Une introduction raisonnée aux approximants de Padé*

Olivier Ruatta
XLIM-DMI
Email : olivier.ruatta@xlim.fr
Toile : http://www.unilim.fr/pages_perso/olivier.ruatta/

Jacques-Arthur Weil
XLIM-DMI
Email : jacques-arthur.weil@unilim.fr
Toile : http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/index.html

Résumé

Ce document est le texte accompagnant un exposé qui a eu lieu à Limoges le 30 juin 2006 dans le cadre d'une collaboration entre mathématiciens et physiciens sur des problèmes de « réduction d'ordre ». Lobjectif du texte est de nous permettre de partager quelques mots de vocabulaire et pour expliquer à nos collègues pourquoi nous posons des questions sur la nature des fonctions que nous cherchons à approcher. On trouve donc les principale notions servant à définir les approximants de Padé, quelques algorithmes de calcul et surtout quelques exemple pour illustrer les résultats de convergences et surtout leurs limites. On trouve dans le texte des affirmations pûrement gratuite qui ne sont que le produit de l'expérience des auteurs et qui en sont en rien des résultats mathématiques.

1 Introduction et motivations

Considérons une série formelle $\sum_{i=0}^{\infty} f_i\ z^i$, on cherche une fraction rationnelle $N(z)/D(z)$, avec $\mathrm{degree}(N)=n$ et $\mathrm{degree}(D)=d$, telle que $D(z)*\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i\, z^i\right)-N(z)\in\mathcal{O}(z^{n+d+1})$, autrement dit, le développement en série de $N(z)/D(z)$ correspond avec la série formelle sur les $n+d+1$ premiers coefficients. Un tel quotient $N(z)/D(z)$ est appelé un $[n/d]$ approximant de Padé de $\sum_{i=0}^{\infty} f_i\, z^i$. Si la série formelle $\sum_{i=0}^{\infty} f_i\, z^i$ a un rayon de convergence $R>0$ alors il s'agit du développement en série de Taylor d'une fonction $f(z)$ en 0 et $N(z)/D(z)$ est donc une approximation au moins locale de $f(z)$.

En pratique, si la série formelle correspond au développement d'une fonction, un approximant de Padé donne parfois (et même souvent) une approximation qui fonctionne encore au-delà du rayon de convergence de la série, sous de bonnes hypothèses sur la fonction de départ.

Dans ce petit texte, nous montrerons un algorithme naïf de calcul d'un approximant de Padé, puis nous donnerons quelques résultats de convergence des approximants de Padé. Le texte est émaillé d'exemple permettant de commencer à se forger une « intuition » sur le sujet. Ces exemples sont pleins d'affimations gratuite qui ne relève pas des mathématiques, mais de la seule expérience des auteurs.

2 Calcul naïf des approximants de Padé

Nous décrivons ici un algorithme qui calcul un approximant de Padé $[n/d]$ d'une série formelle $\sum f_i\, z^i$. Ceci montre l'existence d'un tel approximant.

*. This document has been written using the GNU $\mathrm{T_EX_{MACS}}$ text editor (see www.texmacs.org).

Remarque 1. Si $N(z)/D(z)$ est un approximant de Padé $[n/d]$ de $\sum f_i z^i$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, la fraction rationnelle $(\lambda * N(Z))/(\lambda * D(z))$ est aussi un approximant de Padé de $\sum f_i z^i$. Généralement, on choisit un approximant tel que $d_0 = 1$, i.e. $D(z) = 1 + \sum_{i=1}^{d} d_i z^i$.

Repartons de la propriété qu'on a exigé d'un approximant de Padé $[n/d]$:

$$D(z) * \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i z^i\right) = N(z) + \mathcal{O}(z^{n+d+1})$$

qu'on réécrit sous la forme :

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{d} b_i z^i\right) * \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i z^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i + \mathcal{O}(z^{n+d+1}). \qquad (1)$$

On va considérer le système linéaire obtenu en considérant l'égalité 1 degré par degré. On considère uniquement les conditions correspondant aux degrés $\leqslant n+d$. On décompose en deux sous-systèmes, les conditions correspondants aux degrés $\leqslant n$ qui font intervenir les coefficients de $N(z)$, par contre, les conditions correspondants aux degrés compris entre n et $n+d$, ne font pas intervenir les coefficients de $N(z)$, uniquement ceux de $D(z)$ et des f_i (qui eux sont connus). La stratégie que nous adoptons est de calculer les coefficients de $D(z)$ en utilisant les conditions données par les termes de degré compris entre $n+1$ et $n+d$, puis de calculer ceux de $N(z)$.

Le tableau suivant donne le degré et la condition correspondante à chaque fois :

degré	condition
$n+1$	$f_{n-d+1} b_d + f_{n-d+2} b_{d-1} + \cdots + f_n b_1 + f_{n+1} = 0$
$n+2$	$f_{n-d+2} b_d + f_{n-d+3} b_{d-1} + \cdots + f_{n+1} b_1 + f_{n+2} = 0$
$\vdots$	$\vdots$
$n+d$	$f_n b_d + f_{n+1} b_{d-1} + \cdots + f_{n+d-1} b_1 + f_{n+d} = 0$

(2)

Si on écrit les équations de (2) sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} f_{n-d+1} & f_{n-d+2} & f_{n-d+3} & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ f_{n-d+2} & f_{n-d+3} & f_{n+d-4} & \cdots & f_n & f_{n+1} \\ \iddots & \iddots & & \iddots & \iddots & \\ \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & \\ \iddots & \iddots & \iddots & & & \\ f_n & f_{n+1} & f_{n+2} & \cdots & f_{n+d-2} & f_{n+d-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_d \\ b_{d-1} \\ b_{d-2} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{n+1} \\ -f_{n+2} \\ -f_{n+3} \\ \vdots \\ -f_{n+d-1} \\ -f_{n+d} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

La première étape de notre approche consiste donc à résoudre le système (3). Une fois connus les coefficients b_1, ..., b_d, pour retrouver les coefficients de $N(z)$ on considère les conditions correspondant aux termes de degré compris en 0 et n :

degré	condition
0	$a_0 = f_0$
1	$a_1 = f_1 + b_1 f_0$
2	$a_2 = f_2 + b_1 f_1 + b_0 f_2$
$\vdots$	$\vdots$
n	$a_n = f_n + \sum_{i=1}^{\min(n,d)} b_i f_{n-i}$

(4)

Il s'agit essentiellement d'évaluer les membres de droite des conditions de (4).

Remarque 2. Si la matrice de (3) est de rang plein, alors comme le numérateur et le dénominateur d'un approximant de Padé $[n/d]$ satifont (3-4), la solution existe et elle est unique.

Remarque 3. Naïvement, cette approche nous conduit à un algorithme utilisant $\mathcal{O}(d^3 + n^2)$ opérations arithmétique. Une première amélioration consiste à remarquer que la matrice du système (3) est de Tœplitz ce qui conduit à un algorithme en $\mathcal{O}(d^2 + n^2)$ (voir mieux asymptotiquement).

3 Premiers exemples

3.1 Exemple de l'exponentielle

On considère la série formelle $f(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \mathcal{O}(z^3)$ et on cherche un $[1, 1]$ approximant de cette série. Autrement dit, on cherche une fraction rationnelle de la forme $\frac{a\,z+b}{1+c\,z} = (a z + b)(1 - c z + c^2 z^2) + \mathcal{O}(z^3)$, soit $\frac{a\,z+b}{1+c\,z} = b + (a - c b)\,z + (b c^2 - a c)\,z^2 + \mathcal{O}(z^3)$ et par identification terme à terme, on a $b = 1$, $a - c = 1$ et $c^2 - a c = c(c - a) = -c = 1/2$. Finallement, on a $f(z) = \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}} + \mathcal{O}(z^3)$. Quelquechose doit vous choquer dans cet exemple !

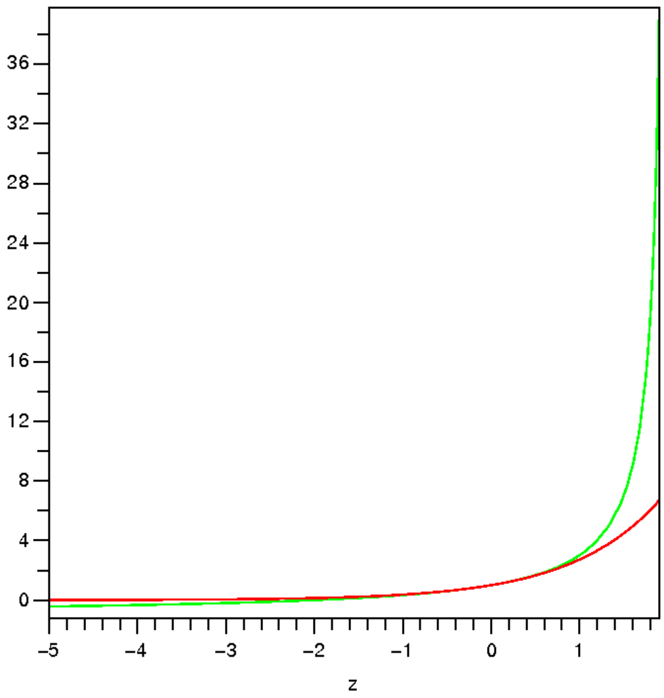

Figure 1. En rouge l'exponentielle et en vert $\frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$

3.2 Est-ce-que ça marche tout le temps ?

Considérons le polynôme $f(z) = 1 + z^2 + z^4$, on cherche un $[1/1]$-approximant tel que $f(z) - N(z)/D(z) = \mathcal{O}(z^3)$, i.e. on cherche $\frac{a+b\,z}{1+c\,z} = 1 + z^2$, i.e. $(a + b\,z)(1 - c z + c^2 z^2) = 1 + z^2$, ce qui implicque que $a = 1$, $a c - b = c - b = 0$ soit $b = c$ et enfin que $c^2 - b c = 1$ mais comme $b = c$ ceci impliquerait que $c^2 - c^2 = 0 = 1$. Ainsi, il n'est pas possible de trouver $N(z)$ et $D(z)$ tels que $f(z) - N(z)/D(z) = \mathcal{O}(z)$. C'est ce qui aurait dû vous choquer dans l'exemple précédent. En effet, suivant la section 1, nous aurions dû mettre les choses sous la forme $D(z)\,(1 + z^2 + z^4) = N(z) + \mathcal{O}(z^3)$. Dans ce dernier cas on vois qu'en posant $D(z) = z$, on a $z + \mathcal{O}(z^3) = N(z) + \mathcal{O}(z^3)$ soit $N(z) = z$ et par conséquent un $[1/1]$-approximant de Padé est identiquement égale à 1.

3.3 Convergence « étendue »

Dans cet sous-section nous montrons un exemple dans lequel un approximant de Padé approche bien mieux une fonction que sa série de Taylor car l'approximantr reste correct bien au-delà du rayon de convergence de la série. On considère la fonction $f(z) = \sqrt{\frac{1+\frac{z}{2}}{1+2z}}$ dont un développement de Taylor à l'origine est $f(z) = 1 - 3/4z + 39/32z^2 + \mathcal{O}(z^3)$. Un [1/1] approximant de Padé est tel que $(1+bz)(1-3/4z+39/32z^2) = (a_0 + a_1 z) + \mathcal{O}(z^3)$, ainsi, $a_0 = 1$, $b - 3/4 = a_1$ et $39/32 - 3/4b = 0$. On en déduit que $b = 13/8$ et $a_1 = 7/8$. On a donc :

$$f(z) = \frac{1+7/8z}{1+13/8z} + \mathcal{O}(z^3).$$

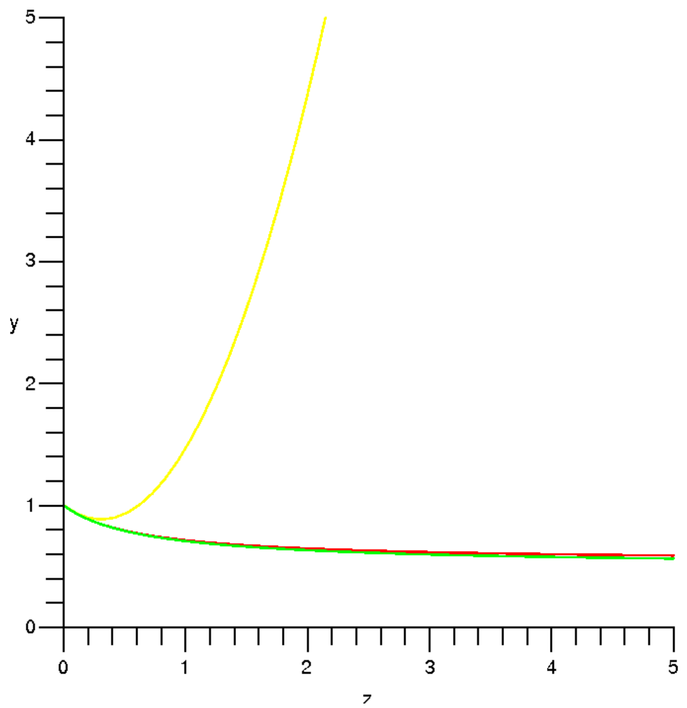

Figure 2. En rouge $f(z)$, en vert $[1/1]_f(z)$ et en jaune $1 - 3/4z + 39/32z^2$

On remarque que les courbes rouge et verte restent très proches, en effet chacune a une asymptote horizontale pour $f(z)$ il s'agit de $y = 0,5$ et pour $\frac{1+7/8z}{1+13/8z}$ on a $\lim_{z\to\infty} \frac{1+7/8z}{1+13/8z} = \frac{7}{13} =$ 0.5384615385.... L'approximant de Padé $[1/1]_f(z)$ continu donc d'approcher $f(z)$ bien au-delà du rayon de convergence de sa série de Taylor (dont le rayon de convergence est 1/2).

4 Existence et unicité

Dans cette section on reprend les idées introduites dans la section 1 et on donne des définitions et des résultats précis. La première chose est de définir ce qu'est un approximant de Padé.

Définition 4. *Soient* $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^i$ *une série formelle,* n *et* d *deux entiers positifs non nuls ; une* $[n/d]$ *forme de Padé de* f*, noté* $[n/d]_f(z)$*, est un couple* $(N(z), D(z)) \in \mathbb{C}[z]^2$ *tel que* $D(z) * f(z) = N(z) + \mathcal{O}(z^{n+d+1})$.

Proposition 5. *Pour tout série formelle $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ et pour tout couple $(n,d) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il existe des $[n/d]$ formes de Padé de f.*

Démonstration. Ca découle directement du fait que de telles formes sont données par des solutions des systèmes (3) et (4) qui sont toujours bien contraints. □

Définition 6. *Soit $f \in \mathbb{C}[[z]]$ une série formelle, toutes les $[n/d]$ formes de Padé de f sont équivalente à une même **fonction** rationelle.*

Démonstration. Soient $f \in \mathbb{C}[[z]]$, $(N(z), D(z))$ et $(N'(z), D'(z))$ deux $[n/d]$ formes de Padé de f, alors par définition on a :

$$D(z) * f(z) - N(z) = \mathcal{O}(z^{n+d+1}) \tag{5}$$
$$D'(z) * f(z) - N'(z) = \mathcal{O}(z^{n+d+1}) \tag{6}$$

donc on a $D'(z) * N(z) - D(z) * N'(z) = \mathcal{O}(z^{n+d+1})$ et $\deg(D'(z) * N(z)) \leqslant n+d$ et $\deg(D(z) * N'(z) \leqslant n+d$ donc $D'(z) * N(z) = D(z) * N'(z)$ ce qui implique que $\frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N'(z)}{D'(z)}$. □

Définition 7. *Soit $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, et soient n et d des entiers positifs non nul, alors l'unique représentant $N(z)/D(z)$ des $[n/d]$ formes de Padé est appelé approximant de Padé de f et il est noté $[n/d]_f(z)$.*

Définition 8. *Soit $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, on appel table de Padé de f la table suivante :*

$d\backslash n$	0	1	2	...
0	$[0/0]_f(z)$	$[1/0]_f(z)$	$[2/0]_f(z)$	$\cdots$
1	$[0/1]_f(z)$	$[1/1]_f(z)$	$[2/1]_f(z)$	$\cdots$
2	$[0/2]_f(z)$	$[1/2]_f(z)$	$[2/2]_f(z)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

dont la premier ligne est formée des polynôme de Taylor de $f(z)$.

5 Exemples de tables de Padé

5.1 Structure en bloc de la table de Padé

Souvent, la table de Padé d'une série formelle a une structure en bloc comme c'est le cas pour la série de $\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \mathcal{O}(z^5)$:

	0	1	2	3	$\cdots$
0	1	1	$1+z^2$	$1+z^2$	$\cdots$
1	1	1	$1+z^2$	$1+z^2$	$\cdots$
2	$\frac{1}{1-z^2}$	$\frac{1}{1-z^2}$	$\frac{1}{1-z^2}$	$\frac{1}{1-z^2}$	$\cdots$
3	$\frac{1}{1-z^2}$	$\frac{1}{1-z^2}$	$\frac{1}{1-z^2}$	$\frac{1}{1-z^2}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Définition 9. *Un approximant de Padé qui n'apparait qu'une fois dans une table est dit **normal**. Une fonction f dont tout les approximants sont normals est dite **normale**.*

5.2 Table de Padé de l'exponentielle

On donne ici le début de la table de l'exponentielle. En fait, l'exponentielle est une fonction normale. Considérons $e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ et soient n et d deux entiers positifs, on cherche l'expression de $N_n(z)/D_d(z)$ de $[n/d]_{\exp}(z)$. On note $\partial = \frac{d}{dz}$, pour tout $q \in \mathbb{C}[[z]]$, on a $\partial(qe^z) = qe^z + q'\, e^z = e^z(1+\partial)q$ en utilisant cette relation pour appliquer ∂^{n+1} à la relation $D_{n,d}(z) * e^z - N_{n,d}(z) = \mathcal{O}(z^{n+d+1})$ on obtient :

$$e^z * (1+\partial)^{n+1} D_{n,d}(z) + 0 = \mathcal{O}(z^d)$$

ainsi $(1+\partial)^{n+1} D_{n,d}(z) = \lambda * z^d$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Or l'opérateur $(1+\partial)^{n+1}$ est inversible est sont inverse $(1+\partial)^{-n-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{m+i}{m} \partial^i$ et donc $D_{n,d}(z) = \lambda * (1+\partial)^{-n-1} * z^d$ et finallement $D_{n,d}(z) = \lambda * \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{m+i}{m} \partial^i z^d = \lambda * \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{m+i}{m} \frac{d!}{(d-i)!} z^{d-i}$. Après simplification, on a :

$$D_{n,d}(z) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(n+d-i)! * n!}{(n+d)! * (d-i)!} * \frac{(-z)^i}{i!}.$$

Enfin, on a $D_{n,d}(z) * e^z - N_{n,d}(z) = \mathcal{O}(z^{n+d+1})$, donc $D_{n,d}(z) - N_{n,d}(z) * e^{-z} = \mathcal{O}(z^{n+d+1})$ et finallement $N_{n,d}(z) = D_{d,n}(-z)$.

En étudiant un peu plus les dénominateurs des approximants de Padé de l'exponentielle, on s'apperçoit que $|D_n(z)| \leqslant e^\rho$ pour tout z tel que $|z| \leqslant \rho$. Ce qui conduit à une version simplifié du théorème de Padé :

Théorème 10. *Soient $(n_i)_i$ et $(d_i)_i$ deux suites d'entiers positifs tel que $n_i + d_i \rightarrow +\infty$, $n_i/d_i \rightarrow \theta$ quand $i \rightarrow +\infty$, alors :*

- $\lim_{i \rightarrow +\infty} D_{n_i,d_i}(z) = e^{-z/(1+\theta)}$;
- $\lim_{i \rightarrow +\infty} N_{n_i,d_i}(z) = e^{\theta z/(1+\theta)}$;
- $\lim_{i \rightarrow +\infty} [n_i/d_i]_{\exp}(z) = e^z$;

ces égalités étant locallement uniformes sur $\mathbb{C}$.

Corollaire 11. *Les pôles des approximants de Padé de e^z tendent vers l'infini quand $n + d \rightarrow +\infty$.*

On aimerai savoir s'il y a des résultats généralisant ces deux derniers et de quelles conditions sur la fonction qu'on approche a-t-on besoin pour généraliser ces résultats.

6 Convergence

6.1 Le théorème de Montessus de Ballore

Le premier résultat de convergence introduit ici est le théorème de de Montessus de Ballore :

Théorème 12. *Soit f une fonction méromorphe ayant exactement ν pôles dans le disque $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid \; |z| < \rho\}$, et sans pôle en 0, alors la suite $[n/\nu]_f(z)$ converge vers $f(z)$ uniformément sur $\Delta \backslash \{$pôles de $f\}$ quand $n \rightarrow +\infty$. De plus, les pôles de $[n/\nu]_f$ convergent vers les pôles de f quand $n \rightarrow +\infty$.*

6.2 Illustration expérimentale

On considère une fonction avec des pôles isolés, ici $f(z) = \frac{1}{\cos(z)}$ sur le carré centré en 0 est de coté 4π du plan complexe. En voici une représentation graphique :

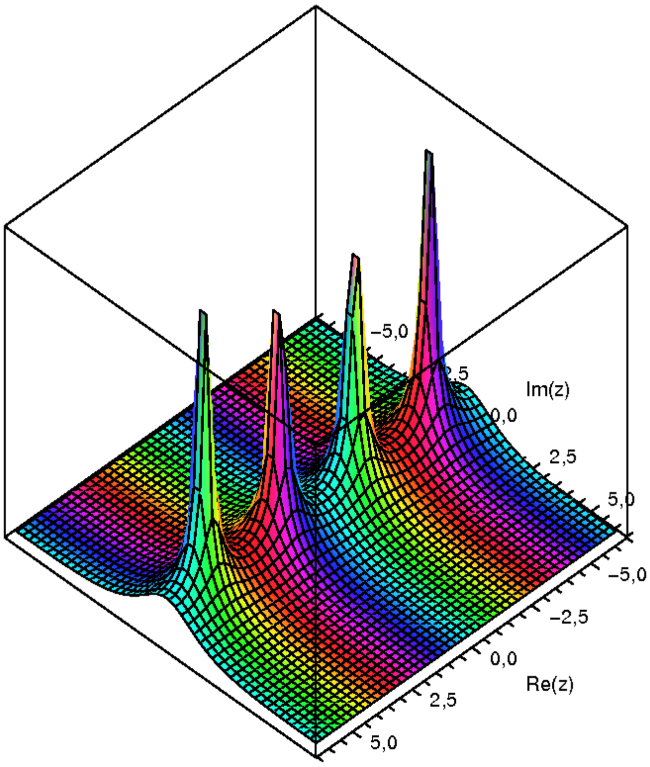

Figure 3. Représentation de $|\frac{1}{\cos(z)}|$ sur $[-2*\pi, 2*\pi] \times I*[-2*\pi, 2*\pi]$

Si on se limite au cas réel, on a la représentation graphique suivante :

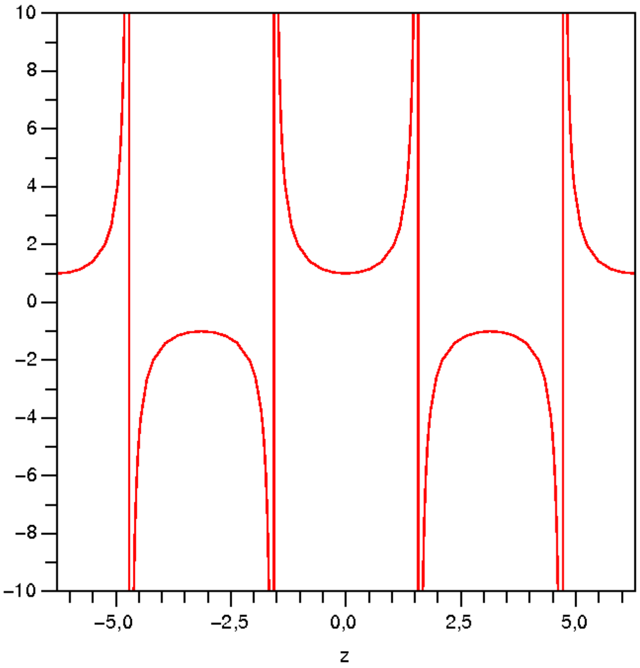

Figure 4. Représentation graphique de $\frac{1}{\cos(z)}$ sur $[-2*\pi, 2\pi]$

Le premier approximant de Padé de $f(z)$ est $[2/1]_f(z) = 1 + \frac{1}{2}z^2$, voici une représentation graphique de $f(z) - [2/1]_f(z)$:

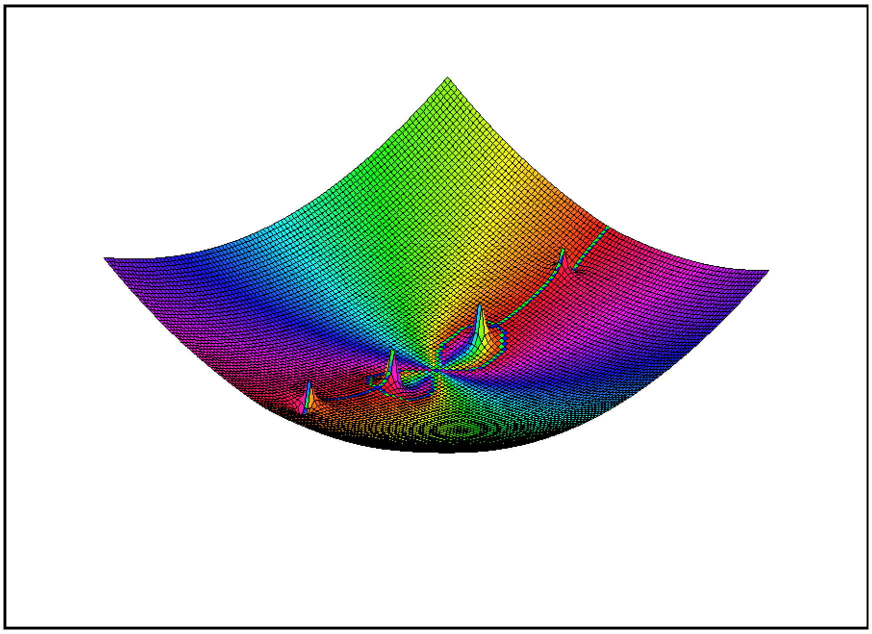

Figure 5. Représentation de $|f(z) - [2/1]_f(z)|$ sur $[-2*\pi, 2*\pi] \times I*[-2*\pi, 2*\pi]$

On constate que $[2/1]_f(z)$ est polynômiale, c'est un phénomème général quand on a une série « lacunaire » (ici la lacune est les termes d'ordre 1 et 3 -et impair en général-), et il correspond à la série de Taylor (à l'ordre 3) de f.

Voici la représentation graphique de ce qui se passe en réel :

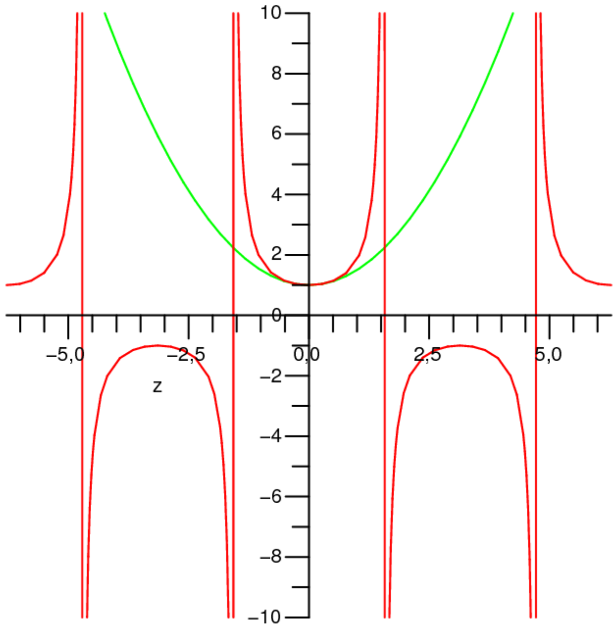

Figure 6. Représentations graphiques de $f(z)$ et $[2/1]_f(z)$ sur $[-2*\pi, 2\,\pi]$

On considère maintenant $[7,\,1]_f(z)$ et on donne les même représentations graphique que ci-dessus (exercice : l'approximant $[7/1]_f(z)$ est le même que $[8/0]_f(z)$. Pourquoi ?) :

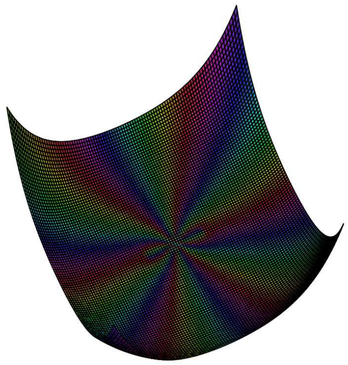

Figure 7. Représentation de $|f(z) - [7/1]_f(z)|$ sur $[-2*\pi, 2*\pi] \times I * [-2*\pi, 2*\pi]$

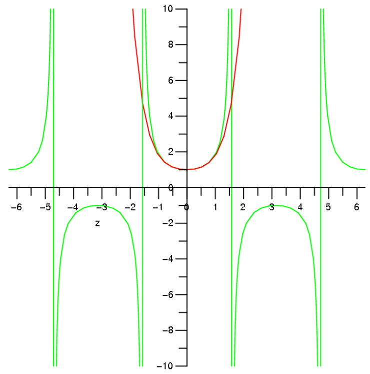

Figure 8. Représentations graphiques de $f(z)$ et $[7/1]_f(z)$ sur $[-2*\pi, 2\,\pi]$

On constate bien que les polynômes de Taylor coïncide de mieux en mieux avec la fonction dans le rayon de convergance de la série de Taylor, mais que en dehors, ce n'est pas bon du tout.

On regarde les mêmes graphiques pour $[6/2]_f(z)$:

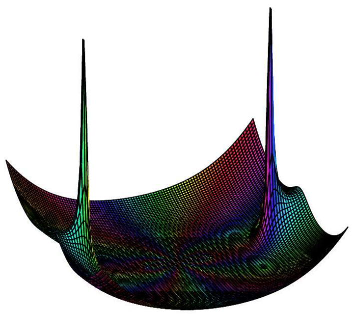

Figure 9. Représentation de $|f(z) - [8/1]_f(z)|$ sur $[-2*\pi, 2*\pi] \times I * [-2*\pi, 2*\pi]$, on ne voit plus les deux premiers pôles !

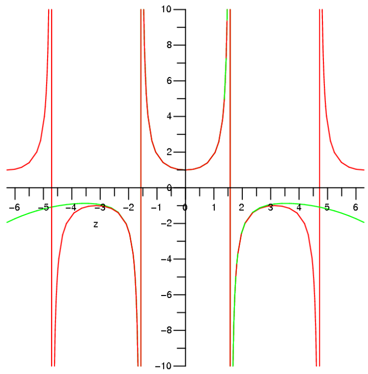

Figure 10. Représentations graphiques de $f(z)$ et $[7/1]_f(z)$ sur $[-2*\pi, 2\,\pi]$

L'approximant $[6/2]_f(z)$ est théoriquement une fonction qui coïncide au même ordre que $[7,\,1]_f(z)$ avec la fonction f, mais on constate que l'approximant $[6,\,2]_f(z)$ « passe à travers les pôles » tout en restant excellente sur le disque de convergence de la série de Taylor (normal c'est, elle donne le même polynôme de Taylor). On remarque que l'approximant $[6/2]_f(z)$ a bien « capturé » les deux premiers pôles, au point que numériquement, la fonction f et l'approximant se confondent en ces pôles. Toujours à cause de la lacunarité (ou du fait que les pôles sont deux à deux équidistants de l'origine), passer du degré 2 au degré 3 au au dénominateur ne fait rien gagner. Par contre si on choisi l'approxinant $[4/4]_f(f)$, on a les représentations suivantes :

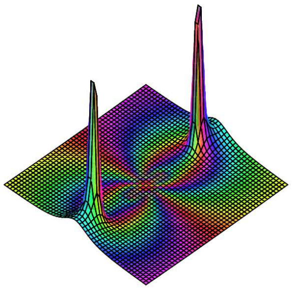

Figure 11. Qualitativement, l'approximant

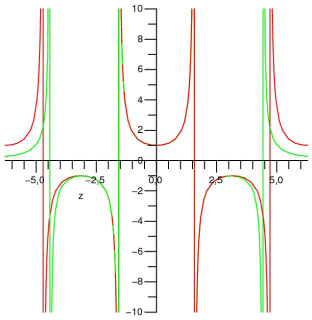

Figure 12.

On comprend qu'on étant beaucoup le domaine de validité de l'approximant sans trop perdre en qualité la où l'approximant précédent était bon. De plus on comprend « qualitativement » que l'approximant $[4, 4]_f(z)$ représente beaucoup mieux le comportement de f sur $[-2*\pi, 2*\pi]$. Que se passe-t-il si on rajoute encore des pôles ? Voici ce qui se passe pour l'approximant $[2/4]_f(z)$:

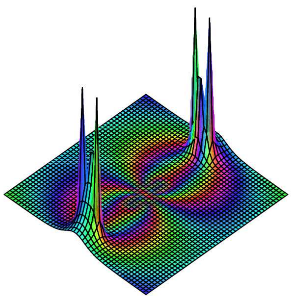

Figure 13.

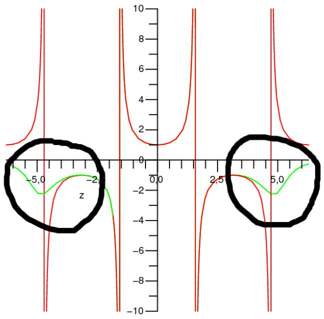

Figure 14.

Si on commence par regarder seulement la figure du cas réel, on a l'impression qu'on a perdu deux pôles. En fait, si on regarde le cas complexe, on s'apperçoit qu'il y a deux paquets de deux pôles complexes conjugais qui sont très proches de véritables pôles de f. Ce phénomène est aussi un phénomène général. On peut encore pousser un peu plus l'expérimentation en regardant ce qui se passe pour l'approximant $[0/8]_f(z)$. On obtient les représentations suivantes :

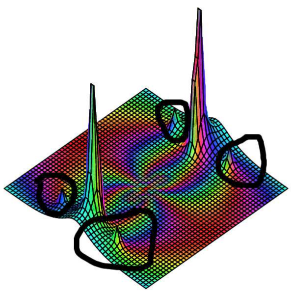

Figure 15.

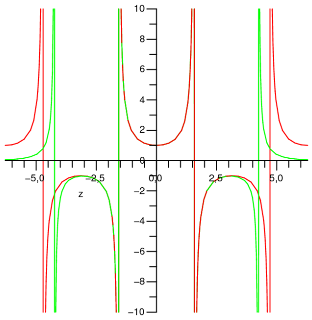

Figure 16.

C'est mieux que $[2/6]_f(z)$, mais moins bien que $[4/4]_f(z)$! On pourrait penser que c'est la qualité des approximants de Padé diagonaux, mais il n'en est rien. C'est que 4 est le nombre de pôle et le $[6/4]_f(z)$ est meilleur encore que $[4, 4]_f(z)$.