega) + \inf\{\operatorname{Im}(\beta)\}\operatorname{meas}(\partial\Omega).$$

Différents cas particuliers ont été étudiés dans la littérature. En particulier, le cas où l'opérateur de diffusion est linéaire; i.e. $a(x, r) = r$, et avec des conditions au bord homogènes, i.e. $\psi \equiv 0$ (voir [27]). Le cas où a est de type Leray-Lions a été étudié avec $\beta = Id_{\mathbb{R}}$ et $\psi \equiv 0$ (voir [8]), et aussi largement étudié dans le cas Dirichlet et γ une fonction continue croissante (voir par exemple [28]). Ici, on s'intéresse au cas général de l'équation S et DP , notamment les conditions au bord Neumann non homogène et les conditions au bord dynamiques, respectivement. Notre but est d'étudier les questions d'existence et d'unicité pour les problèmes précités, ainsi que quelques comportements qualitatifs des solutions, en fonction des hypothèses sur les domaines et/ou sur les images de β et γ . La notion de solution faible qu'on adopte pour les problèmes de type DP , est la suivante :

DÉFINITION 1.2. *Étant donnés $f \in L^1(0, T; L^1(\Omega))$, $g \in L^1(0, T; L^1(\partial\Omega))$, $z_0 \in L^1(\Omega)$ et $w_0 \in L^1(\partial\Omega)$, une solution faible de DP sur $[0, T]$ est un couple (z, w) telle que $z \in C([0, T] : L^1(\Omega))$, $w \in C([0, T] : L^1(\partial\Omega))$, $z(0) = z_0$, $w(0) = w_0$ et il existe $u \in L^1(0, T; W^{1,p}(\Omega))$ tels que $z \in \gamma(u)$ p.p. Q_T , $w \in \beta(u)$ p.p. S_T et*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} z(t)\xi + \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} w(t)\xi + \int_{\Omega} a(x, Du(t)) \cdot D\xi = \int_{\Omega} f(t)\xi + \int_{\partial\Omega} g(t)\xi \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T)$$

pour tout $\xi \in C^1(\overline{\Omega})$.

Notons qu'en plus d'une condition de type (1.5) qui s'impose, l'intersection du domaine de β et γ peut créer une obstruction à l'existence de solution faible. Par exemple, si γ est tel que $D(\gamma) = [0, 1]$, $\beta = \mathbb{R} \times \{0\}$, $\phi \in L^1(\Omega)$, $\phi \leq 0$ p.p. Ω , $\psi \in L^1(\partial\Omega)$, $\psi \leq 0$ p.p. $\partial\Omega$ et s'il existe une solution $[u, z, w]$ du problème $(S_{\phi, \psi}^{\gamma, \beta})$, alors $0 \leq u \leq 1$ p.p. Ω , $w = 0$ et pour tout $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} a(x, Du)Dv + \int_{\Omega} zv = \int_{\partial\Omega} \psi v + \int_{\Omega} \phi v.$$

Puisque $u \geq 0$, alors, en prenant $v = u$, on obtient

$$0 \leq \int_{\Omega} a(x, Du)Du + \int_{\Omega} zu = \int_{\partial\Omega} \psi u + \int_{\Omega} \phi u \leq 0.$$

Par conséquent, $\int_{\Omega} |Du|^p = 0$, et alors u est une constante. Ceci implique que

$$\int_{\Omega} zv = \int_{\partial\Omega} \psi v + \int_{\Omega} \phi v,$$

pour tout $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Donc, $\phi = z$ p.p. Ω , et ψ doit être égal à 0 p.p. dans $\partial\Omega$.

Ces phénomènes de non existence de solutions faible liés à la condition (1.5) et aux domaines de γ et β , proviennent du fait que, lorsqu'ils sont différents de \mathbb{R} , $\mathcal{D}(\gamma)$, $\mathcal{D}(\beta)$, $Im(\gamma)$ et $Im(\beta)$ exprime des contraintes sur les solutions. Ainsi, au vu de ces conditions on peut classer le problème en quatre classes :

- Problème sans contraintes : $Im(\gamma) = \mathcal{D}(\gamma) = \mathbb{R}$ et $Im(\beta) = \mathcal{D}(\beta) = \mathbb{R}$.
- Problème avec contrainte intérieure sur l'image : $Im(\gamma) \neq \mathbb{R}$.
- Problème avec contrainte frontière sur l'image : $Im(\beta) \neq \mathbb{R}$.
- Problème avec contrainte intérieure sur le domaine : $\mathcal{D}(\gamma) \neq \mathbb{R}$.
- Problème avec contrainte frontière sur le domaine : $\mathcal{D}(\beta) \neq \mathbb{R}$.

On note par

$$V^{1,p}(\Omega) := \left\{ \phi \in L^1(\Omega) : \exists M > 0 \text{ telle que } \int_{\Omega} |\phi v| \leq M \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega) \right\}$$

et

$$V^{1,p}(\partial\Omega) := \left\{ \psi \in L^1(\partial\Omega) : \exists M > 0 \text{ telle que } \int_{\partial\Omega} |\psi v| \leq M \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

$V^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de sa norme naturelle

$$\|\phi\|_{V^{1,p}(\Omega)} := \inf \{ M > 0 : \int_{\Omega} |\phi v| \leq M \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega) \},$$

et $V^{1,p}(\partial\Omega)$ est un espace de Banach muni de sa norme naturelle

$$\|\psi\|_{V^{1,p}(\partial\Omega)} := \inf\{M > 0 : \int_{\partial\Omega} |\psi v| \leq M \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega)\}.$$

On observe que, les injections de Sobolev et les théorèmes de Trace implique que pour $1 \leq p < N$,

$$L^{p'}(\Omega) \subset L^{(Np/(N-p))'}(\Omega) \subset V^{1,p}(\Omega)$$

et

$$L^{p'}(\partial\Omega) \subset L^{((N-1)p/(N-p))'}(\partial\Omega) \subset V^{1,p}(\partial\Omega).$$

On a aussi,

$$\begin{aligned} V^{1,p}(\Omega) &= L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad V^{1,p}(\partial\Omega) = L^1(\partial\Omega) \quad \text{lorsque} \quad p > N, \\ L^q(\Omega) &\subset V^{1,N}(\Omega) \quad \text{et} \quad L^q(\partial\Omega) \subset V^{1,N}(\partial\Omega) \quad \text{pour tout} \quad q > 1. \end{aligned}$$

2. Unicité.

Pour le problème stationnaire, l'unicité est bien connue dans le cas où a est linéaire (voir [27]). Le cas de condition au bord Dirichlet a été largement étudié dans la littérature (voir par exemple [28] et [42]). Quand au cas de conditions au bord générales et Neumann non homogène à notre connaissances seul le cas où $\gamma = Id_{\mathbb{R}}$ et $\psi \equiv 0$ a été étudié dans [8] (voir aussi [5]) pour le cas où $\gamma = Id_{\mathbb{R}}$ et ψ . Dans [Ig1], on a montre le résultat suivant

THÉORÈME 2.1. *Pour toute $[u_1, z_1, w_1]$ solution faible de S , $\phi_1 \in L^1(\Omega)$, $\psi_1 \in L^1(\partial\Omega)$, et pour tout $[u_2, z_2, w_2]$ solution faible de S , $\phi_2 \in L^1(\Omega)$, $\psi_2 \in L^1(\partial\Omega)$, on a*

$$(2.6) \quad \int_{\Omega} (z_1 - z_2)^+ + \int_{\partial\Omega} (w_1 - w_2)^+ \leq \int_{\partial\Omega} (\psi_1 - \psi_2)^+ + \int_{\Omega} (\phi_1 - \phi_2)^+.$$

En particulier, si $\phi_1 = \phi_2$ et $\psi_1 = \psi_2$, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$u_1 - u_2 = c, \quad z_1 - z_2 = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et

$$w_1 - w_2 = 0 \quad \text{p.p. dans } \partial\Omega.$$

et si de plus $c \neq 0$, alors il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $z_1 = z_2 = k$.

Dans ce qui suit, on donne une esquisse de preuve pour le problème stationnaire. Ce choix de fonction a été introduit dans [30] pour montrer l'unicité de solution pour un problème de diffusion-convection de type Stefan avec des conditions au bord Dirichlet homogène. Ici, on les adapte a notre problème et on donne une deuxième preuve d'unicité complètement différente de celle donné dans [Ig1]. Soient $[u_1, z_1, w_1]$ et $[u_2, z_2, w_2]$ deux solutions faibles de S correspondant à (ϕ_1, ψ_1) et (ϕ_2, ψ_2) respectivement. Dans l'équation obtenue par la différence des deux équations, on prend comme fonction test

$$H_{\epsilon}(u_1 - u_2 + \epsilon\rho) \xi$$

où $\epsilon > 0$, $0 \leq \rho \leq 1$ est une fonction régulière et $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En utilisant la monotonie de a , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (z_1 - z_2) H_{\epsilon}(u_1 - u_2 + \epsilon\rho) \xi + \int_{[0 \leq (u_1 - u_2 + \epsilon\rho) \leq \epsilon]} (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2)) \cdot \nabla \rho + F_{\epsilon} \\ \leq \int_{\Omega} (\phi_1 - \phi_2) H_{\epsilon}(u_1 - u_2 + \epsilon\rho), \end{aligned}$$

où $F_{\epsilon} = \int_{\Omega} (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2)) \cdot \nabla \xi H_{\epsilon}(u_1 - u_2 + \epsilon\rho)$. On fait tendre $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\int_{\Omega} (z_1 - z_2) (\text{Sign}_0^+(u_1 - u_2) \chi_{[u_1 \neq u_2]} + \rho \chi_{[u_1 = u_2]}) \xi + F \leq \int_{\Omega} (\phi_1 - \phi_2)^+ \xi,$$

et $F = \int_{\Omega} (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2)) \cdot \nabla \xi \text{Sign}_0^+(u_1 - u_2)$. Par densité, on peut prendre $\rho = \text{Sign}_0^+(z_1 - z_2)$, d'où

$$(2.7) \quad \int_{\Omega} (z_1 - z_2)^+ \xi + \int_{\Omega} (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2)) \cdot \nabla \xi \text{Sign}_0^+(u_1 - u_2) \leq \int_{\Omega} (\phi_1 - \phi_2)^+ \xi,$$

Notons que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2)) \cdot \nabla \xi \text{Sign}_0^+(u_1 - u_2) &= - \int_{\Omega} (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2)) \cdot \nabla (1 - \xi) \text{Sign}_0^+(u_1 - u_2), \\ &\geq - \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2)) \cdot \nabla ((1 - \xi) H_{\epsilon}(u_1 - u_2 + \epsilon\rho)), \end{aligned}$$

pour tout $0 \leq \rho \leq 1$ fonction assez régulière. Or,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2)) \cdot \nabla ((1 - \xi) H_{\epsilon}(u_1 - u_2 + \epsilon\rho)) &= - \int_{\Omega} (z_1 - z_2) H_{\epsilon}(u_1 - u_2 + \epsilon\rho) (1 - \xi) \\ &+ \int_{\Omega} (\phi_1 - \phi_2) H_{\epsilon}(u_1 - u_2 + \epsilon\rho) (1 - \xi) + \int_{\Gamma} (\psi_1 - \psi_2) H_{\epsilon}(u_1 - u_2 + \epsilon\rho) - \int_{\Gamma} (w_1 - w_2) H_{\epsilon}(u_1 - u_2 + \epsilon\rho) (1 - \xi). \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2)) \cdot \nabla \xi \text{Sign}_0^+(u_1 - u_2) &\geq \int_{\Omega} (z_1 - z_2) (\text{Sign}_0^+(u_1 - u_2) \chi_{[u_1 \neq u_2]} + \rho \chi_{[u_1 = u_2]}) (1 - \xi) \\ &- \int_{\Omega} (\phi_1 - \phi_2) (\text{Sign}_0^+(u_1 - u_2) \chi_{[u_1 \neq u_2]} + \rho \chi_{[u_1 = u_2]}) (1 - \xi) - \int_{\Gamma} (\psi_1 - \psi_2) (\text{Sign}_0^+(u_1 - u_2) \chi_{[u_1 \neq u_2]} + \rho \chi_{[u_1 = u_2]}) \\ &\quad + \int_{\Gamma} (w_1 - w_2) (\text{Sign}_0^+(u_1 - u_2) \chi_{[u_1 \neq u_2]} + \rho \chi_{[u_1 = u_2]}). \end{aligned}$$

Si, on prend $\xi = \xi_n$ une suite de fonction telle que $L^1(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2)) \cdot \nabla \xi_n \text{Sign}_0^+(u_1 - u_2) &\geq - \int_{\Gamma} (\psi_1 - \psi_2) (\text{Sign}_0^+(u_1 - u_2) \chi_{[u_1 \neq u_2]} + \rho \chi_{[u_1 = u_2]}) \\ &\quad + \int_{\Gamma} (w_1 - w_2) (\text{Sign}_0^+(u_1 - u_2) \chi_{[u_1 \neq u_2]} + \rho \chi_{[u_1 = u_2]}), \end{aligned}$$

et, (2.7) implique que

$$\int_{\Omega} (z_1 - z_2)^+ + \int_{\Gamma} (w_1 - w_2)^+ (\text{Sign}_0^+(u_1 - u_2) \chi_{[u_1 \neq u_2]} + \rho \chi_{[u_1 = u_2]}) \leq \int_{\Omega} (\phi_1 - \phi_2)^+ + \int_{\Gamma} (\psi_1 - \psi_2)^+.$$

Enfin, on pose $\rho = \text{Sign}_0^+(w_1 - w_2)$, et on en déduit le résultat du théorème.

Quant au problème d'évolution DP , le résultat d'unicité est assez bien connu dans le cas des conditions au bord Dirichlet homogènes. En effet, le cas où γ est une fonction continue croissante découle de [28] et le cas où γ est un graphe maximal monotone découle du travail récent [30]. Dans [Ig21], on étudie le cas général et on montre le résultat suivant

THÉORÈME 2.2. *Étant données $f_1, f_2 \in L^{p'}(0, T; L^{p'}(\Omega))$, $g_1, g_2 \in L^{p'}(0, T; L^{p'}(\partial\Omega))$, $z_{10}, z_{20} \in L^{p'}(\Omega)$ et $w_{10}, w_{20} \in L^{p'}(\partial\Omega)$. Si (z_i, w_i) , $i = 1, 2$, sont deux solutions faibles sur $[0, T]$ de DP pour f_i, g_i, z_{i0} et w_{i0} , $i = 1, 2$. alors*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (z_1(t) - z_2(t))^+ + \int_{\partial\Omega} (w_1(t) - w_2(t))^+ &\leq \int_{\Omega} (z_{10} - z_{20})^+ + \int_{\partial\Omega} (w_{10} - w_{20})^+ \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Omega} (f_1(\tau) - f_2(\tau))^+ d\tau + \int_0^t \int_{\partial\Omega} (g_1(\tau) - g_2(\tau))^+ d\tau \end{aligned}$$

pour tout $t \in]0, T[$. En particulier, le problème DP admet au plus une solution faible.

L'outil principal qu'on a utilisé pour la preuve de ce théorème est la notion de solution intégrale. On adapte moyennant le lemme d'intégration par parties les arguments qu'on a donné pour la preuve d'unicité pour le problème stationnaire.

3. Problème sans contraintes.

Notons que dans ce cas $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ et qu'a priori aucune condition de type (1.5) ne s'impose à l'existence de solutions ni pour S ni pour DP . Comme on l'a dit au début, l'étude du problème d'évolution est fondée sur la théorie des semi groupes non linéaires, et donc fortement liée à l'étude du problème stationnaire associé. En effet, le schéma discrétisé implicite en temps est équivalent au problème stationnaire S .

THÉORÈME 3.3. *Sous la condition (1.5), pour tout $\phi \in L^\infty(\Omega)$ et $\psi \in L^\infty(\Gamma)$, il existe une unique solution faible $[u, z, w]$ de (S). De plus, $(u, z, w) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Gamma)$.*

En effet, de manière standard, pour montrer l'existence, on approche les graphes maximaux monotones γ et β par des graphes assez réguliers (bi-lipschitz par exemple). Puis on montre la compacité (faible suffit) dans L^1 de z et w et la compacité faible de w dans $W^{1,p}$. Puis on passe à la limite dans l'équation. A l'aide de la contraction (2.6), on peut montrer dans ce cas, des estimations L^∞ indépendantes des approximations pour les solutions. Ce qui nous permet de montrer aussi des estimations $W^{1,p}$ pour w . Et par des raisonnements de monotonie on déduit l'existence. Les détails de la preuve sont donnés dans [Ig8], pour le cas du Laplacien. Mais le raisonnement reste le même si on remplace le laplacien par l'opérateur de Leray-Lions (voir [Ig1]).

Ainsi, pour montrer l'existence de solution pour le problème d'évolution, on considère le problème de Cauchy associé à DP

$$(3.8) \quad \begin{cases} V'(t) + \mathcal{B}_0^{\gamma,\beta}(V(t)) \ni (f, g) & t \in (0, T) \\ V(0) = (z_0, w_0). \end{cases}$$

où l'opérateur $\mathcal{B}_0^{\gamma,\beta}$ est défini dans $X = L^1(\Omega) \times L^1(\Gamma)$ muni de sa norme naturelle $\|(z, w)\|_X = \|w\|_{L^1(\Omega)} + \|z\|_{L^1(\Gamma)}$, par $(\hat{z}, \hat{w}) \in \mathcal{B}_0^{\gamma,\beta}(z, w)$ si et seulement si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $z(x) \in \gamma(u(x))$ p.p. dans Ω , $w(x) \in \beta(u(x))$ p.p. dans $\partial\Omega$, et

$$\int_{\Omega} a(x, Du) \cdot Dv = \int_{\Omega} \hat{z}v + \int_{\partial\Omega} \hat{w}v,$$

pour tout $v \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Comme conséquence du Théorème 3.3, l'opérateur $\mathcal{B}_0^{\gamma,\beta}$ est T-accretif dans X et satisfait

$$L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Gamma) \subset \text{Ran}(I + \mathcal{B}_0^{\gamma,\beta}).$$

Ce qui implique que la fermeture de $\mathcal{B}_0^{\gamma,\beta}$ est m-T-accretif dans X . De plus on montre que

$$\overline{D(\mathcal{B}_0^{\gamma,\beta})}^{L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)} = L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega).$$

Ainsi, pour tout $(z_0, w_0) \in X$, (3.8) admet une unique bonne solution. Ensuite, moyennant les estimations L^∞ du problème stationnaire on montre que la bonne solution est une solution faible de DP , lorsque les données sont L^∞ . On montre ainsi

THÉORÈME 3.4. *Pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $z_0 \in L^\infty(\Gamma)$, $f \in L^\infty(Q_T)$ et $g \in L^\infty(\Sigma_T)$, il existe une unique solution faible de DP . De plus, $u \in \mathcal{C}([0, \infty); L^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$, $z \in \mathcal{C}([0, \infty); L^1(\Gamma)) \cap L^\infty(\Sigma)$ et*

$$(3.9) \quad \int_{\Omega} u(t) + \int_{\Gamma} z(t) = \int_{\Omega} u_0 + \int_{\Gamma} z_0 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Notons qu'en plus de l'existence, ce cadre L^∞ , nous a permis d'étudier le comportement asymptotique pour les grands temps (voir [Ig8] et Chapitre 4 pour le cas du Laplacien).

4. Non linéarité de type Hele-Shaw.

Le problème de Hele-Shaw constitue l'exemple typique du cas où l'image de γ n'est pas égal à \mathbb{R} . En effet, rappelons que le problème est dit de type Hele-Shaw, lorsque $\gamma = H$, où H est le graphe d'Heaviside défini

par

$$H(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ [0, 1] & \text{si } r = 0 \\ 1 & \text{si } r > 0. \end{cases}$$

L'étude de ce cas particulier est aussi bien motivé par le problème physique qu'il modélise, puisqu'il apparaît dans l'étude de la formulation faible du modèle mathématique de Hele Shaw (voir [48], [51] et Chapitre 0 pour la modélisation du problème), que par le fait que c'est un exemple typique où \mathcal{R} peut être (en fonction de $Im(\beta)$) différent de \mathbb{R} . Il a été étudié avec des conditions au bord statiques aussi bien Neumann que Dirichlet. Ce cas est complètement différent du cas de la section précédente : une condition nécessaire apparaît pour l'existence d'une solution, (si $Im(\beta) \neq \mathbb{R}$). Rappelons que dans le cas de Neumann statique, i.e. $\beta \equiv 0$, l'existence reste vraie seulement si $\int_{\Omega} u_0 + \int_0^t (\int_{\Omega} f + \int_{\Gamma} g) \in (0, |\Omega|)$ pour tout $t \in [0, T)$ (cf. [Ig10] et [68]). Ceci provient, en particulier, du fait que les solutions conservent la masse. Ici, on montre que cette condition devient $\int_{\Omega} u_0 + \int_{\Gamma} z_0 + \int_0^t (\int_{\Omega} f + \int_{\Gamma} g) \in (0, |\Omega| + \int_{\Gamma} \sup_{r \in \mathbb{R}^+} \beta(\cdot, r))$.

On suppose que $\beta : \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Caratheodory, telle que $\beta(x, r)$ est croissante en r ,

$$\beta(\cdot, 0) = 0, \quad \text{et} \quad \beta(\cdot, r) \leq a(\cdot) |r| + b(\cdot) \quad \text{p.p. dans } \Gamma \text{ et pour tout } r \in \mathbb{R}^+$$

avec $a, b \in L^\infty(\Omega)$. De plus, on pose $\bar{\beta}(x) = \sup_{r \in \mathbb{R}} \beta(x, r)$ p.p. $x \in \Gamma$, et on suppose que

$$\bar{\beta}(x) = +\infty \text{ ou bien } x \in \Gamma \quad \text{ou} \quad \bar{\beta} \in L^1(\Gamma);$$

ainsi

$$\mathcal{R} = \left[0, 1 + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} \bar{\rho} \right).$$

Le problème auquel on s'intéresse est le suivant

$$E(u_0, z_0, f, g) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta w = f(t, x), \quad u \in H(w) & \text{dans } Q_T = (0, T) \times \Omega \\ \partial_t z + \partial_\eta w = g(t, x), \quad z = \beta(x, w) & \text{sur } \Sigma_T = (0, T) \times \Gamma \\ u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad z(0) = z_0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Dans [Ig17], on montre l'existence et l'unicité d'une solution (u, z) , et aussi quelques propriétés qualitatives assez naturelles pour le modèle physique, comme la croissance de l'interface mobile et la décroissance de la zone mousseuse⁴.

Contrairement au cas de la section précédente, dans le cas où $Im(\gamma) \neq \mathbb{R}$, même si z est borné, on perd les estimations L^∞ lorsque les conditions au bord sont non homogènes ou dynamiques. Ceci complique les estimations H^1 sur u . Dans [Ig17], on traite le cas particulier de Hele Shaw, en régularisant avec l'équation des milieux poreux. Récemment, dans [Ig21] on a obtenu des résultats d'existence et d'unicité dans le cas général, c-à-d γ et β deux graphes maximaux monotones et a de type Leray-Lions.

THÉORÈME 4.5. Soient $0 < T \leq \infty$, $f \in L^2_{loc}([0, T]; L^2(\Omega)^+)$, $g \in L^2_{loc}([0, T]; L^2(\Gamma)^+)$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)^+$, $0 \leq u_0 \leq 1$ et $z_0 \in L^1(\Gamma)^+$ telle que $\int_0^{z_0} \beta(\cdot, r) dr \in L^1(\Omega)$ et

$$(4.10) \quad z_0(x) \in \overline{Im(\beta(x, \cdot))} \quad \text{p.p. } x \in \Gamma.$$

Posons

$$\mu(t) = \int_{\Omega} u_0 + \int_{\Gamma} z_0 + \int_0^t \left(\int_{\Omega} f + \int_{\Gamma} g \right)$$

⁴zone constitué d'un mélange d'eau et de glace

et

$$(4.11) \quad T_0 = \max \left\{ t \in [0, T] ; \mu(t) < 1 + \int_{\Gamma} \bar{\beta}(x) dx \right\}.$$

Alors, il existe un unique triplet (u, z, τ) , tel que $\tau \leq T_0$, (u, z) est la solution de $E(u_0, z_0, f, g)$ sur $[0, \tau)$, $\int u(t) < 1$ pour tout $t \in [0, \tau)$ et $\int u(\tau) = 1$. De plus, on a

(1) Pour tout $t \in [0, \tau)$,

$$\int_{\Omega} u(t) + \int_{\Gamma} z(t) = \mu(t).$$

(2) Si (u_i, z_i) est une solution faible de $E(u_{0i}, z_{0i}, f_i, g_i)$ alors

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\| \left(u_1(t) - u_2(t) \right)^+ \right\|_{L^1(\Omega)} + \frac{d}{dt} \left\| \left(z_1(t) - z_2(t) \right)^+ \right\|_{L^1(\Gamma)} \\ & \leq \left\| \left(f_1 - f_2 \right)^+ \right\|_{L^1(\Omega)} + \left\| \left(g_1 - g_2 \right)^+ \right\|_{L^1(\Gamma)} \end{aligned}$$

dans $\mathcal{D}'(0, \tau)$.

(3) Pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \tau$,

$$u(t_1) \leq u(t_2) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

(4) Pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \tau$,

$$\left[u(t_2) < 1 \right] \subseteq \left[u(t_2) = u(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(t) \right] \subseteq \left[u(t_1) < 1 \right].$$

Ce théorème montre l'existence d'une solution et l'unicité jusqu'à l'instant $\tau \leq T_0$. Du point de vue physique, τ est le temps où le domaine physique est plein. Rappelons que pour le cas de condition au bord statiques, c-à-d $\beta \equiv 0$, on a $\tau = T_0$ et le modèle perd sa validité au delà de l'instant τ . Pour le cas de conditions au bord dynamiques, le théorème suivant prouve que même si le domaine est plein au temps τ , un problème d'évolution continue avec une équation dynamique sur le bord jusqu'au temps T_0 .

En plus de l'existence et de l'unicité de solutions, on montre en plus (dans [Ig17]) quelques propriétés qualitatives des solutions en rapport avec la réalité physique du modèle. C'est l'objet du théorème suivant.

THÉORÈME 4.6. *Sous les conditions du Théorème 4.5, on suppose en plus que de $\beta(x, r) = \beta(r)$ et on considère (u, z) la solution de $E(u_0, z_0, f, g)$. On a*

(1) Les propriétés 1), 2), 3) et 4) restent vraies avec $\tau = T_0$.

(2) S'il existe $\tau \in (0, \infty)$, tel que $u(\tau) \equiv 1$, alors $u(t) \equiv 1$ dans Ω pour tout $t \in [\tau, T_0]$ et z est l'unique solution de

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} z \xi + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \xi = \int_{\Omega} f \xi + \int_{\Gamma} g \xi \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\tau, T_0),$$

pour tout $\xi \in C^1(\bar{\Omega})$, où $w \in L^2_{loc}(\tau, T_0; H^1(\Omega))$ est telle que $z = \beta(\cdot, w)$ p.p. sur Σ_T .

REMARQUES 4.1. - *En particulier, le Théorème 4.6 montre que même si le domaine est plein à l'instant $\tau < T_0$, le modèle reste valable sur $[\tau, T_0)$. En effet, à partir de l'instant τ , le domaine est plein de liquide de pression w vérifiant*

$$(4.12) \quad \begin{cases} -\Delta w = f(t, x), & \text{dans } (\tau, T) \times \Omega \\ \partial_t z + \partial_n w = g(t, x), \quad z = \beta(x, w) & \text{sur } (\tau, T) \times \Gamma. \end{cases}$$

C'est un cas particulier de problème d'évolution avec une équation elliptique à l'intérieur de Ω et une équation d'évolution sur le bord. Dans [Ig1], on montre l'existence et l'unicité de solution pour ce type de problème dans le cas général d'un graphe maximal monotone β . Ainsi, la propriété 2. du Théorème 4.6 découle des résultats de [Ig1] et la propriété 3. du théorème 4.5.

- En général on ne sait pas quand est ce que $\tau = T_0$.
- En termes de problème de Hele Shaw, la propriété 3 du théorème 4.5 reflète le fait que le domaine se remplit en faisant avancer la frontière libre, ceci est due à l'injection du fluide par la frontière Γ .
- La propriété 4 décrit l'évolution du $[u(t) < 1]$, la zone mousseuse. En particulier, 4) implique qu'elle est décroissance par rapport au temps.

5. Problème sans contraintes sur les domaines.

Dans le cas où γ et β sont deux graphes maximaux monotones définis partout, i.e.

$$\mathcal{D}(\gamma) = \mathcal{D}(\beta) = \mathbb{R},$$

on approche les seconds membres par des fonctions L^∞ et les graphes par des graphes dont les images sont égales à \mathbb{R} . Ainsi (d'après les résultats de la section précédente), les problèmes approximants sont bien posés et leur solutions sont des fonctions L^∞ . Notons que les estimations L^∞ dépendent des graphes considérés pour l'approximation et elles sont perdues lorsque l'image d'un des graphes est différent de \mathbb{R} . Cependant, on montre que

$$\|z\|_{L^1(\Omega)} + \|w\|_{L^1(\Gamma)} \leq \|\phi\|_{L^1(\Omega)} + \|\psi\|_{L^1(\Gamma)}$$

et que

$$(5.13) \quad \inf \left(\|u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} w\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \|u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} w\|_{W^{1,p}(\Omega)} \right) \leq C (\|\phi\|_{V^{1,p}(\Omega)} + \|\psi\|_{V^{1,p}(\Gamma)}),$$

où la constante C ne dépend pas des graphes. La compacité de z et u dans $L^1(\Omega)$ et $L^1(\Gamma)$ (respectivement) n'est pas systématique pour n'importe quel choix d'approximation. En fait, on utilise une approximation particulière qui préserve la monotonie des solutions, on considère

$$\beta^{n,m} = \frac{1}{n} Id_{\mathbb{R}}^+ - \frac{1}{m} Id_{\mathbb{R}}^- + \beta \quad \text{et} \quad \gamma^{n,m} = \frac{1}{n} Id_{\mathbb{R}}^+ - \frac{1}{m} Id_{\mathbb{R}}^- + \gamma.$$

On montre que les solutions $z^{m,n}$ et $w^{m,n}$, préservent la monotonie, c-à-d $z_{m,n}$ et $w_{m,n}$ sont croissantes en n et décroissantes en m , et alors on peut en extraire une suite compacte dans $L^1(\Omega)$ et $L^1(\Gamma)$ respectivement. Ces compacités impliquent avec la préservation de la masse (la condition de type (1.5) et (5.13)) que $u^{m,n}$ est faiblement compacte dans $W^{1,p}$. Enfin, par des raisonnements de monotonie standards sur γ , β et a , on en déduit l'existence de solution faible du problème limite.

THÉORÈME 5.7. *Si $Dom(\gamma) = Dom(\beta) = \mathbb{R}$, alors, pour tout $\phi \in V^{1,p}(\Omega)$ et $\psi \in V^{1,p}(\partial\Omega)$ avec*

$$(5.14) \quad \int_{\Omega} \phi + \int_{\partial\Omega} \psi \in \mathcal{R}_{\gamma,\beta},$$

il existe une solution faible $[u, z, w]$ du problème S .

En particulier, lorsque $\gamma(r) = \beta(r) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, on montre grâce au Théorème 5.7, le résultat suivant.

COROLLAIRE 5.1. *Pour tout $\phi \in V^{1,p}(\Omega)$ et $\psi \in V^{1,p}(\partial\Omega)$ avec*

$$(5.15) \quad \int_{\Omega} \phi + \int_{\partial\Omega} \psi = 0,$$

il existe une unique (à une constante additive près) solution faible $u \in W^{1,p}(\Omega)$ du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(x, Du) = \phi & \text{dans } \Omega \\ a(x, Du) \cdot \eta = \psi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

au sens $\int_{\Omega} a(x, Du) \cdot Dv = \int_{\partial\Omega} \psi v + \int_{\Omega} \phi v$, pour tout $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Quand au problème d'évolution, on a obtenu récemment dans [Ig21], le résultat suivant :

THÉORÈME 5.8. Soient $T > 0$, $f \in L^{p'}(0, T; L^{p'}(\Omega))$, $g \in L^{p'}(0, T; L^{p'}(\partial\Omega))$, $z_0 \in L^{p'}(\Omega)$ et $w_0 \in L^{p'}(\partial\Omega)$ telles que $\int_{\Omega} j_{\gamma}^*(z_0) + \int_{\Gamma} j_{\beta}^*(w_0) < \infty$. Supposons aussi que

$$z_0 \in \overline{\text{Im}(\gamma)}, \text{ p.p. } \Omega, \quad w_0 \in \overline{\text{Im}(\beta)} \text{ p.p. } \Gamma$$

et que

$$\mu(t) := \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} z_0 + \int_{\Gamma} w_0 + \int_0^t \left(\int_{\Omega} f + \int_{\Gamma} g \right) \right) \in \mathcal{R} \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Alors, il existe une solution (z, w) du problème DP sur $[0, T]$ avec $z(0) = z_0$ et $w(0) = w_0$

En effet, on considère à nouveau le problème de Cauchy (3.8). Notons que dans ce cas l'opérateur $\mathcal{B}_0^{\gamma, \beta}$ est T-accretif dans X et satisfait

$$\left\{ (\phi, \psi) \in V^{1,p}(\Omega) \times V^{1,p}(\partial\Omega) : \int_{\Omega} \phi + \int_{\partial\Omega} \psi \in \mathcal{R}_{\gamma, \beta} \right\} \subset \text{Ran}(I + \mathcal{B}_0^{\gamma, \beta})$$

et

$$\overline{D(\mathcal{B}_0^{\gamma, \beta})}^{L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)} = \left\{ (z, w) \in L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega) : z \in \overline{\text{Im}(\gamma)} \text{ p.p. } \Omega \text{ et } w \in \overline{\text{Im}(\beta)} \text{ p.p. } \Gamma \right\}.$$

Il est clair que ni $\mathcal{B}_0^{\gamma, \beta}$ ni sa fermeture n'est m-accretive dans $L^1(\Omega)$. Néanmoins, sous les conditions du Théorème 5.8, on montre que le schéma discretisé associé à DP admet une solution pour tout $i = 1, \dots, n$ et pour tout ϵ assez petit. Ainsi, (3.8) admet une unique bonne solution qu'on montre solution faible de DP.

6. Problème avec contraintes sur les domaines.

Contrairement au cas précédent, dans le cas où l'un des domaines de γ ou bien β est différent de \mathbb{R} , la compacité (au moins faible) dans $L^1(\Omega)$, de z et w solutions des problèmes relaxés constitue la difficulté principale pour montrer l'existence de solution. Puisque l'approximation avec les graphes $\gamma^{n,m}$ et $\beta^{n,m}$ ne modifie pas les domaines, la question se pose lors de l'approximation avec des graphes partout définis, en particulier les approximations de Yoshida γ_r et β_r . Ainsi, dans le cas où l'un des domaines des non linéarités est différent de \mathbb{R} , d'autres hypothèses supplémentaires pour compenser la perte de compacité sont nécessaires. Dans cette section, on traite deux cas particuliers,

- $\mathcal{D}(\gamma) = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}(\beta) \neq \mathbb{R}$: on peut toujours montrer la compacité de z dans $L^1(\Omega)$, alors que pour celle de w , on exige une hypothèse supplémentaire sur a , de type a régulier (voir sous-section 1).
- $\mathcal{D}(\gamma) \neq \mathbb{R}$: la solution faible n'existe pas en général (voir le contre exemple à l'introduction). Ce type de contrainte est très restrictif vue qu'elle peut s'étendre jusqu'au bord. Cependant, on montre que le problème reste bien posé dans le cas de conditions au bord homogènes (voir sous-section 2).

6.0.1. *Contraintes frontières sur le domaine et a est régulier.* On dit que a est régulier (voir [8]) lorsque, pour tout $\phi \in L^\infty(\Omega)$ tel qu'il existe une solution u bornée pour le problème Dirichlet homogène

$$(D) \quad \begin{cases} -\text{div } a(x, Du) = \phi & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

il existe $g \in L^1(\partial\Omega)$ telle que u est aussi solution du problème de Neumann non homogène

$$(N) \quad \begin{cases} -\text{div } a(x, Du) = \phi & \text{dans } \Omega \\ a(x, Du) \cdot \eta = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La fonction a correspondant à l'opérateur linéaire avec des coefficients réguliers et l'opérateur p -Laplacien sont réguliers (voir [33] et [77]). La régularité du Laplacien est même plus forte que ca. En effet, il existe une application linéaire $T : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega)$, telle que la solution faible de (D) pour $\phi \in L^1(\Omega)$ est aussi solution faible de (N) pour $g = T(\phi)$ (voir [27]).

Moyennant cette propriété de a , on peut relaxer les hypothèses sur le bord et β peut ne pas être partout définie. Ainsi, on montre que

THÉORÈME 6.9. Si $\mathcal{D}(\gamma) = \mathbb{R}$ et a est régulier alors, pour tout $\phi \in V^{1,p}(\Omega)$ et $\psi \in V^{1,p}(\partial\Omega)$ vérifiant 5.14, il existe une solution faible $[u, z, w]$ du problème S.

Dans le même esprit que la Proposition C (iv) de [27] pour l'opérateur Laplacien, comme conséquence de Théorème 6.9, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 6.2. *a est régulier si et seulement si pour tout $\phi \in V^{1,p}(\Omega)$ il existe $T(\phi) \in V^{1,p}(\partial\Omega)$ telle que la solution u de (D) est une solution de (N) avec $g = T(\phi)$. De plus, l'application $T : V^{1,p}(\Omega) \rightarrow V^{1,p}(\partial\Omega)$ satisfait*

$$\int_{\Omega} (T(\phi_1) - T(\phi_2))^+ \leq \int_{\Omega} (\phi_1 - \phi_2)^+,$$

pour tout $\phi_1, \phi_2 \in V^{1,p}(\Omega)$.

6.0.2. Contraintes intérieures sur le domaine et conditions au bord homogènes. Enfin, notons que pour le cas $\psi = 0$; i.e. Neumann homogène, ainsi que pour Dirichlet homogène; i.e. $\mathcal{D}(\beta) = \{0\}$, on a le résultat d'existence et d'unicité suivant sans conditions sur γ , dans le même sens que les résultats de [27] pour le Laplacien et des données L^1 .

THÉORÈME 6.10. *On suppose que $\psi \equiv 0$. Si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :*

- $\mathcal{D}(\beta) = \mathbb{R}$
- $\mathcal{D}(\beta) = \{0\}$.

Alors, pour tout $\phi \in V^{1,p}(\Omega)$ telle que $\int_{\Omega} \phi \in \mathcal{R}_{\gamma,\beta}$, il existe une solution faible $[u, z, w]$ du problème (S), avec $z \ll \phi$.

7. Solution Entropique.

Il a été remarqué dans [21], que pour $1 < p \leq 2 - \frac{1}{N}$, il existe $f \in L^1(\Omega)$ telle que le problème

$$u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega), \quad u - \Delta_p(u) = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega),$$

n'a pas de solution. Pour contourner cette difficulté et pour avoir l'unicité, les auteurs de [21] ont introduit un nouveau concept de solution, appelé solution entropique. Comme dans [8] ou [5], en suivant ces idées, on introduit pour (S), le concept de solution entropique.

DÉFINITION 7.3. Soient $\phi \in L^1(\Omega)$ et $\psi \in L^1(\partial\Omega)$. Le triplet $[u, z, w] \in \mathcal{T}_{tr}^{1,p}(\Omega) \times L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ est une *solution entropique* de S si $z(x) \in \gamma(u(x))$ p.p. Ω , $w(x) \in \beta(u(x))$ p.p. $\partial\Omega$ et

$$(7.16) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} a(x, Du) \cdot DT_k(u - v) + \int_{\Omega} zT_k(u - v) + \int_{\partial\Omega} wT_k(u - v) \\ & \leq \int_{\partial\Omega} \psi T_k(u - v) + \int_{\Omega} \phi T_k(u - v) \quad \forall k > 0, \end{aligned}$$

pour tout $v \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$.

Dans le cas où $\gamma = Id_{\mathbb{R}}$, l'existence de solution entropique a été montrée dans [8], sous l'hypothèse supplémentaire que $\mathcal{D}(\beta) = \mathbb{R}$ ou bien a est régulier. La question a été aussi largement étudiée dans le cas de conditions au bord Dirichlet homogène. Dans [Ig1], on généralise ces résultats à une large classe de graphes maximaux monotones, mmmais le problème reste encore ouvert dans sa généralité.

THÉORÈME 7.11. *Supposons que $D(\gamma) = D(\beta) = \mathbb{R}$ ou bien a est régulier. Si $[0, +\infty[\subset D(\beta)$ (resp. $]-\infty, 0] \subset D(\beta)$), on suppose en plus que*

$$(7.17) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma^0(k) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta^0(k) = +\infty,$$

(resp.

$$(7.18) \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} \gamma^0(k) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} \beta^0(k) = -\infty).$$

Alors,

(i) pour tout $\phi \in L^1(\Omega)$ et $\psi \in L^1(\partial\Omega)$, il existe une solution entropique $[u, z, w]$ du problème S.

(ii) Pour toute $[u_1, z_1, w_1]$ solution entropique de S , $\phi_1 \in L^1(\Omega)$, $\psi_1 \in L^1(\partial\Omega)$, et pour tout $[u_2, z_2, w_2]$ solution entropique de S , $\phi_2 \in L^1(\Omega)$, $\psi_2 \in L^1(\partial\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} (z_1 - z_2)^+ + \int_{\partial\Omega} (w_1 - w_2)^+ \leq \int_{\partial\Omega} (\psi_1 - \psi_2)^+ + \int_{\Omega} (\phi_1 - \phi_2)^+.$$

Pour la preuve de ce théorème, on approche les données f , g , z_0 et w_0 par des fonctions L^∞ , de telle sorte qu'on a existence de solutions faibles par la section précédente, et on passe à la limite. Les hypothèses (7.17) et (7.18) nous sont utiles pour l'identification des tronquées. D'autres hypothèses pour lesquelles le théorème reste vrai sont données dans [Ig21].

Enfin, notons qu'en prenant en compte le Théorème 7.11 et le Corollaire 6.2 on a le résultat suivant pour la caractérisation d'opérateur régulier.

COROLLAIRE 7.3. *a est régulier si et seulement si pour tout $\phi \in L^1(\Omega)$ il existe $T(\phi) \in L^1(\partial\Omega)$ tel que la solution entropique u de (D) est une solution entropique de (N) avec $g = T(\phi)$.*

Unicité de solutions pour des problèmes de diffusion-convection non linéaires .

1. Introduction.

De nombreux modèles physiques tels que les problèmes à frontière libre et les problèmes de filtration dans les milieux poreux entrent dans le cadre des équations de type :

$$(1.1) \quad u_t - \nabla \cdot (|\nabla w|^{p-2} \nabla w + F(u, w)) = f, \quad w \in \beta(u) \quad \text{dans } Q := (0, T) \times \Omega$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, $1 < p < \infty$, φ un graphe maximal monotone. On s'intéresse à l'existence et l'unicité de solutions. La motivation principale pour ces questions consiste à trouver et/ou valider la bonne caractérisation de l'objet mathématique (la solution) qui est censé représenter la solution physique. En général, cette objet est au coeur de toute analyse appliquée et numérique, sa définition est cruciale. Une définition de solution adéquate doit, entre autre, répondre aux questions d'existence et d'unicité. Peut être que la notion de solution la plus standard pour les EDPs de type (1.1) est celle de solution faible, cependant, l'existence ainsi que l'unicité ne sont pas très claires en général. En effet, soit les données du problème ont une régularité assez faible pour défavoriser l'existence, soit cette notion de solution est assez faible pour ne pas pouvoir prendre en compte les phénomènes déterminants du problème physique. Depuis quelques années, l'unicité de solutions faibles entropiques pour les problèmes de type (1.1) (i.e., solution faible vérifiant en plus des inégalités entropiques au sens de S.N. Kruzhkov) est bien connue, au moins pour les conditions au bord de Dirichlet homogènes. En effet, du point de vue mathématique, les inégalités entropiques constituent un outil mathématique important qui permet avec les idées de base de S.N. Kruzhkov sur le doublement et le dédoublement de variables de montrer le principe de comparaison qui permet de déduire l'unicité. Et du point de vue physique, cela permet de décrire des propriétés qui permettent d'exclure les solutions non physiques ; ceci est précisément le cas où l'équation présente un caractère hyperbolique développant des ondes de choc (comme pour les lois de conservation). Ainsi, suivant les hypothèses qu'on a sur φ et sur la dépendance de F en w , l'équation est soit purement parabolique, soit elliptique-parabolique, soit parabolique-hyperbolique, et par conséquent, les différentes notions de solution, telles que faible ou faible entropique doivent être prises en compte. De même, suivant les conditions de régularité sur u_0 et f , les différentes notions de solution, telles que renormalisées ou entropiques renormalisées doivent être considérées. Notre but est de valider la bonne notion de solution en fonction des hypothèses sur les différentes données du problème. En particulier, on s'intéresse au cas où les inégalités entropiques ne sont plus nécessaires pour décrire les solutions physiques, i.e. quand elles ne sont plus nécessaire pour l'unicité.

L'équation (1.1) est considéré avec une condition au bord de type Dirichlet :

$$w = g \quad \text{sur } \Sigma := (0, T) \times \Gamma$$

et une donnée initiale

$$u(0) = u_0.$$

On s'intéresse à l'unicité de u , et plus généralement, à la contraction L^1 et au principe de comparaison pour u par rapport aux données $f \in L^1(Q)$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$. Toute au long de cette section, on se restreint, sans perte de généralité, à $p = 2$. La condition au bord est prise au sens $(w - g) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$; on suppose alors que $g \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$. Pour un domaine Ω suffisamment régulier, on peut considérer $g \in L^2(0, T, H^{1/2}(\partial\Omega))$.

La notion de solution faible pour le problème

$$E(u_0, f, g) \quad \begin{cases} u_t - \nabla \cdot (\nabla w + F(u, w)) = f, & w \in \beta(u) \quad \text{dans } Q := (0, T) \times \Omega \\ w = g \quad \text{sur } \Sigma u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

est définie de manière standard comme suit

DÉFINITION 1.4. *Étant données $u_0 \in L^1(\Omega)$ et $f \in L^1(Q)$. Une solution faible de $E(u_0, f, g)$ est un couple (u, w) tel que $u \in L^1(Q)$, $w - g \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $w \in \beta(u)$, $F(u, w) \in (L^2(Q))^N$, tel que la dérivée au sens de distribution u_t peut être identifiée à un élément χ de $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + L^1(Q)$ qui vérifie*

$$\int_0^T \langle \chi, \xi \rangle + \iint_Q (\nabla w + F(u, w)) \cdot \nabla \xi = \iint_Q f \xi$$

pour toute fonction test $\xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega)$, et tel que

$$\int_0^T \langle \chi, \xi \rangle = - \iint_Q j(v) \xi_t - \int_\Omega u_0(x) \xi(0, x)$$

pour toute fonction test $\xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega)$ qui vérifie $\xi_t \in L^\infty(Q)$ et $\xi(T, \cdot) = 0$.

L'unicité de solution faible dans le cas où $F \equiv 0$ est bien connue. Dans le cas de convection non nulle, la première preuve d'unicité pour ce type de problème remonte à [67] pour le cas où β , β^{-1} et F_1 sont assez régulières (voir aussi [58]). Si β^{-1} est continue, alors le problème est elliptique-parabolique, l'unicité est bien comprise au moins dans le cas homogène et $F(u, w) = F(w)$, lorsque F est Lipschitzienne continue (voir [85]), F Hölderienne d'ordre α , avec $\alpha \geq 1/2$ (voir [28]) et F continue (voir [42]). Alors que dans le cas général où β est un graphe maximal monotone, l'unicité de solution faible n'est pas claire en général. Rappelons que, sans hypothèses supplémentaires sur F , on ne peut pas prétendre que les solutions faibles sont uniques. En effet, la dégénérescence de β fait que le problème peut être hyperbolique dans certaines régions de Ω ; plus précisément dans l'ensemble où u prend des valeurs dans les plats de β .

Exemple : Problème de Stefan : $\beta(r) = (r - 1)^+ - r^-$, en dimension 1, le problème est

$$\begin{cases} u_t = \beta(u)_{xx} + u_x & \text{dans } (0, \infty) \times (0, 1) \\ \beta(u)(t, 0) = \beta(u)(t, 1) = 0 & \text{for } t \in (0, \infty) \\ u(0, x) \equiv 1 & \text{for } x \in (0, 1) \end{cases}.$$

Il est clair que $u_1 \equiv 1$ est une solution faible. D'autre part, on peut voir que

$$u_2(t, x) = F(t + x),$$

avec

$$F(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq s \leq 1 \\ 1 - (s - 1)^2 & \text{if } 1 < s \leq 2 \end{cases}$$

est aussi une solution faible.

Afin d'assurer l'unicité des solutions dans ces cas-ci, et du fait de la présence du caractère hyperbolique, il était naturel d'exiger des conditions supplémentaires, appelées, d'après Kruzhkov [71], "inégalités entropiques". Rappelons que dans le cas où $\beta \equiv 0$, le problème correspond à la loi de conservation scalaire hyperbolique; la question d'existence et d'unicité a été étudiée dans \mathbb{R}^n par Kruzhkov [71], en introduisant la notion de solution entropique. Ceci a été généralisé au domaine borné par Bardos et al [11] pour des données BV , et puis par Otto [86] pour des données générales L^∞ . Quant au cas général, c-à-d. si β est un graphe maximal monotone, alors le problème est hyperbolique-elliptique-parabolique. Une première tentative pour montrer que les problèmes de ce type sont bien posés a été donnée dans [97], et récemment, Carillo a traité de manière très élégante le problème dans le cas Dirichlet homogène en présentant la notion de solutions faibles entropiques et a montré l'existence et l'unicité pour des convections F continues (voir. [39]). Pour le cas Dirichlet non homogène, la question est adressée par Mascia et alt. dans [79]. Ces auteurs emploient l'approche d'Otto [86] (voir également [78]) et Chen, Frid [43] qui donne un sens à la trace normale du flux sur le bord. L'effort principal dans [79] est fait pour traiter les difficultés dues au comportement hyperbolique possible du problème (voir aussi [4] et [84]).

Comme on s'intéresse à l'unicité de solution faible, alors des hypothèses supplémentaires permettant d'ôter le caractère hyperbolique de l'équation sont nécessaires. Du fait que les conditions d'entropie ne sont plus nécessaires dans le cas où le problème est linéaire dans la région hyperbolique et ces régions ne touchent pas le bord, nous laisse supposer

$$(1.2) \quad F(u, w) = F_1(w) + u F_2(w),$$

où F_1 et F_2 sont deux fonctions continues telles que $F_2(g) = 0$. Notons que du fait que F_2 ne dépend pas de x , alors dans le cas non homogène on suppose que $F_2 \equiv 0$.

A notre connaissance, il n'y a pas de résultat d'unicité de solution faible sous la condition (1.2) dans le cas où β^{-1} est discontinue et $g \neq 0$. Quand au cas homogène, le problème a été traité dans [39] pour F continue en supposant que $\beta^{-1}(0) = \{0\}$. Dans [Ig5], on a traité le cas $F_2 \equiv 0$ et F_1 continue Lipschitzienne. Dans [70], l'auteur suppose que F_i , $i = 1, 2$ est continues et satisfait

$$(1.3) \quad |F_1(w) + uF_2(w)| \leq C |w|^2, \text{ pour tout } w \geq r_0$$

où r_0 et C sont des constantes non nulles. Enfin, dans [Ig2] et [Ig18], on traite le cas où F_i juste continues avec des conditions au bord homogènes et puis non homogènes respectivement.

Notons que pour simplifier les preuves et la présentation, on écrit le problème $E(u_0, f, g)$ sous forme

$$E'(u_0, f, g) \quad \begin{cases} j(v)_t - \nabla \cdot (\nabla \varphi(v) + F(j(v), \varphi(v))) = f, & \text{dans } Q \\ \varphi(v) = g & \text{dans } \Sigma \\ j(v)(0) = u_0. \end{cases}$$

où

$$j = (I + \beta)^{-1}, \quad \varphi = (I + \beta^{-1})^{-1} \quad \text{et } v = u + w.$$

DÉFINITION 1.5. Une fonction mesurable $v : Q \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ est dite solution faible $E'(u_0, f, g)$ si $u := j(v) \in L^1(\Omega)$, $w := \varphi(v) \in g + L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ et (u, w) est une solution faible de $E(u_0, f, g)$.

2. Conditions au bord homogènes.

En supposant que $g \equiv 0$, on a le résultat d'unicité suivant

THÉORÈME 2.1. Sous l'hypothèse (1.2), si, pour $i = 1, 2$, $u_{0i} \in L^1(\Omega)$, $f_i \in L^1(Q)$ et (u_i, w_i) est une solution faible de $E(u_{0i}, f_i, 0)$, alors

$$(2.4) \quad \int_{\Omega} (u_1(t) - u_2(t))^+ \leq \int_{\Omega} (u_{01} - u_{02})^+ + \int_0^t \int_{\Omega} \eta(f_1 - f_2),$$

avec $\eta \in \text{Sign}^+(u_1 - u_2)$ p.p. dans Q . En particulier, étant données $u_0 \in L^1(\Omega)$ et $f \in L^1(Q)$, il existe au plus un u tel que le couple (u, w) est une solution faible de $E(u_0, f, 0)$.

Les preuves d'unicité de solutions faibles pour des convections continues dans le cas homogène sont fondées essentiellement sur la notion de solution faible entropique et les techniques de doublement et dédoublement de variables. Afin de montrer l'utilité de l'utilisation des ces arguments, nous donnons un aperçu sur une des preuves dans le cas où la convection $F(u, w) = F(w)$ est régulière et β strictement croissant. .

2.0.3. Une solution faible est elle une solution intégrale ? Soient $u_0 \in L^1(\Omega)$ et $h \in L^1(Q)$. Une fonction $u \in L^1(Q)$ est une sous-solution (resp. sur-solution) intégrale si $\text{ess-lim}_{t \rightarrow 0} \|(u(t) - u_0)^+\|_{L^1(\Omega)} = 0$, (resp. $\text{ess-lim}_{t \rightarrow 0} \|(u_0 - u(t))^+\|_{L^1(\Omega)} = 0$) et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u(t) - j(z))^+ &\leq \int_{[u(t) > j(z)]} (f - Az) + \int_{[u(t) = j(z)]} (f - Az)^+ \\ \text{(resp. } \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (j(z) - u(t))^+ &\leq \int_{[j(z) > u(t)]} (Az - f) + \int_{[u(t) = j(z)]} (Az - f)^+ \end{aligned}$$

dans $\mathcal{D}'(0, T)$, pour toute fonction mesurable z telle que $j(z) \in L^1(\Omega)$, $\varphi(z) \in H_0^1(\Omega)$ et

$$Az := -\Delta \varphi(z) - \nabla \cdot F(\varphi(z)) \in L^1(\Omega).$$

Une fonction $u \in L^1(Q)$ est dite solution intégrale si, $\text{ess-lim}_{t \rightarrow 0} \|u_0 - u(t)\|_{L^1(\Omega)} = 0$ et

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(t) - j(z)| \leq \int_{[u(t) \neq j(z)]} (f - Az) \text{Sign}(u - z) + \int_{[u(t) = j(z)]} |Az - f|$$

dans $\mathcal{D}'(0, T)$, pour toute fonction mesurable z telle que $j(z) \in L^1(\Omega)$, $\varphi(z) \in H_0^1(\Omega)$ et $Az \in L^1(\Omega)$. En d'autres termes, u est une solution intégrale si elle est à la fois sous-solution intégrale et sur-solution intégrale.

THÉORÈME 2.2. ([12]) *Si u est une sous-solution intégrale et \tilde{u} est une sur-solution intégrale, alors u et \tilde{u} vérifie le principe de comparaison ; i.e.*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u(t) - \tilde{u}(t))^+ \leq \int_{[u(t) > \tilde{u}(t)]} (f(t) - \tilde{f}(t)) + \int_{[u(t) = \tilde{u}(t)]} (f(t) - \tilde{f}(t))^+ \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T).$$

En particulier, il y a unicité de solution intégrale.

Ainsi, il suffit de montrer qu'une solution faible est à la fois sous-solution et sur-solution intégrale. Soit u une solution faible et z une fonction mesurable telle que $j(z) \in L^1(\Omega)$, $\varphi(z) \in H_0^1(\Omega)$ et $Az \in L^1(\Omega)$. Il est clair que $H_{\varepsilon}(w - \varphi(z)) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, donc

$$\left\langle u_t, H_{\varepsilon}(w - \varphi(z)) \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} + \int_{\Omega} (\nabla w + F(w)) \cdot \nabla H_{\varepsilon}(w - \varphi(z)) = \int_{\Omega} H_{\varepsilon}(w - \varphi(z)) f.$$

En retranchant des deux cotés le terme $\int_{\Omega} (\nabla z + F(z)) \cdot \nabla H_{\varepsilon}(w - \varphi(z))$ et en utilisant la positivité de $|\nabla(w - z)|^2 H'_{\varepsilon}(w - \varphi(z))$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle u_t, H_{\varepsilon}(w - \varphi(z)) \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} + \int_{\Omega} (F(\varphi(v)) - F(\varphi(z))) \cdot \nabla H_{\varepsilon}(\varphi(v) - \varphi(z)) \\ \leq \int_{\Omega} (h - Az) H_{\varepsilon}(\varphi(v) - \varphi(z)). \end{aligned}$$

A l'aide du lemme d'intégration par partie, le premier terme donne

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle u_t, H_{\varepsilon}(w - \varphi(z)) \right\rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle j(v)_t, H_{\varepsilon}(\varphi(v) - \varphi(z)) \right\rangle \\ (2.5) \qquad \qquad \qquad &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_z^z H_{\varepsilon}(\varphi(s) - \varphi(z)) dj(s) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_z^v \text{Sign}_0^+(\varphi(s) - \varphi(z)) dj(s). \end{aligned}$$

Ainsi, si φ est strictement monotone, alors $\text{Sign}_0^+(\varphi(s) - \varphi(z)) = \text{Sign}_0^+(s - z)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, et

$$(2.6) \qquad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_z^v \text{Sign}_0^+(\varphi(s) - \varphi(z)) dj(s) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u - j(z))^+.$$

D'autre part si F est Lipschitz, alors

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (F(\varphi(v)) - F(\varphi(z))) \cdot \nabla H_{\varepsilon}(\varphi(v) - \varphi(z)) \\ (2.7) \qquad \qquad \qquad = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{0 \leq \varphi(v) - \varphi(z) \leq \varepsilon} (F(\varphi(v)) - F(\varphi(z))) \cdot \nabla(\varphi(v) - \varphi(z)) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit que u est une sous-solution intégrale. De la même manière on montre que u est une sur-solution intégrale. D'où l'unicité de solution faible.

REMARQUES 2.1. (1) *Si F est α -Holderienne avec $\alpha \geq 1/2$, il suffit d'utiliser l'inégalité Young. Mais si F est juste continue, il n'est pas clair que (2.7) est vérifiée. Cependant, elle reste vraie si $z \equiv k$ avec $k \in \mathbb{R}$.*

(2) *Si φ est croissante au sens large, (2.5) n'est plus vérifiée.*

2.0.4. *Une solution faible est elle une solution faible entropique ?* On commence par rappeler la définition de solution faible entropique telle c'est donnée dans [39].

DÉFINITION 2.6. (voir [39]) *Une solution faible entropique est une solution faible qui vérifie les inégalités entropiques :*

$$(IE^+) \quad \int \int_Q \left\{ -(j(v) - j(k))^+ \xi \psi_t + \left(\nabla \varphi(v) + F(j(v), \varphi(v)) - F(j(k), \varphi(k)) \right) \cdot \nabla \xi \psi \text{Sign}_0^+(v - k) \right\} \\ \leq \int \int_Q f \xi \psi \text{Sign}_0^+(v - k) - \int_{\Omega} \xi \psi(0)(u_0 - k)^+,$$

et

$$(IE^-) \quad \int \int_Q \left\{ -(j(v) - j(-k))^- \xi \psi_t + \left(\nabla \varphi(v) + F(j(v), \varphi(v)) - F(j(-k), \varphi(-k)) \right) \cdot \nabla \xi \psi \text{Sign}_0^+(-k - v) \right\} \\ \leq \int \int_Q f \xi \psi \text{Sign}_0^+(-k - v) - \int_{\Omega} \xi \psi(0)(u_0 - j(-k))^-,$$

pour tout $(k, \xi, \psi) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \times \mathcal{D}(-\infty, T)$ et aussi pour tout $(k, \xi, \psi) \in \mathbb{R}^+ \times H^1(\Omega) \times \mathcal{D}(-\infty, T)$.

THÉORÈME 2.3. (Cf. [39]) *Si, pour $i = 1, 2$, $u_{0i} \in L^1(\Omega)$, $f_i \in L^1(Q)$ et v_i est une solution faible $E'(u_{0i}, f_i)$, alors*

$$(2.8) \quad \int_{\Omega} \left(j(v_1)(t) - j(v_2)(t) \right)^+ \leq \int_{\Omega} \left(u_{01} - u_{02} \right)^+ + \int_0^t \int_{\Omega} \eta(f_1 - f_2),$$

avec $\eta \in \text{Sign}^+(j(v_1) - j(v_2))$ p.p. Q .

Pour établir qu'une solution faible est une solution faible entropique, on considère $H_{\varepsilon}(\varphi(u) - \varphi(k)) \xi$ comme fonction test dans la formulation faible et on fait tendre $\varepsilon \rightarrow 0$. Le terme de convection ne pose plus de problème (moyennant un petit travail supplémentaire provenant du terme $u F_2(w)$). Puisque φ est croissante au sens large, on introduit l'ensemble

$$E = \left\{ r \in \mathbb{R} : \varphi^{-1} \text{ est discontinue en } r \right\}.$$

Il est clair que $H_{\varepsilon}(\varphi(u) - \varphi(k)) \xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, et pour tout $(k, \xi) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \cup \mathbb{R}^+ \times H^1(\Omega)$ tel que $\varphi(k) \in E$, $\text{Sign}_0^+(\varphi(s) - \varphi(k)) = \text{Sign}_0^+(s - z)$. Alors en utilisant les mêmes arguments que pour les solutions intégrale et Remarque 2.1, on montre le lemme suivant :

LEMME 2.1. *Pour tout $(k, \xi, \psi) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \times \mathcal{D}((-\infty, T)) \cup \mathbb{R}^+ \times H^1(\Omega) \times \mathcal{D}((-\infty, T))$ telle que $\varphi(k) \notin E$, (IE^+) est vérifiée.*

Pour montrer que (IE^+) reste vraie pour le restant des k , on utilise le même principe que [39] pour le problème elliptique. En effet, pour $r \in E$, on considère $[m, M] = \varphi^{-1}(r)$. On peut voir facilement que (IE^+) reste vraie pour $k = M$. Ensuite, il faut montrer une inégalité entropique pour $k = m$, (en prenant une suite k_n telle que $\varphi(k_n) \notin E$ et $k_n \uparrow m$). Enfin, pour pouvoir utiliser le Lemme 2 de [39] (voir aussi Chapitre 0 sur les rappels), passer à l'intérieur avec des inégalités entropiques et déduire que (IE^+) reste vrai pour tout $k \in [m, M]$. Rappelons que (IE^+) doit être vérifiée pour tout $(k, \xi, \psi) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \times \mathcal{D}(-\infty, T)$ et aussi pour tout $(k, \xi, \psi) \in \mathbb{R}^+ \times H^1(\Omega) \times \mathcal{D}(-\infty, T)$. Si $\xi \in H_0^1(\Omega)$, les argument précédents permettent d'avoir les (IE^+) pour tout $k \in \mathbb{R}$, puisque le procédé d'approximation de m et M reste possible pour tous les plats. Mais si $\xi \in H^1(\Omega)$ et $0 \in E$, alors le procédé d'approximation précédent ne marche plus. Puisque dans ce cas on ne peut pas avoir une suite de $k_n < m$ et donc négative pour lesquelles (IE^+) reste vérifiés.

Dans [Ig5], on utilise des inégalités entropiques avec des fonctions z au lieu des constantes k . En effet, $H_{\varepsilon}(\varphi(u) - \varphi(z)) \xi$ est une fonction test admissible dès que z est une fonction mesurable vérifiant $\varphi(z) \in H_0^1(\Omega)$. Avec ce choix de fonction test, si on suppose en plus que $\varphi(z) \notin E$, on peut établir des inégalités entropiques semblables à (IE^+) . Ensuite on considère une suite de fonctions z_n mesurables telles que $\varphi(z_n) \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi(z) \notin E$ et $z_n \uparrow m$. Mais, pour les mêmes raisons que pour (2.7), la restriction de cette méthode est que F doit être au moins α -Holderienne avec $\alpha \geq 1/2$.

Dans [Ig3], on montre le théorème dans le cas général, c-à-d β un graphe maximal monotone quelconque et, pour $i = 1, 2$, F_i est continue. Pour montrer que (IE^+) est vérifiée pour tout k tel que $\varphi(k) = 0$ et $\xi \in H^1(\Omega)$, on utilise le fait que (IE^+) est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{R}^+$ et $\xi \in H_0^1(\Omega)$. Plus précisément, on considère une suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\xi_n \in H_0^1(\Omega)$, $0 \leq \xi_n \leq 1$ et $\xi_n \rightarrow 1$ dans $L^1(\Omega)$. Puisque $\xi \xi_n \in H_0^1(\Omega)$, alors

$$(2.9) \quad \begin{aligned} & \iint_Q \left(-(u - j(k))^+ \xi \psi_t + \left(\nabla w + F(u, w) - F(j(k), \varphi(k)) \right) \cdot \nabla \xi \text{Sign}_0^+(u - k) \right) \xi_n \\ & \leq - \iint_Q \left(\nabla w + F(u, w) - F(j(k), \varphi(k)) \right) \cdot \nabla \xi_n \xi \text{Sign}_0^+(u - j(k)) \\ & \quad + \iint_Q f \xi \xi_n \text{Sign}_0^+(u - j(k)) - \int_\Omega \xi \xi_n \psi(0) (u_0 - j(k))^+. \end{aligned}$$

On écrit le terme $I_n := - \iint_Q \left(\nabla w + F(u, w) - F(j(k), \varphi(k)) \right) \cdot \nabla \xi_n \xi \text{Sign}_0^+(u - k)$ sous forme

$$\begin{aligned} I_n &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_Q \left(\nabla w + F(u, w) - F(j(k), \varphi(k)) \right) \cdot \nabla (1 - \xi_n) \xi H_\varepsilon(w - \varphi(k)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_Q \left(\nabla w + F(u, w) - F(j(k), \varphi(k)) \right) \cdot \nabla \left((1 - \xi_n) H_\varepsilon(w - \varphi(k)) \right) \xi \\ & \quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_Q (F(u, w) - F(j(k), \varphi(k))) \cdot \nabla w H'_\varepsilon(w - \varphi(k)) \xi (1 - \xi_n) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{n,\varepsilon}^1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{n,\varepsilon}^2. \end{aligned}$$

Dans un premier temps, on voit que $I_{n,\varepsilon}^2 = \iint_Q \mathcal{F}_\varepsilon \cdot \nabla (\xi(1 - \xi_n))$, où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon &= \int_0^w (F(j(\varphi_0^{-1}(r)), r) - F(j(k), \varphi(k))) H'_\varepsilon(r - \varphi(k)) dr \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\min(w, \varphi(k))}^{\min(w, \varphi(k) + \varepsilon)} (F(j(\varphi_0^{-1}(r)), r) - F(j(k), \varphi(k))) dr, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{n,\varepsilon}^2 = 0$. Alors que pour $I_{n,\varepsilon}^1$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{n,\varepsilon}^1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_Q \left(\nabla w + F(u, w) - F(j(k), \varphi(k)) \right) \cdot \nabla \left((1 - \xi_n) H_\varepsilon(w - \varphi(k)) \xi \right) \\ & \quad - \iint_Q \left(\nabla w + F(u, w) - F(j(k), \varphi(k)) \right) \cdot \nabla \xi (1 - \xi_n) \text{Sign}_0^+(w - \varphi(k)). \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $k \in \mathbb{R}^+$, alors $H_\varepsilon(w - \varphi(k)) (1 - \xi_n) \xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, et en utilisant le lemme d'intégration par partie (voir Chapitre 0 sur les rappels), on peut montrer que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{n,\varepsilon}^1 &\leq \iint_Q \left(\psi_t \int_k^v \text{Sign}_0^+(\varphi(s) - \varphi(k)) dj(s) + f \psi \text{Sign}_0^+(w - \varphi(k)) \right) (1 - \xi_n) \xi \\ & \quad - \iint_Q \left(\nabla w + F(u, w) - F(j(k), \varphi(k)) \right) \cdot \nabla \xi (1 - \xi_n) \text{Sign}_0^+(w - \varphi(k)) \\ & \quad - \int_\Omega \xi (1 - \xi_n) \psi(0) \int_k^{v_0} \text{Sign}_0^+(\varphi(s) - \varphi(z)) dj(s). \end{aligned}$$

Ceci implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^1 \leq 0$. Enfin, en faisant tendre $n \rightarrow \infty$ dans (2.9), on déduit que (IE^+) est vérifiée pour $k \in \mathbb{R}^+$ avec $\varphi(k) = 0$ et $\xi \in H^1(\Omega)$.

Enfin, notons que (IE^-) peut être déduite de (IE^+) , en utilisant le problème

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{j}(\tilde{v}) = \Delta \tilde{\varphi}(\tilde{v}) + \nabla \cdot \tilde{F}(\tilde{j}(\tilde{v}), \tilde{\varphi}(\tilde{v})) - f(t, x), & \text{dans } Q \\ \tilde{\varphi}(\tilde{v}) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \tilde{u}(0) = -u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec $\tilde{F}(r_1, r_2) = -F(-r_1, -r_2)$, pour tout $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ et $\tilde{j} = -j(-r)$ et $\tilde{\varphi} = -\varphi(-r)$, pour tout $r \in \mathcal{D}(\beta)$.

3. Condition au bord non homogène.

Pour le cas de condition au bord non homogène, c-à-d $g \neq 0$, on suppose que

$$F = F(w).$$

Soient u, \hat{u} deux solutions faibles correspondant à la même donnée au bord g , et aux données u_0, \hat{u}_0 et f, \hat{f} , respectivement. Formellement, avec un choix de fonction test $\eta = \text{sign}_0^+(u - \hat{u}) \xi$ et $\xi \geq 0$, dans l'équation, on obtient

$$\int_{\Omega} \xi |j(u) - j(\hat{u})|(T) \leq \int_{\Omega} \xi |u_0 - \hat{u}_0| + \int_Q \xi |f - \hat{f}| - \mathcal{B},$$

où

$$\mathcal{B} = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \xi \text{sign}(w - \hat{w}) \left(\nabla(w - \hat{w}) + (F(w) - F(\hat{w})) \right) \cdot n$$

représente la trace normale du flux sur le bord. Ainsi, si \mathcal{B} est bien défini et positif, en prenant $\xi = 1$ sur Ω , on en déduit alors la contraction dans L^1 et l'unicité pour les solutions faibles. Cependant, bien qu'on puisse, à l'aide de la théorie récente de champs de divergence-mesure, donner un sens à la limite de trace \mathcal{B} , il n'est pas clair comment prouver sa positivité. Par conséquent, nous tendons à générer le terme de bord en prenant une suite de fonction $\xi_h \in H_0^1(\Omega)$, $\xi_h \rightarrow 1$ p.p. sur Ω , lorsque $h \rightarrow 0$. On montre, que la trace limite correspondante sur le bord

$$\mathcal{B}_h = \int_0^T \int_{\Omega} \text{sign}(w - \hat{w}) \left(\nabla(w - \hat{w}) + (F(w) - F(\hat{w})) \right) \cdot \nabla \xi_h,$$

est positive à la limite, sous certaines conditions suffisantes sur la régularité du bord $\partial\Omega$.

En effet, (IE^+) reste vrai lorsque la fonction test $\xi \in H_0^1(\Omega)$. Ainsi, en doublant et dédoublant les variables, on montre que si v, \hat{v} sont des solutions de $E'(u_0, f, g)$ et $(E'(\hat{u}_0, \hat{f}, \hat{g}))$, respectivement, alors

LEMME 3.2. *Soient v, \hat{v} deux solution faible de $(E(u_0, f, g))$ et $(E(\hat{u}_0, \hat{f}, \hat{g}))$ $w = \varphi(v)$ et $\hat{w} = \varphi(\hat{v})$. Il existe $\eta : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $\eta \in \text{Sign}^+(j(v) - j(\hat{v}))$ p.p. sur Q , tel que pour tout $\xi \in H_0^1(\Omega)$, on a pour p.p. $t \in (0, T)$,*

$$\begin{aligned} (3.10) \quad & \int_{\Omega} (j(v)(t) - j(\hat{v})(t))^+ \xi - \int_{\Omega} (u_0 - \hat{u}_0)^+ \xi - \int_0^t \int_{\Omega} \eta (f - \hat{f}) \xi \\ & \leq - \int_0^t \int_{\Omega} \nabla(w - \hat{w})^+ \cdot \nabla \xi - \int_0^t \int_{\Omega} \text{Sign}_0^+(w - \hat{w})(F(w) - F(\hat{w})) \cdot \nabla \xi. \end{aligned}$$

Ainsi, formellement, lorsque ξ converge vers 1 sur Ω , le côté droit de (3.10) devrait être la limite de bord

$$(3.11) \quad \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} (w - \hat{w})^+ + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \text{Sign}_0^+(w - \hat{w})(F(w) - F(\hat{w})) \cdot n,$$

où n est la normale extérieure à $\partial\Omega$. Notons que, si (3.11) peut être comprise au sens ponctuel (par exemple, pour Ω et w, \hat{w} assez réguliers), alors ce terme est négatif, puisque par hypothèse $(w - \hat{w})^+ \geq 0$ dans Ω et $(w - \hat{w})^+ \in H_0^1(\Omega)$.

Ainsi, le problème devient la recherche de suite de fonctions tests $(\xi_h)_{h>0}$, tels que $\xi_h \rightarrow 1$ lorsque $h \rightarrow 0$ p.p. sur Ω , et qui laisserait passer à la limite le côté droit de (3.11), produisant “ des limites négative. Ceci dépend plus de la régularité du domaine.

Afin de formuler les hypothèses exactes sur Ω , on suppose que $\Omega \supset \tilde{\Omega}$ pour tous ouvert $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$ tels que $H_0^1(\tilde{\Omega}) = H_0^1(\Omega)$. Supposons que

(H1) $\partial\Omega$ est de mesure finie (en la mesure de Hausdorff de dim $N - 1$,

et que Ω vérifie la propriété de Poincaré-Friedrichs :

$$(H2) \quad \left| \begin{array}{l} \text{il existe une constante } \mathcal{M}, \text{ indépendante de } h \text{ telle que pour tout } x_0 \in \partial\Omega \\ \int_{B_h(x_0) \cap \Omega} |W|^2 \leq \mathcal{M} h \int_{B_h(x_0) \cap \Omega} |\nabla W|^2, \quad \text{pour tout } W \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right.$$

où $B_h(x_0)$ désigne la boule de centre x_0 et de rayon h .

Sous ces conditions on montre, dans [Ig18], le résultat suivant

THÉORÈME 3.4. *Supposons que (H1) et (H2) sont vérifiées. Soient v, \hat{v} deux solutions de $E(u_0, f, g)$ correspondantes aux données (f, g, u_0) et $(\hat{f}, \hat{g}, \hat{u}_0)$, respectivement. Supposons que $g \leq \hat{g}$. Alors, il existe $\eta : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $\eta \in \text{Sign}^+(j(v) - j(\hat{v}))$ p.p. sur Q , tel pour p.p. $t \in (0, T)$, on a*

$$(3.12) \quad \int_{\Omega} (j(v) - j(\hat{v}))^+(t) \leq \int_{\Omega} (u_0 - \hat{u}_0)^+ + \int_0^t \int_{\Omega} \eta (f - \hat{f}).$$

En particulier, si $\hat{g} \geq g, \hat{f} \geq f$ p.p. sur Q et $\hat{u}_0 \geq u_0$ p.p. Ω , alors $j(\hat{v}) \geq j(v)$ p.p. Q .

REMARQUES 3.2. (1) Notons que la propriété (H2) n'est pas générique ; il se peut qu'il n'y est pas assez de valeurs zéro pour W dans $B_h(0)$ pour appliquer l'inégalité de Poincaré.

(2) (H2) est vérifiée dans le cas où Ω est faiblement Lipschitz i.e. chaque point $x \in \partial\Omega$ possède un voisinage U_x tels que $\Omega \cap U_x$ peut être tracé sur la moitié d'une boule de \mathbb{R}^n par un homéomorphisme bi-Lipschitz .

(3) Plus généralement, supposons que, pour $d = N$, on a

$$(3.13) \quad \inf_{h>0, x_0 \in \partial\Omega} \frac{1}{h^d} |B_h(x_0) \setminus \Omega| > 0,$$

où $|\cdot|$ est la mesure par Lebesgue. Alors, (H2) est vérifié (cf. e.g. [99, Theorem 3.11.1]). Notons que, par exemple, la condition de cône extérieur implique (3.13) et ainsi (H2).

(4) Dans les deux cas mentionnés ci-dessus, l'inégalité dans (H2) se tient réellement avec h remplacé par h^2 . Une condition suffisante optimale pour (H2) peut être formulé en terme de capacité de Bessel $B_{1,2}$ (cf. par exemple Ziemer [99]) :

$$(3.14) \quad \inf_{h>0, x_0 \in \partial\Omega} \frac{1}{h} B_{1,2}(\mathcal{N}_h(x_0)) > 0, \quad \text{où } \mathcal{N}_h(x_0) = \left\{ \frac{1}{h}(x - x_0) \mid x \in B_h(x_0) \setminus \Omega \right\}.$$

Cette condition laisse, en particulier, inclure des domaines avec des fissures. Pour la preuve, il est suffisant de tracer $B_h(x_0)$ sur la boule d'unité de \mathbb{R}^n et appliquer [99, Corollary 4.5.3].

(5) Pour $N \geq 3$, $B_{1,2}(\mathcal{N}_h(x_0))$ dans (3.14) peut être remplacé par la capacité newtonienne de $\mathcal{N}_h(x_0)$ dans \mathbb{R}^n (cf. [99, ex.2.8]) et puis par $|\mathcal{N}_h(x_0)|^{\frac{N-2}{N}} = \frac{1}{h^{\frac{N-2}{N}}} |B_h(x_0) \setminus \Omega|^{\frac{N-2}{N}}$ (cf. e.g. [54, Theorem 4.7.2]). Ainsi, (H2) reste vrai si (3.13) est vérifiée avec $d = N(N-1)/(N-2)$ et $N \geq 3$.

Comportement asymptotique pour des problèmes paraboliques dégénérés.

1. Introduction.

Le problème de Stefan est un exemple typique de problèmes à frontière libre impliquant un changement de phase solide-liquide. Il est bien connu à ce jour (voir chapitre 0) que le processus dynamique pour ce problème dans un domaine Ω peut être représenté par une EDP non linéaire de type

$$(1.1) \quad \begin{cases} \partial_t u = \Delta \varphi(u) & \text{dans } Q := (0, \infty) \times \Omega \\ \varphi(u) = a & \text{sur } \Sigma \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où u est l'enthalpie, $w = \varphi(u)$ représente la température,

$$\varphi(r) = -c_s(r + l_0/2)^- + c_l(r - l_0/2)^+,$$

$r^+ = \max(0, r)$ et $r^- = (-r)^+$, c_s (resp. c_l) représente le coefficient de diffusion dans le solide (resp. liquide) et u_0 est la donnée initiale représentant la distribution initiale du matériau dans Ω . On s'intéresse au comportement pour les grands temps de la distribution solide/liquide. Formellement, si $t \rightarrow \infty$ dans (1.1), une limite \underline{u} de $u(t)$ est telle que $\varphi(\underline{u}) = a$. Cette approche standard implique que naturellement la température du milieu se stabilise sur la valeur prescrite sur le bord. Ainsi, si cette valeur sur le bord est $a > 1$ (resp $a < -1$) alors tout le matériau est transformé en liquide (resp. solide). Mais, si $a = 0$, on ne peut pas décrire (avec cette approche) la distribution exacte du matériau dans Ω . En effet, 0 est une température admissible pour la phase liquide, la phase solide et également la région qu'on appelle mousseuse (mushy région). Pour différencier entre les deux phases à la température 0, qui est la température de transition de phase, il faut déterminer les valeurs de l'enthalpie \underline{u} . Ainsi une bonne description du comportement asymptotique du système pour les grands temps passe par l'identification de $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$. De manière générale, on se pose cette question pour les EDPs de type

$$(E) \quad \begin{cases} u_t - \Delta w + g(x, u) = 0, & w \in \varphi(u) \text{ sur } Q \\ \frac{\partial \varphi(u)}{\partial \eta} + z = 0, & z \in \gamma(w) \text{ sur } \Sigma \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

et aussi, pour les problèmes avec des conditions au bord dynamique, i.e.

$$DP \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta w = 0, & w \in \varphi(u) \text{ dans } Q = (0, \infty) \times \Omega \\ \partial_t z + \partial_\eta w = 0, & z = \gamma(w) \text{ dans } \Sigma = (0, \infty) \times \Gamma \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \quad z(0) = z_0 \text{ dans } \Gamma. \end{cases}$$

où φ et γ sont des graphes maximaux monotones (qui peuvent être multivoques). Ces équations apparaissent comme modèles dans l'étude des problèmes à frontière libre tels que les problèmes de transition de phases de type Stefan décrit ci dessus, ainsi que les problèmes de filtration dans les milieux poreux. En général, la limite d'une solution de (E) ou bien (DP), lorsque $t \rightarrow \infty$, est une solution du problème stationnaire associé à chacune des équations. Et, comme suivant les hypothèses sur φ , γ et g une solution stationnaire

n'est pas unique, on s'intéresse aussi à reconnaître la bonne valeur de la limite parmi ces états stationnaires en fonction des données initiales.

2. Résultats de stabilisation.

2.1. Cas de conditions au bord statiques. On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné régulier, de frontière Γ , φ et γ sont des graphes maximaux monotones sur \mathbb{R} tels que

$$(H_1) \quad \mathcal{D}(\varphi) = \mathbb{R},$$

$$(H_2) \quad \mathcal{D}(\gamma) \in \left\{ \mathbb{R}, \{0\} \right\},$$

$$(H_3) \quad 0 \in \varphi(0) \cap \gamma(0)$$

et $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Caratheodory telle que

$$(H_4) \quad \left(\begin{array}{l} \text{pour p.p. } x \in \Omega, r \rightarrow g(x, r) \text{ est continue croissante} \\ \text{et pour tout } r \in \mathbb{R}, x \rightarrow g(x, r) \text{ est dans } L^1(\Omega) \text{ avec } g(\cdot, 0) \equiv 0. \end{array} \right.$$

Du fait de la généralité des conditions sur φ , γ et u_0 , il est nécessaire d'introduire la notion de solution généralisée au sens de [27]. Une solution de (E) est dite solution généralisée si $u \in \mathcal{C}([0, \infty), L^1(\Omega))$ avec $u(0) = u_0$ et u est la limite dans $\mathcal{C}([0, \infty), L^1(\Omega))$ de solutions classiques u_k obtenue en régularisant u_0 , φ , γ et g . On sait que sous les hypothèses $(H_1) - (H_3)$, le problème (E) admet une unique solution généralisée u (voir [27] pour le cas $g \equiv 0$ et [Ig16] pour le cas $g \not\equiv 0$); de plus $u(t) = S(t)u_0$ où $S(t)$ est un semi groupe de contractions qui préserve l'ordre dans $L^1(\Omega)$.

Il est connu que pour montrer des résultats de stabilité pour des problèmes d'évolution de type (E), il est nécessaire de montrer que les orbites $\{S(t)u_0; t \geq 0\}$ sont relativement compactes. Actuellement, il n'est pas possible d'avoir ceci à partir de la compacité du semigroupe, puisqu'il est connu que si $\varphi(r) = |r|^{m-1}r$ et γ correspond aux conditions de bord de type Dirichlet, alors $S(t) : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ est compact si $m > \frac{N-2}{N}$ ($N \geq 3$) (voir [13]), alors que pour $0 < m \leq \frac{N-2}{N}$, même les résolvantes ne le sont plus (voir [35]). Cependant, pour les conditions au bord générales et φ une fonction continue strictement croissante, il a été montré dans [80] (voir aussi [7]) que $S(t)u_0$ est relativement compacte dans $L^1(\Omega)$, pour tout $u_0 \in L^1(\Omega)$ (voir aussi [47] et [3] pour des conditions au bord Dirichlet et Neumann respectivement). Dans [Ig11] et [Ig6], on montre que les résolvantes sont relativement compactes dans $L^1(\Omega)$, lorsqu'on restreint les données à $BV(\Omega)$. Plus précisément

PROPOSITION 2.1. *Si \mathcal{B} est un sous ensemble borné dans $L^1(\Omega)$ et dans $BV(\Omega)$, alors $\mathcal{J}_\lambda(\mathcal{B})$ est relativement compact dans $L^1(\Omega)$, où \mathcal{J}_λ est la résolvante associée au semi groupe $S(t)$.*

Ainsi, la définition des solutions semi groupe (bonnes solutions), nous permet par la suite de montrer que $u(t)$ est relativement compacte dans $L^1(\Omega)$. Et on montre que la limite vérifie l'équation stationnaire associée à (E). Ainsi, en notant

$$\mathcal{K}_{\varphi\gamma g} = \left\{ z \in L^1(\Omega); \exists c \in \gamma^{-1}(0) \text{ s.t. } z(x) \in \varphi^{-1}(c) \cap g(x, \cdot)^{-1}(0) \text{ p.p. } x \in \Omega \right\},$$

on a le résultat suivant

THÉORÈME 2.1. *Pour tout $u_0 \in L^1(\Omega)$, il existe une unique $\underline{u} \in \mathcal{K}_{\varphi\gamma g}$, telle que*

$$S(t)u_0 \rightarrow \underline{u} \quad \text{dans } L^1(\Omega), \text{ lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Notons que si φ est une fonction croissante, alors $\varphi_0 = \varphi$ et φ^{-1} peut être multivoque. En particulier, $\varphi^{-1}(r)$ est un sous intervalle de \mathbb{R} , pour tout $r \in \mathcal{E}$, l'ensemble des valeurs de discontinuités de φ_0^{-1} . D'autre part, $\mathcal{K}_{\varphi\gamma g}$ est un sous ensemble fermé de $L^1(\Omega)$ et est inclus dans l'ensemble des solutions stationnaires de $Pe(u_0, \varphi, \gamma)$; par conséquent pour tout $z \in \mathcal{K}_{\varphi\gamma g}$, $S(t)z = z$, pour tout $t \geq 0$.

En utilisant le Théorème 2.1, on peut définir l'opérateur $\mathcal{L}_{\varphi\gamma g}$ dans $L^1(\Omega)$, par

$$\mathcal{L}_{\varphi\gamma g}(u_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)u_0, \quad \text{for tout } u_0 \in L^1(\Omega).$$

COROLLAIRE 2.1. *Pour tout φ , γ et g tel que $(H_1) - (H_4)$ sont satisfaites, l'opérateur $\mathcal{L}_{\varphi\gamma g}$ est bien défini de $L^1(\Omega)$ vers $\mathcal{K}_{\varphi\gamma g}$ et $\mathcal{L}_{\varphi\gamma g}$ est un opérateur de contraction qui préserve l'ordre dans $L^1(\Omega)$.*

Ce corollaire définit bien $\mathcal{L}_{\varphi\gamma g}$ de $L^1(\Omega)$ vers $\mathcal{K}_{\varphi\gamma g}$, mais il ne donne pas de caractérisation précise de $\mathcal{L}_{\varphi\gamma g}(u_0)$. Le problème est encore ouvert de manière générale. Dans ce qui suit on présentera les quelques cas particuliers pour lesquels on arrive à décrire et identifier les limites. Dans un premier temps, on remarque que la structure de $\mathcal{K}_{\varphi\gamma g}$ dépend de $\gamma^{-1}(0)$ et les valeurs de φ^{-1} sur $\gamma^{-1}(0)$. Ainsi comme conséquence immédiate du Théorème 2.1, on a

COROLLAIRE 2.2. *Si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée*

$$- \varphi^{-1} \equiv 0 \text{ sur } \gamma^{-1}(0)$$

$$- g(x, \cdot)^{-1}(0) = \{0\}$$

alors $\mathcal{L}_{\varphi\gamma g}(u_0) \equiv 0$.

Quant au cas où φ est un graphe maximal monotone quelconque, partout défini, on se restreint à $g \equiv 0$, et aux conditions au bord linéaires, c-à-d

$$(H'_4) \quad \gamma(r) = \alpha r \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}$$

avec $\alpha \in (0, \infty]$, où le cas $\alpha = \infty$ correspond au cas de conditions de bord Dirichlet (le cas $\alpha = 0$ sera considéré dans la section suivante).

THÉORÈME 2.2. *Supposons que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H'_4) sont vérifiés. Soient $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ satisfaisant*

$$\int_0^{u_0} j_\varphi^*(r) dr \in L^1(\Omega), \text{ et}$$

$$[l, L] = \varphi^{-1}(0)$$

Il existe un couple $(\underline{u}, \underline{w})$ vérifiant

$$(2.2) \quad \begin{cases} l \leq \underline{u} \leq L, \quad \underline{u} = u_0 + \Delta \underline{w} & \text{p.p. dans } \Omega \\ \underline{w} \in H^2(\Omega), \quad \frac{\partial \underline{w}}{\partial \eta} + \alpha \underline{w} = 0 & \text{p.p. dans } \Gamma \\ \underline{w} = 0 & \text{p.p. dans } \{x \in \Omega ; l < \underline{u} < L\}. \end{cases}$$

tel que $\mathcal{L}_{\varphi\gamma g}(u_0) = \underline{u}$.

Ainsi, si on note $A = [l < \mathcal{L}_{\varphi\gamma g}(u_0) < L]$, on a le résultat immédiat suivant

COROLLAIRE 2.3. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2, $A \subseteq [l \leq u_0 \leq L]$, et il existe A_1 et A_2 des sous-ensembles disjoints tels que*

$$\mathcal{L}_{\varphi\gamma g}(u_0) = u_0 \cdot \chi_A + l \cdot \chi_{A_1} + L \cdot \chi_{A_2}.$$

En terme du problème de Stefan, l'ensemble A décrit la zone mousseuse. Le corollaire implique que si cette zone est de mesure non nulle alors elle est contenue dans la zone mousseuse de l'instant initial. En particulier, si $[l \leq u_0 \leq L]$ est de mesure nulle, il est ainsi pour $\mathcal{L}_{\varphi\gamma g}(u_0)$. Le théorème généralise, au cas d'un graphe maximal monotone φ et des conditions au bord linéaires, quelques résultats obtenus dans [95], [81] et [61, 62], sur l'évolution de la zone mousseuse pour le problème de Stefan.

Mais l'absence d'unicité de solutions du problème (2.2) ne permet pas encore de caractériser $\mathcal{L}_{\varphi\gamma g}(u_0)$ en fonction de u_0 de manière générale. Ceci est l'objet du théorème suivant moyennant des hypothèses supplémentaire sur u_0 .

THÉORÈME 2.3. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2, si $u_0 \geq l$, alors il existe un unique couple $(\underline{u}, \underline{w})$ vérifiant $\underline{u} \geq l$, $\underline{w} \geq 0$ p.p. Ω , $(\underline{u}, \underline{w})$ est solution de (2.2) et $\mathcal{L}_{\varphi\gamma g}(u_0) = \underline{u}$.*

L'unicité du couple $(\underline{u}, \underline{w})$ dans ce théorème provient du fait que $(\underline{u}, \underline{w})$ est aussi solution du problème d'obstacle suivant

$$(2.3) \quad \begin{cases} v - \Delta w = u_0, & w \in \varphi_\infty(v) \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} + \alpha w = 0 & \text{dans } \Gamma \end{cases}$$

où

$$\varphi_\infty(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ [0, \infty) & \text{si } r = 1 \\ (-\infty, 0] & \text{si } r = -1. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient une caractérisation de $\mathcal{L}_{\varphi\gamma g}(u_0)$ dans le cas où $u_0 \geq l$.

COROLLAIRE 2.4. *Sous les hypothèses du Théorème 2.3, on a*

$$\mathcal{L}_{\varphi\gamma g}(u_0) = u_0 \chi_{[\underline{w}=0]} + L \chi_{[\underline{w}>0]},$$

où \underline{w} est l'unique solution de

$$\begin{cases} \underline{w} \in H^2(\Omega), \underline{w} \geq 0, l \leq \Delta \underline{w} + u_0 \leq L, \\ \underline{w}(\Delta \underline{w} + u_0 - L) = 0 \text{ a.e } \Omega, \\ \frac{\partial \underline{w}}{\partial \eta} + \alpha \underline{w} = 0 \text{ dans } \Gamma. \end{cases}$$

2.2. Conditions au bord dynamiques. Pour le problème avec des conditions au bord dynamiques, on suppose en plus que γ est une fonction continue. Notons, qu'en particulier on peut avoir $\gamma \equiv 0$, ce qui permet d'inclure les conditions au bord de type Neumann homogènes.

On sait que (voir Chapitre 2), pour tout $u_0 \in L^1(\Omega)$ et $z_0 \in L^1(\Gamma)$ tel que

$$(2.4) \quad z_0(x) \in \overline{\text{Im}(\gamma)}, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma,$$

DP admet une unique solution généralisée (u, z) . Elle est l'unique solution faible si de plus $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $z_0 \in L^\infty(\Gamma)$.

La conservation de la masse

$$m_0 := \int_{\Omega} u_0 + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} z_0,$$

joue un rôle très important dans l'étude du comportement asymptotique des solutions de DP . En faisant tendre formellement $t \rightarrow \infty$, dans DP , on voit que w tend vers une constante c , u et z vers des fonctions appartenant à $\varphi^{-1}(c)$ et $\gamma^{-1}(c)$. Cette constante n'est pas arbitraire mais doit, moyennant la stabilisation dans L^1 , tenir compte de la conservation de la masse m_0 . Pour en tenir compte, on introduit le graphe maximal monotone suivant

$$\phi_{\varphi\gamma}(r) = \left\{ s + \frac{|\Gamma|}{|\Omega|} \gamma(r) ; s \in b^{-1}(r) \right\}.$$

Dans [Ig8], on montre les résultats suivants :

THÉORÈME 2.4. *Soient $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $z_0 \in L^\infty(\Gamma)$ satisfaisant (2.4) et soit (u, z) la solution de DP . Alors, il existe une unique constante $c \in \phi_{\varphi\gamma}^{-1}(m_0)$, telle que*

$$z(t) \rightarrow \gamma(c) \quad \text{dans } L^1(\Gamma), \text{ lorsque } t \rightarrow \infty,$$

et il existe une unique $\underline{u} \in L^1(\Omega)$, telle que $\underline{u}(x) \in \varphi^{-1}(c)$ p.p. $x \in \Omega$, $\int_{\Omega} \underline{u} = m_0 - \gamma(c)|\Gamma|/|\Omega|$ et

$$u(t) \rightarrow \underline{u} \quad \text{dans } L^1(\Omega), \text{ lorsque } t \rightarrow \infty.$$

De la même manière que pour la sous-section précédente, la preuve de ce théorème fait intervenir la compacité relative des résolvantes associées à $S(t)$, dans $L^1(\Omega) \times L^1(\Gamma)$. Cependant, rappelons que contrairement au cas précédent, la résolvante du problème avec des conditions au bord dynamiques donne lieu à un problème elliptique avec des conditions au bord de type Neumann non homogènes.

En plus du fait que les limites sont des solutions stationnaires de l'équation associée, Théorème 2.4 implique que la limite $(\underline{u}, \underline{z})$ associée à une donnée initiale est liée à la masse de l'instant initiale, m_0 . En effet,

$$(\underline{u}, \underline{z}) \in \mathcal{K}(u_0, z_0) := \left\{ (\underline{u}, \gamma(c)) \in L^1(\Omega) \times \mathbb{R} ; c \in \phi_{\varphi\gamma}^{-1}(m_0), \right. \\ \left. \int_{\Omega} \underline{u} = m_0 - \gamma(c)|\Gamma|/|\Omega| \text{ et } \underline{u}(x) \in \varphi^{-1}(c) \right\}.$$

D'autre part, contrairement au cas de conditions au bord statiques, où il n'y avait qu'une seule inconnue à caractériser (la limite \underline{u}), dans le cas de conditions au bord dynamiques la caractérisation fait intervenir un couple d'inconnues valeur à l'intérieur et celle sur le bord. Le problème reste encore ouvert même dans le cas linéaire sur le bord. Sauf, évidemment le cas où $m_0 \notin \mathcal{E}$, pour lequel on a

$$z(t) \rightarrow \gamma\left(\phi_{\varphi\gamma}^{-1}(m_0)\right) \text{ dans } L^1(\Gamma)$$

et

$$u(t) \rightarrow \varphi_0^{-1}\left(\phi_{\varphi\gamma}^{-1}(m_0)\right) \text{ dans } L^1(\Omega),$$

lorsque $t \rightarrow \infty$.

Le cas où $\gamma \equiv 0$, c-à-d Neumann homogène, est un cas qui permet d'éliminer la valeur à chercher sur le bord et alors, sous des hypothèses équivalentes à celles du Théorème 2.3, on arrive à caractériser la valeur de \underline{u} en fonction de u_0 . Avant de donner les résultats pour ce cas particulier, on donne tout d'abord un résultat qui décrit, dans le même esprit que le Théorème 2.2, le profil limite $(\underline{u}, \underline{z})$ de la solution de DP.

THÉORÈME 2.5. *Soient $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $z_0 \in L^\infty(\Gamma)$ satisfaisant (2.4), (u, z) la solution de DP et on considère $(\underline{u}, \gamma(c)) \in \mathcal{K}(u_0, z_0)$ donnée par Théorème 2.4, telle que $(\underline{u}, \gamma(c)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t), z(t))$ dans $L^1(\Omega) \times L^1(\Gamma)$. Posons $[l, L] = \varphi^{-1}(m_0)$, on a $l \leq \underline{u} \leq L$ p.p. dans Ω , et il existe $\underline{w} \in H^2(\Omega)$, telle que*

$$(2.5) \quad \begin{cases} \underline{u} = u_0 + \Delta \underline{w} \text{ p.p. dans } \Omega \\ \partial_\eta \underline{w} = z_0 - \gamma(c) \text{ p.p. } \Gamma \end{cases}$$

et de plus

$$(2.6) \quad \underline{w} = 0 \text{ p.p. } \{x \in \Omega ; l < \underline{u}(x) < L\}.$$

Enfin, pour le cas $\gamma \equiv 0$, on a

THÉORÈME 2.6. *Si $\gamma \equiv 0$ et $u_0 \geq l$, alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_0 \chi_{[\underline{w}=0]} + L \chi_{[\underline{w}>0]},$$

où \underline{w} est l'unique solution de

$$\begin{cases} \underline{w} \in H^2(\Omega), \underline{w} \geq 0, l \leq \Delta \underline{w} + u_0 \leq L, \\ \underline{w}(\Delta \underline{w} + u_0 - L) = 0 \text{ p.p. } \Omega, \\ \frac{\partial \underline{w}}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

3. Quelques interprétations pour le problème de Stefan.

Afin de donner une brève description de ces résultats, revenons au problème de Stefan, i.e.

$$\partial_t u = \Delta \varphi(u) \quad \text{sur } (0, \infty) \times \Omega$$

et

$$\varphi(r) = -(r+1)^- + (r-1)^+.$$

Cette équation modélise un problème à frontière libre impliquant un changement de phase solide-liquide de type Stefan. Alors, les fonctions u et $w = \varphi(u)$ représentent respectivement l'enthalpie et la température d'un matériau supposé du même type que l'eau, et pour lequel $w = 0$ est la seule température à laquelle une transition de phase peut avoir lieu. La fonction u est parfois appelée une fonction de phase, puisqu'elle caractérise les régions occupées par le liquide ou le solide ou la région mousseuse. En effet, $Q_l(t) = [u(t) \geq 1]$, $Q_s(t) = [u(t) \leq -1]$ et $M(t) = [-1 < u(t) < 1]$ représente respectivement la région occupée par le liquide, par le solide et la zone mousseuse, respectivement. Ainsi, la caractérisation de la limite de $u(t)$ dans $L^1(\Omega)$, lorsque $t \rightarrow \infty$, décrit les limites de $Q_l(t)$, $Q_s(t)$ et $M(t)$.

i - Cas de conditions au bord Dirichlet : $\varphi(u) = a$ sur Γ , avec $a \in \mathbb{R}$. Si $a \neq 0$ et $a = \varphi(\alpha)$, le Corollaire 2.2 implique que $u(t) \rightarrow \alpha$. En effet, il suffit de prendre $\psi(r) = \varphi(r + \alpha) - a$ et appliquer le Corollaire 2.2 avec ψ et $u_0 - \alpha$ au lieu de φ et de u_0 , respectivement. Ceci signifie que, si on prescrit une température qui correspond à une température d'eau (resp. solide) sur le bord, alors tout le matériau dans le domaine Ω se transforme en liquide (resp. solide) à la température a . Dans ce cas toute la zone mousseuse est transformée par la diffusion. Mais, si $a = 0$, la situation est différente, les Théorème 2.2 et Théorème 2.3 impliquent que pour les grands temps la répartition des phases dans Ω , dépend fortement de la répartition initiale, c.-à-d. u_0 , toutes les phases du matériau peuvent subsister, l'eau avec une enthalpie égale à 1, le solide avec une enthalpie égale à -1 et une partie de la zone mousseuse avec une enthalpie comprise strictement entre -1 et 1 . En effet, dans ce cas 0 est la température de transition des phases et à cette température les trois phases peuvent coexister. Si on néglige la diffusion dans l'une des zones liquide ou bien solide (problème de Stefan à une phase), le Corollaire 2.4 donne la caractérisation de la répartition finale en fonction de celle pour $t = 0$.

ii - Cas de conditions au bord Neumann : $\frac{\partial \varphi(u)}{\partial n} = 0$ sur Γ , c.-à-d. qu'il n'y a pas d'échange de température avec l'extérieur de Ω . Si $\int u_0 \notin (0, 1)$, alors le Théorème 2.4 implique que $u(t) \rightarrow \int u_0$, lorsque $t \rightarrow \infty$.

Ceci traduit le fait que la moyenne de l'enthalpie est soit assez grande (c.-à-d. $\int u_0 \geq 1$ ou bien assez petite (c.-à-d. $\int u_0 \leq -1$) pour transformer tout le matériau en liquide (c.-à-d. $u \geq 1$) ou bien solide ($u \leq -1$),

à la température $\varphi(\int u_0)$. Alors que, si $\int u_0 \in (-1, 1)$, alors la moyenne d'Enthalpie est favorable pour que les trois phases subsistent. Le Théorème 2.6 caractérise chaque région, lorsque $t \rightarrow \infty$, en fonction de la répartition à $t = 0$, pour le problème de Stefan à une phase.

4. Remarques sur l'asymptotique du problème de Stefan et la limite singulière de l'EMP.

Il n'est pas difficile de voir de manière générale que les questions de comportement asymptotique pour les grands temps pour les problèmes paraboliques dégénérés sont aussi des questions de limites singulières. Pour le problème de Stefan considéré dans la section précédente, par exemple

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta \varphi(u), & \text{dans } Q \\ \varphi(u) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

si on considère la transformation $u_k(x, t) = u(x, kt)$, alors formellement on voit que

$$(4.7) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t).$$

et u_k est la solution de

$$(4.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_k}{\partial t} = \Delta w_k, & w_k = \varphi_k(u_k) & \text{dans } Q \\ w_k = 0 & & \text{dans } \Sigma \\ u_k(0) = u_0 & & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Il est clair que $\varphi_k \rightarrow \varphi_\infty$ ou sens des graphes où

$$\varphi_\infty(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ [0, \infty) & \text{si } r = 1 \\ (-\infty, 0] & \text{si } r = -1, \end{cases}$$

et, de la même manière que pour l'équation des milieux poreux ($m \rightarrow \infty$), on peut montrer que u_k est relativement compacte dans $\mathcal{C}((0, \infty), L^1(\Omega))$ et que si $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} > 1$, alors la limite est singulière. En termes de la théorie L^1 pour ce type de problème, $u_k(t) = e^{-tA_k}u_0$ où A_k est la famille d'opérateurs définie dans $L^1(\Omega)$, par $A_k z = -\Delta \varphi_k(z)$ (au sens des distributions) pour tout $z \in L^1(\Omega)$ telle que $\varphi_k(z) \in H_0^1(\Omega)$ et $\Delta \varphi_k(z) \in L^1(\Omega)$. On sait que (voir [27]), lorsque $k \rightarrow \infty$, A_k converge vers A_∞ l'opérateur multivoque défini par

$$(4.9) \quad A_\infty z = -\Delta \varphi_\infty(z)$$

dont le domaine est réduit à $\{z \in L^1(\Omega) ; |z| \leq 1 \text{ p.p. } \Omega\}$. Ainsi si $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, alors

$$u_k \rightarrow u_0 \quad \text{dans } \mathcal{C}([0, \infty), L^1(\Omega)).$$

Mais si $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} > 1$, alors la limite est singulière et théoriquement on ne peut rien conclure. Notons que le cas $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, est trivial pour Stefan et correspond au cas où il n'y pas d'évolution. La conjecture est qu'il existerait une nouvelle donnée $\tilde{u}_0 \in \overline{\mathcal{D}(A_\infty)}$ telle que, lorsque $t \rightarrow \infty$,

$$e^{-tA_k}u_0 \rightarrow e^{-tA_\infty}\tilde{u}_0 = \tilde{u}_0 \quad \text{dans } \mathcal{C}((0, \infty), L^1(\Omega)).$$

Il est clair que \tilde{u}_0 ne peut être que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$, qu'il faut caractériser. De manière générale, on ne sait pas caractériser la limite singulière des problèmes d'évolution de type (4.8); néanmoins, on sait le faire dans le cas homogène. En particulier, dans le cas de l'équation des milieux poreux. La non linéarité limite φ_∞ , peut être obtenu aussi comme limite de non linéarité type milieux poreux $r \in \mathbb{R} \rightarrow |r|^{k-1} r$, $k \rightarrow \infty$. Plus précisément, l'opérateur

$$A'_k u = -\Delta |u|^{k-1} u,$$

converge aussi au sens des résolvantes vers A_∞ . Ainsi, on aimerait bien dire que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{-tA_k}u_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-tA'_k}u_0,$$

et puisqu'on sait caractériser $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{-tA'_k}u_0$, pour toute donné $u_0 \in L^1(\Omega)$ (voir Chapitre 1), ceci nous permettrait d'identifier le profil limite, lorsque $t \rightarrow \infty$, de la solution du problème de Stefan. Ceci, est vrai dans le cas du problème de Stefan à une phase, puisque si $u_0 \geq 0$ alors le Corollaire 2.4 implique que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ correspond elle aussi à la projection par rapport à la norme H^{-1} sur le convexe formé par les fonctions à valeurs dans $[-1, 1]$. Sans oublier que les résultats pour Stefan et pour l'équation des milieux poreux sont obtenus séparément et par des approches différentes, pour Stefan la propriété principale est la décroissance de la zone mousseuse et pour l'équation des milieux poreux c'est l'homogénéité.

Ainsi, pour le comportement asymptotique lorsque $t \rightarrow \infty$, de la solution du problème de Stefan, un bon nombre de questions ouvertes restent à traiter. Entre autre, si $\underline{u} = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$, nous notons la question suivante :

QUESTION . La limite \underline{u} est elle égale à $\mathbb{P}_{K(1)}u_0$ ou bien à $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{K(1)}\mathbb{P}_{K(\lambda_{n-1}^n)}\mathbb{P}_{K(\lambda_{n-2}^n)} \cdots \mathbb{P}_{K(\lambda_0^n)}u_0$, où $\delta_k^n = 1 + k(\|u_0\|_\infty - 1)/n$, et $\mathbb{P}_{K(\delta_k^n)}$ est la projection par rapport à la norme H^{-1} sur $K(\delta_k^n)$ l'ensemble des fonctions mesurables de valeurs absolues inférieures ou égales à δ_k^n .

Autre travaux

1. Explosion pour les solutions d'un système de réaction-diffusion.

Dans [Ig9], on étudie le phénomène d'explosion en temps fini pour les systèmes triangulaires de type

$$\begin{cases} u_t - \Delta(a_{11}u) = h(t, x)v^p & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ v_t - \Delta(a_{21}u) - \Delta(a_{22}v) = k(t, x)w^q & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ w_t - \Delta(a_{31}u) - \Delta(a_{32}v) - \Delta(a_{33}w) = l(t, x)u^r & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u_0 \geq 0, \quad v_0 \geq 0 \quad w_0 \geq 0, \end{cases}$$

où $a_{ij} = a_{ij}(t, x, u, v)$ sont des fonctions mesurables, positives et bornées, h , k et l sont des fonctions positives et $p, q, r > 0$ sont des constantes réelles. Moyennant des conditions de dépendance des paramètres p, q, r et N et des conditions de croissance à l'infini sur h, k et l , on montre des résultats d'explosion en temps finis pour les solutions non triviales. Notons que la méthode de Fujita est inopérante ici, puisque les opérateurs sont non linéaires. Et même, si a_{ij} sont indépendants de u et v , alors les techniques semi groupes ne s'appliquent plus. La méthode qu'on utilise est une adaptation des techniques introduites par Mitidieri, Pohozaev et Tesei dans [82], [83] et [92] (des idées très proche ont été étudié aussi dans Baras et Pierre [14]).

On suppose que

$$(1.10) \quad \begin{cases} 0 < h(R^2\tau, Ry) \leq CR^\mu \\ 0 < k(R^2\tau, Ry) \leq CR^\kappa \\ 0 < l(R^2\tau, Ry) \leq CR^\lambda \end{cases}$$

pour $\mu, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, $R \gg 1$ et (τ, y) appartenant à un sous ensemble borné de Q , et on détermine une condition suffisante sur les paramètres p, q, r et N pour qu'il n'y ait pas d'existence de solution globale non triviale.

2. Solution auto-similaire pour une équation de type Barenblatt

Cette thématique constituait la deuxième partie de ma thèse. Elle est consacrée à l'étude des solutions auto-similaires pour une équation non linéaire de type Barenblatt :

$$(2.11) \quad |u_t|^{m-1}(u_t + \gamma|u_t|) = \Delta_p u \quad \text{sur } Q$$

où $Q = \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$, $N \geq 1$, $1 < p < \infty$, $m > 0$ et $-1 < \gamma < 1$. Les solutions recherchées sont de la forme $u(x, t) = t^{-\alpha} f(t^{-\beta}|x|)$. Différents cas particuliers ont été abordés dans des travaux précédents. Dans [Ig14], on discute ce cas nettement plus général et on obtient l'existence de diverses solutions. On commence par la résolution de (2.11) en utilisant la théorie des semigroupes non linéaires. Et ensuite, l'analyse des solutions auto-similaires est obtenue par l'étude d'un système d'équations différentielles ordinaires associé à f , en utilisant une méthode de tir.

CHAPITRE 6

Liste des travaux

Publications dans des revues avec comité de lecture.

- [Ig1] Some L^1 Existence Results for Quasi-Linear Elliptic Equations under Nonlinear Boundary Conditions, (avec F. Andreu, J. M. Mazon et J. Toledo), 32 pages, à paraître dans *Annales de l' Inst. Henri Poincaré, C : Analyse non linéaire*.
- [Ig2] Uniqueness for Nonlinear Degenerate Diffusion-Convection Problems, (avec B. Andreianov), 12 pages, à paraître dans *J. Diff. Equations*.
- [Ig3] A Nonlinear Diffusion Problem With Localized Large Diffusion, *Commun. in Partial Differential Equations*, vo. 29 no. 5-6, 647-670, 2004.
- [Ig4] The Mesa Problem for the Neumann Boundary Value Problem, (avec Ph. Bénilan) *Journal of differential Equations*, vo. 196, no. 2, 301-315, 2004.
- [Ig5] Uniqueness for Nonlinear Degenerate Problems, (avec J. M. Urbano) *Nonlinear Differential Equations and Applications (NoDEA)*, 10 (2003), 287-307.
- [Ig6] Stabilization Results for Degenerate Parabolic Equations with Absorption, *Nonlinear Analysis TMA*, 54 (2003), 93-107.
- [Ig7] Singular Limit of the Changing Sign Solutions of the PME (avec Ph. Bénilan), *Journal of Evolution Equations*, 3 (2003) 215-223.
- [Ig8] A Degenerate Diffusion Problem with Dynamical Boundary Conditions,(avec M. Kirane). *Mathematische Annalen*, 323 (2002), no. 2, 377-396, 24 pages.
- [Ig9] Blow up for a Completely Coupled Fujita Type Reaction-Diffusion System,(avec M. Kirane). *Colloquium Mathematicum*, 92 (2002), no. 1, 87-96.
- [Ig10] The Mesa-Limit of the Porous Medium-Equation and the Hele-Shaw Problem, *Differential and Integral Equations*, vo. 15, no 2 129-146, 2002.
- [Ig11] On the Large Time Behavior of Solutions to Some Degenerate Parabolic Equations, *Commun. in Partial Differential Equations*, no. 7-8, 1385-1408, 2001.
- [Ig12] Limite de la Solution de $u_t = \Delta u^m + \operatorname{div}F(u)$, lorsque $m \rightarrow \infty$, (avec Ph. Bénilan) *Revista Mathematica Complutense Madrid*, Vol.XIII,1 :195-205, 2000.
- [Ig13] Singular Limit of Perturbed Nonlinear Semigroups, (avec Ph. Bénilan) *Communications in Applied Nonlinear Analysis*, 3 : 23-42, 1996.
- [Ig14] Solutions Auto-Similaires pour une Equation de Barenablatt, *Revista de Matematicas Aplicadas*, 7 :21-36, 1996.
- [Ig15] Limite de $u_t = \Delta_p u^m$ Lorsque $m \rightarrow \infty$, (avec Ph. Bénilan) *C.R. Acad. Sci. Paris*, t.321 Série I, p. 1323-1328, 1995.

Publications soumises dans des revues avec comité de lecture.

- [Ig16] From Fast to Very Fast Diffusion in the Nonlinear Heat Equation, 28 pages, *Transactions of the AMS*.
- [Ig17] The Hele Shaw Problem with Dynamical Boundary Conditions, 19 pages, *Houston Journal of Mathematics*.

[Ig18] Uniqueness for the Inhomogeneous Dirichlet Problem for Elliptic-parabolic Equations, (avec B. Andreianov), 10 pages, preprint.

Preprints.

[Ig19] Large Time Behavior of the Stefan Problem and Singular Limit of the PME, 7 pages, communication interne.

Articles en cours de rédaction.

[Ig20] Renormalized Solutions for Stefan Type Problems : Existence and Uniqueness, (avec P. Wittbold).

[Ig21] A degenerate Elliptic-Parabolic Problem with Nonlinear Dynamical Boundary Conditions, (avec F. Andreu, J. M. Mazon et J. Toledo).

[Ig22] Diffusion-Convection Problems with Neumann Boundary condition : Existence and Uniqueness, (avec B. Andreianov).

[Ig23] Large Reaction in Evolution Problems, (avec F. Karami).

[Ig24] Reaction-Diffusion System with Localized Large Reaction, (avec F. Karami).

Autres.

[Ig25] Sur l'Equation de Barenblatt Non Linéaire, *Mémoire de DEA, Université de Franche-Comté, 1992*, 30 pages.

[Ig26] Limite Singulière de Problèmes d'Evolution Non Linéaires, *Thèse de Doctorat de l'Université de Franche-Comté, 1997*, 160 pages.

Bibliographie

- [1] H.W. ALT and S. LUCKHAUS. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z.*, 183 :311–341, 1983.
- [2] T. AIKI, Multi-dimensional two-phase Stefan problems with nonlinear dynamic boundary conditions, *Nonlinear analysis and applications* (Warsaw, 1994), pages 1–25.
- [3] N. D. ALIKAKOS and R. ROSTAMIAN. Large time behavior of solutions of neumann boundary value problem for the porous medium equation. *Indiana Univ. Math. J.*, 30 :749–785, 1981.
- [4] K. AMMAR, J. CARRILLO and P. WITTBOLD. Scalar conservation laws with general boundary condition and continuous flux function, submitted
- [5] K. Ammar, F. Andreu and J. Toledo. Quasi-linear elliptic problems in L^1 with non homogeneous boundary conditions. *To appear*.
- [6] F. Andreu, N. Igbida, J. M. Mazón and J. Toledo. A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions. In preparation.
- [7] F. ANDREU, J.M. MAZÓN and J. TOLEDO, Stabilization of solutions of the filtration equation with absorption and non-linear flux, *Nonlinear Diff. Equ. Appl. (NoDEA)*, 2, 267–289, 1995.
- [8] F. Andreu, J. M. Mazón, S. Segura de León and J. Toledo. Quasi-linear elliptic and parabolic equations in L^1 with nonlinear boundary conditions. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 7(1) :183–213, 1997.
- [9] J. ARRIETA, A. N. CARVALHO, and A. RODRIGUES-BERNAL. Parabolic problems with nonlinear boundary conditions and critical nonlinearities. *J. Differential Equations*, 156 :376–406, 1999.
- [10] J. ARRIETA, A. N. CARVALHO, and A. RODRIGUES-BERNAL. Upper semicontinuity for attractors of parabolic problems with localized large diffusion and nonlinear boundary conditions. *J. Diff. Equations*, 168 :33–59, 2000.
- [11] C. BARDOS, A.Y. LEROUX and J.C. NÉDÉLEC. First order qiasilinear equations with boundary conditions. *Comm. in Part. Diff. Equ. (9)*, 4 :1017–1034, 1979.
- [12] L. BARTHÉLÉMY and Ph. BÉNILAN. Subsolutions for absract evolution equations. *Potentiel Analysis*, 1 :93–113, 1992.
- [13] P. BARAS. Compacité de l’operateur $f \rightarrow u$ solution d’une équation non linéaire $(du/dt) + Au \ni f$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 286 :1113–1116, 1978.
- [14] P. Baras and M. Pierre, Critère d’existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2, No 3, (1985), 185–212.
- [15] P BARAS and L. VÉRON. Comportement Asymptotique de la Solution d’une équation d’évolution semi-linéaire de la chaleur. *Com. in Partial Differential Equations*, 4 :795–807, 1979.
- [16] J. BEAR, *Dymacis of Fluid in Porous Media*, American Elsevier, New York, 1972.
- [17] Ph. BÉNILAN. Équation d’évolution dans un Espace de Banach Quelconque et Applications . *Thesis*. Orsay 1972.
- [18] Ph. BÉNILAN. A Strong Regularity L^p For Solutions of the Porous Media Equation. In C. Bardos et al., editor, *Contribution to Nonlinear PDE*. Pitman Research Notes, 1983.
- [19] Ph. BÉNILAN. Quelques remarques sur la convergence singulière des semi-groupes linéaires. *Publ. Math. UFR Sci. Tech., Univ. Franche-Comté Besançon*, 15 :1–11, 1995/97.
- [20] Ph. BÉNILAN, L. BOCCARDO, and M. HERRERO. On the Limit of Solution of $u_t = \Delta u^m$ as $m \rightarrow \infty$. In M.Bertch et.al., editor, *in Some Topics in Nonlinear PDE’s*, Torino, 1989. Proceedings Int.Conf.
- [21] Ph. Bénilan, L. Boccardo, Th. Gallouët, R. Gariépy, M. Pierre and J. L. Vázquez. An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 22(2) :241–273, 1995.
- [22] Ph. BÉNILAN and M.G. CRANDALL. Regularizing effects of homogeneous evolution equation. In Baltimore, editor, *Contributions to Analysis and Geometry*, pages 23–30, 1981.
- [23] Ph. BÉNILAN and M.G. CRANDALL. The Continuous Dependence on φ of Solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$. *Ind. Uni. Math. J.*, 2(30) :162–177, 1981.
- [24] Ph. Bénilan and M. G. Crandall. Completely accretive operators. In *Semigroup theory and evolution equations (Delft, 1989)*, volume 135 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 41–75. Dekker, New York, 1991.

-
- [25] Ph. Benilan, H. Brezis and M. G. Crandall. A semilinear equation in $L^1(R^N)$. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 2(4) :523–555, 1975.
- [26] Ph. BÉNILAN, M.G. CRANDALL and A. PAZY, Evolution equations governed by accretive operators. (book to appear).
- [27] Ph. BÉNILAN, M.G. CRANDALL, and P. SACKS. Some L^1 Existence and Dependence Result for Semilinear Elliptic Equation Under Nonlinear Boundary Conditions. *Appl. Math. Optim.*, 17 :203–224, 1988
- [28] Ph. BÉNILAN and P. WITTBOLD. On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems . *Adv. Differential Equations*, 1, 1053-1073, 1999.
- [29] D. BLANCHARD and F. MURAT. Renormalized solutions of nonlinear parabolic problems with L^1 data : existence and uniqueness. *Proc. Royal Soc. Edinburgh A*, 127 (1997), 1137–1152.
- [30] D. BLANCHARD and A. PORRETTA. Stefan problems with nonlinear diffusion and convection. *J. Differential Equations*, 210 (2005), no. 2, 383–428.
- [31] H. BREZIS and W. STRAUSS. Semilinear Elliptic Equations in L^1 . *J. Math. Soc. Japan*, 25 :565–590, 1973.
- [32] H. BREZIS. Monotonicity methods in Hilbert space and some applications to nonlinear partial differential equations. In E. Frantonello, editor, *Contribution to Nonlinear Functionnal Analysis*. Academic Press, 1971.
- [33] H. Brezis. Problèmes unilatéraux, *J. Math. Pures Appl.* **51** (1972), 1-168.
- [34] H. BREZIS. *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland, Amsterdam-London, 1973.
- [35] H. BREZIS and A. FRIEDMAN. Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions. *J. Math. Pures Appl.*, 62 :73–97, 1983.
- [36] H. BREZIS and A. PAZY. Convergence And Approximation of Semigroups of Nonlinear Operators in Banach Spaces. *J. Func. Anal.*, 9 :63–74, 1972.
- [37] J.R. CANON, The one-dimensional heat equation, In Addison-Wesley Publishing Company, editor, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 1984.
- [38] J. CARRILLO. Entropy Solutions For Nonlinear Degenetrate Problems. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, 327(2) :155–160, 1998.
- [39] J. CARRILLO. Entropy Solutions For Nonlinear Degenetrate Problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 147 :269–361, 1999.
- [40] J. CARRILLO, M. MALIKI, and H. TOURE. Entropy Solutions For Nonlinear Degenetrate Problems. (en preparation).
- [41] L. A. CAFFARELLI and A. FRIEDMAN. Asymptotic Behavior of Solution of $u_t = \Delta u^m$ as $m \rightarrow \infty$. *Indiana Univ. Math. J.*, pages 711–728, 1987.
- [42] J. CARILLO and P. WITTBOLD. Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems. *J. Differential Equations*, 156 :93–121, 1999.
- [43] G.Q CHEN and H. FRID. Divergence-measure fields and hyperbolic conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 147, 89-118, 1999.
- [44] M.G. CRANDALL , An Introduction to Evolution Governed by Accretive Operato , Dynamical Systems-An Internationnal symposium , L.Cesari, J.Hale J.LaSalle, Academic Press, New York, 1976, 131–165
- [45] J. CRANK, *Free and Moving Boundary Problems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1984.
- [46] I Bejenaru, J.I Diaz, and I. Vrabie. An abstract approximate controllability result and applications to elliptic and parabolic system with dinamic boundary conditions. *Electronic J. Diff. Eq.*, 2001(50) :1–19, 2001.
- [47] T. I. DIAZ and I. I. VRABIE. Propriétés de compacité de l’opérateur de Green généralisé pour l’équation des milieux poreux. *C. R. Acad. Sci. Paris Série I*, 309 :221–223, 1989.
- [48] E. DIBENEDETTO and A. FRIEDMAN. The ill-posed Hele-Shaw model and the Stefan problem for supercooled water. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 282 :183–204, 1984.
- [49] G. Duvaux and J. L. Lions. *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, 1976.
- [50] J. Escher. Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions. *Comm. Part. Diff. Equat.*, **18** (1993), 1309–1364.
- [51] C. M. ELLIOT and V. JANOVSKÝ. A variational inequality approach to the Hele-Shaw flow with a moving boundary. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 88 :93–107, 1981.
- [52] C.M. ELLIOT, M.A. HERRERO, J.R. KING, and J.R. OCKENDON. The Mesa Patterns for $u_t = \nabla(u^m \nabla u)$ as $m \rightarrow \infty$. *IMA J. Appl. Math.*, 37 :147–154, 1986.
- [53] L.C. EVANS. *Application of Nonlinear Semigroup Theory to Certain Partial Differential Dquation*. Nonlinear Evolution Equation, Academic Press, New York 1978
- [54] L.C. EVANS and R.F. GARIEPY. *Measure theory and fine properties of functions*. *Studies in Advanced Mathematics*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [55] L. C. EVANS, M. FELDMAN and R. F. GARIEPY. Fast/slow diffusion and collapsing sandpiles. *J. Differential Equations*, 137 :166–209, 1997.

-
- [56] A. FRIEDMAN and K. HOLLIG. On the Mesa Problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 123 :564–571, 1987.
- [57] A. FRIEDMAN and S. HUANG. Asymptotic Behavior of Solutions of $u_t = \Delta\varphi_m(u)$ as $m \rightarrow \infty$ with Inconsistent Initial Values. In *Analyse Mathématique et applications*. Paris, 1988.
- [58] G. GAGNEUX and M. MADAUNE-TORT. *Analyse Mathématique de Modèles Non Linéaires de l'Ingénierie Pétrolière*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.
- [59] O. GIL and F. QUIROS. Boundary layer formation in the transition from porous medium to a Hele-Shaw flow. Preprint UAM.
- [60] O. GIL and F. QUIROS. Convergence of the porous media equation to Hele-Shaw. *Nonlinear Anal. TMA*, 44(8) :1111–1131, 2001.
- [61] I. G. GOTZ and B. B. ZALTZMAN. Nonincrease of mushy region in nonhomogeneous Stefan problem. *Quart. Appl. Mat.*, 49 :741–746, 1991.
- [62] I. G. GOTZ and B. B. ZALTZMAN. On the behavior of mushy region in a Stefan problem. In *International Series of Numerical Mathematics*. Springer, 1991.
- [63] M. GROBBELAAR and V. DALSEN. On B-evolution theory and dynamic boundary conditions on a portion of the boundary. *Appl. Anal.*, 40, 151–172, 1991.
- [64] T. HINTERMANN. Evolution problem with dynamical boundary conditions. *Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect A.*, **113** (1989), 43–60.
- [65] D. HENRY. Geometric theory of semilinear parabolic equations. In *Lecture notes in mathematics, Vol. 840*. Springer-Verlag, 1981.
- [66] K. M. HUI. Singular Limit of Solutions of the Porous Medium Equation With Absorption. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350 (1998), no. 11, 4651–4667.
- [67] S. KAMENOMOSTKAYA (in Russian). On the Stefan problem. *Mat. Sb.*, 95(53) :489–514, 1961.
- [68] No. KENMOCH. Asymptotic stability for nonlinear degenerate parabolic equations with Neumann boundary conditions. In *Differential Integral Equations*. 4 (1991), no. 4, 803–816.
- [69] J. R. KING. D. phil. thesis, Oxford University, 1986.
- [70] K. KOBAYASI. The equivalence of weak solutions and entropy solutions of nonlinear degenerate second-order equations. *J. Differential Equations*, 189 :383–395, 2003.
- [71] S. N. KRUIZHKOVA. Generalized Solutions of the Cauchy Problem in the Large for Nonlinear Equations of First Order. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 187(1) :29 – 32, 1969.
- [72] S. N. KRUIZHKOVA. Result Concerning the Nature of the Continuity of Solutions of Parabolic Equations and Some of Their Applications. *Mat. Zametki*, 6(1) :97 – 108, 1969.
- [73] S. N. KRUIZHKOVA and E. YU. PANOVA. First-Order Quasilinear Conservation Laws With Infinite Initial Data Dependence Area. *Dokl. Akad. Nauk URSS*, 314(1) :79–84, 1990. English tr. in Soviet Math. Dokl. 42 No.2, pp. 316-421 (1991).
- [74] A. A. LACEY, J. R. OCKENDON, and J. B. TAYLER. “Waiting time ” solutions of a nonlinear diffusion equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 6 :1252–1264, 1982.
- [75] B. LOURO and J. F. RODRIGUES. Remarks on the quasi-steady one phase Stefan problem. *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, 102 :263–275, 1986.
- [76] R.E. LANGER, A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with fluid, *Tôhoku Math. J.*, 35, 151–172, 1932.
- [77] G. M. Lieberman. Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlinear Analysis TMA*, 12 :1203–1219, 1988.
- [78] J. MÁLEK, J. NEČAS, M. ROKYTA and M. RŮŽIČKA. *Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs. Applied Mathematics and Mathematical Computation*, 13.. Chapman & Hall, London, 1996.
- [79] C. MASCIA, A. PORRETTA and A. TERRACINA Nonhomogeneous Dirichlet problems for degenerate parabolic-hyperbolic equations.. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 163 (2002), no. 2, 87–124.
- [80] J.M. MAZON and J. TOLEDO, Asymptotic behavior of solutions of the filtration equation in bounded domains, *Dynam. Systems Appl.*, 3, 275–295, 1994.
- [81] A. M. MEIRMANOV. On the disappearance of the mushy region in the Stefan problem with spherical symmetry. *Dinamika Sploshnoisredy lavrentyev Institute of Hydrodynamics*, 91 :89–99, 1989.
- [82] E. MITIDIERI and S. I. POHOZAEV, Absence of global positive solutions of quasilinear elliptic inequalities, *Dokl. Akad. Nauk.*, 359, no 4, 456–460 (1998), 456–460.
- [83] E. MITIDIERI and S. I. POHOZAEV. existence of positive solutions for a systems of quasilinear elliptic equations and inequalities in \mathbb{R}^N , *Doklady Math.*, Vol 59, 3 , (1999), pp. 351–355.
- [84] A. MICHEL and J. VOVELLE. Entropy formulation for parabolic degenerate equations with general Dirichlet boundary conditions and application to the convergence of FV methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41 (2003), no. 6, 2262–2293.

-
- [85] F. OTTO. L^1 contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations. *J. Differential Equations*, 131, 20-38, 1996.
- [86] F. OTTO (in German). *Ein Randwertproblem für skalare Erhaltungssätze. PhD Thesis*, Universität Bonn, 1993.
- [87] E. ROUVRE and G. GAGNEUX (in French) Formulation forte entropique de lois scalaires hyperboliques-paraboliques dégénérées. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6) 10 (2001), no. 1, 163–183
- [88] N. SU, Multidimensional degenerate diffusion problem with evolutionary boundary conditions : existence, uniqueness and approximation, *Intern. Series Num. Math.*, 14, 165–177, 1993.
- [89] S. RICHARDSON . Hele Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid in a narrow channel. *J. Fluid Mech.*, 56 :609–618, 1972.
- [90] J.F. RODRIGUES. Variational methods in the Stefan problem. In *Modeling and Analysis of Phase Transition and Hysteresis (A. Visintin, ed.)*. Heidelberg, 1994.
- [91] P.G. SAFFMAN and G.I. TAYLOR. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. Roy. Soc.*, 245 :312–329, 1958.
- [92] S. I. Pohozaev and A. Tesei, article in preparation ; oral communication by Pohozaev to the first author.
- [93] F. QUIROS and J. L. VAZQUEZ. Asymptotic convergence of the Stefan problem to Hele-Shaw. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(2) :609–634, 2001.
- [94] A. RODRIGUES-BERNAL. Localized spatial homogenization and large diffusion. *SIAM J. Math. Anal.*, 29 :1361–1380, 1998.
- [95] J. C.W. ROGERS and A. E. BERGER. Some properties of the nonlinear semigroup for the problem $u_t - \Delta f(u) = 0$. *Nonlin. Anal. TMA*, 8 :909–939, 1984.
- [96] A. VISINTIN. *Models of Phase Transitions*. Progres in nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhauser, 1996.
- [97] A.I. VOLPERT and S.I. HUDJAEV. Cauchy’s problem for degenerate second order quasilinear parabolic equations. *Mat. SSSR -Sb*, 78 :365–387, 1969.
- [98] Y. N. ZELDOVICH and Y. P. RAIZER. *Physics of shock waves and high temperature hydrodynamics phenomena*. Academic Press, 1986.
- [99] W.P. ZIEMER. *Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation. Graduate Texts in Mathematics, 120*. Springer-Verlag, New York, 1989.