3
POLITIQUE D'ÉPARGNE

L'épargne des sociétés dépend largement des goûts des agents, de facteurs sociaux, culturels et démographiques, de phénomènes indépendants des politiques. Les gouvernements ne mènent pas à proprement parler des « politiques d'épargne », mais la politique économique, budgétaire et monétaire, a un impact sur les comportements d'investissement, comme on le verra dans les chapitres suivants. Avant de rentrer dans ces détails, il est nécessaire d'examiner les conséquences en terme de bien-être du choix du taux d'épargne.

Ce chapitre examine quelles sont les conséquences politiques du modèle de croissance néoclassique. Dans celui-ci, le taux de croissance d'état régulier est indépendant du taux d'épargne, en revanche le taux d'épargne détermine le niveau de consommation d'état régulier et le taux de croissance de dynamique transitoire. Le choix du taux d'épargne a donc des implications en termes de bien-être.

La section 1 décrit ces implications et en particulier le fait que l'épargne, si on la modélise comme exogène, peut être excessive. Dans ce cas on montre qu'il nous manque, dans le cadre de cette modélisation, des justifications pour mener une politique économique. La section 2 modélise le cas où l'épargne est déterminée de façon endogène par des agents qui optimisent. Dans ce cas, l'économie détermine, aussi bien à l'état régulier qu'en dynamique transitoire, le meilleur taux d'épargne possible. La section 3 s'écarte du modèle néoclassique pur et examine un cas typique où une inefficience de marché conduit à un taux d'épargne qui peut être insuffisant. Dans ce cas, l'intervention de la politique économique peut conduire à un taux d'épargne meilleur.

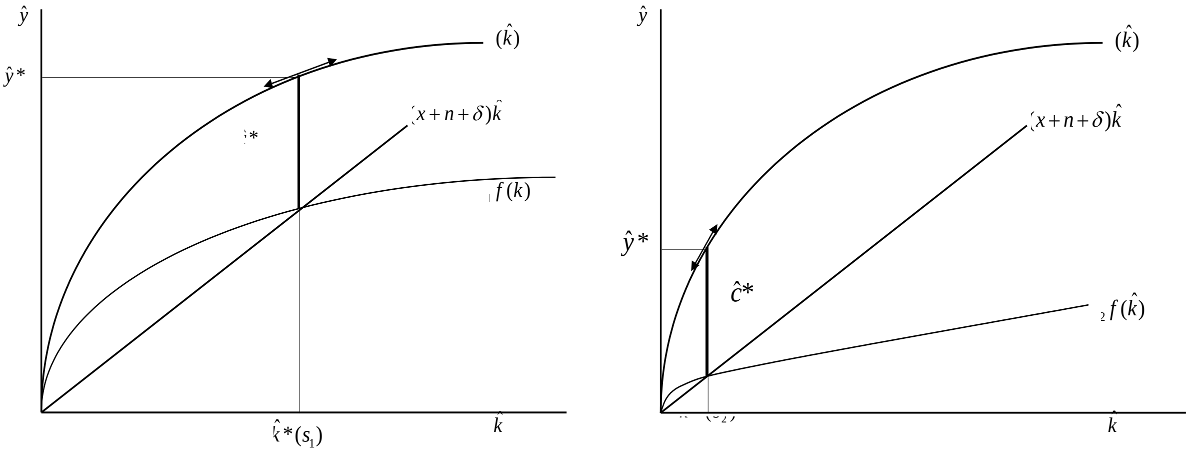
3.1 L'ÉPARGNE EXOGÈNE ET L'INEFFICIENCE DYNAMIQUE

Nous considérons ici, comme dans le modèle de Solow, que le taux d'épargne est exogène. Nous calculons le taux d'épargne optimal d'état régulier, puis examinons les conséquences transitoires d'une politique qui modifie ce taux.

3.1.1 L'optimum de Phelps de l'état régulier

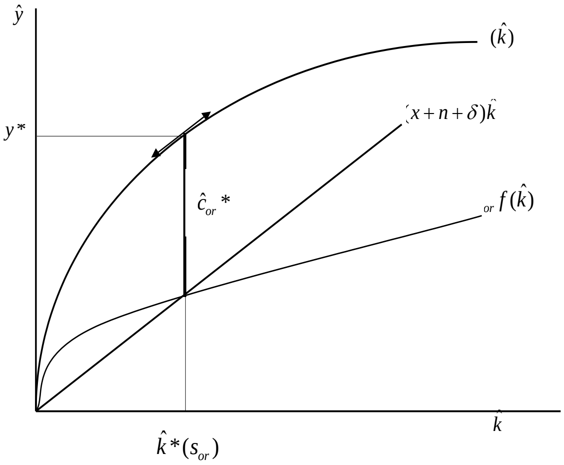
Dans le modèle de Solow à l'état régulier, on s'intéresse aux effets du taux d'épargne sur le bien-être. À l'état régulier, s ne détermine pas la croissance mais les niveaux de k^*, y^*, c^*, r^*, w^*. Ainsi, divers taux d'épargne ou diverses politiques d'épargne mèneront à des états réguliers présentant le même taux de croissance mais avec des niveaux différents de consommation, donc de bien-être.

Figure 3.1 : état régulier et épargne



Sur la figure 3.1, le choix de s par une société (s_1 élevé ou s_2 faible) ou par le dictateur bienveillant, détermine le niveau de consommation par tête à l'état régulier, et donc le bien-être de la société. Il existe donc (figure 3.2) une valeur de s (et donc de k*) qui maximise le niveau de consommation par tête d'état régulier : c’est l’optimum de Phelps, qui détermine le taux d'épargne optimal de la règle d'or.

Figure 3.2 : optimum de Phelps



Le problème d'optimisation peut être formalisé comme un problème de choix de $\hat{k}(s)$ qui maximise la consommation sous la contrainte d'état régulier :

$$Max_{\hat{k}}:\ \hat{c}(s)=(1-s)f\left(\hat{k}(s)\right)$$

$$sous:s.\left[f\left(\hat{k}(s)\right)\right]=(x+n+\delta).\hat{k}(s)$$

En reportant la contrainte dans la fonction objectif on a :

$$Max_{\hat{k}}:\ \hat{c}(s)=f\left(\hat{k}(s)\right)-(x+n+\delta).\hat{k}(s)$$

et la condition du premier ordre est : $f'(\hat{k}_{or})=Pmk_{or}=(x+n+\delta)$.

C'est la règle d'or : la consommation par tête d'état régulier est maximale lorsque le capital par tête d'état régulier est tel que la productivité marginale du capital est égale à

($x+n+\delta$). Puisque les capitalistes sont rémunérés à la productivité marginale du capital nette de l'amortissement $(Pmk-\delta)$ et puisqu'il y a arbitrage entre les deux formes d'actif, le capital et les prêts $(r=Pmk-\delta)$, on doit avoir l'égalité entre le taux d'intérêt et le taux de croissance de l'économie : $r_{or} = (x+n)$.

On peut calculer le taux d'épargne optimal lorsqu'on spécifie la fonction de production par exemple avec la Cobb-Douglas ($\hat{y}=\hat{k}^{\alpha}$).
En rappelant que $\hat{y}/\hat{k}=\hat{k}^{\alpha-1}$ et que $d\hat{y}/d\hat{k}=\alpha\hat{k}^{\alpha-1}$ et donc que $\hat{y}/\hat{k}=(1/\alpha)(d\hat{y}/d\hat{k})$

$$s_{or} = \frac{I}{Y} = \frac{DK+\delta K}{Y} = \frac{DK/K+\delta}{Y/K} = \frac{x+n+\delta}{(1/\alpha)Pmk_{or}} = \alpha$$

L'épargne optimale est égale à la part des profits dans le revenu. Si l'on reprend la paramétrisation α = 1/3, un taux d'épargne optimal égal à 30% paraît très important[1], même s'il s'agit du taux d'épargne brut. Nos sociétés épargnent moins que ce taux, sauf peut-être le Japon, comme le montre le tableau 3.1.

Tableau 3.1 : taux d'épargne des pays développés, moyenne 1980-90

Royaume-Uni	USA	Espagne	Italie	Allemagne	France	Japon
17,1%	21,0%	23,9%	24,4%	24,5%	25,2%	33,8%

Source : Summers et Heston, 1991.

On pourrait conclure sur cette base, que nos sociétés n'épargnent pas assez. Mais ce taux optimal, au sens de Phelps, ne l'est pas au sens utilitariste. Il est trop élevé comme on le verra dans la section 2, car il ne tient pas compte de la préférence pour le présent des agents. Pour l'instant la question est de savoir si une société qui n'épargne pas selon s_{or} a toujours intérêt à modifier son taux d'épargne pour adopter le taux optimal de la règle d'or.

3.1.2 Dynamique transitoire et politique économique

Si le taux d'épargne est inférieur à celui de la règle d'or, alors toute augmentation du taux d'épargne augmente le niveau de la consommation par tête d'état régulier. Si le taux d'épargne est supérieur à celui de la règle d'or, alors toute réduction du taux d'épargne augmente le niveau de la consommation par tête d'état régulier. Cette constatation n'implique cependant pas, que la modification du taux d'épargne soit nécessairement une politique optimale au sens de Pareto (une amélioration au sens de Pareto). Le problème est de savoir ce qui se passe durant la dynamique transitoire.

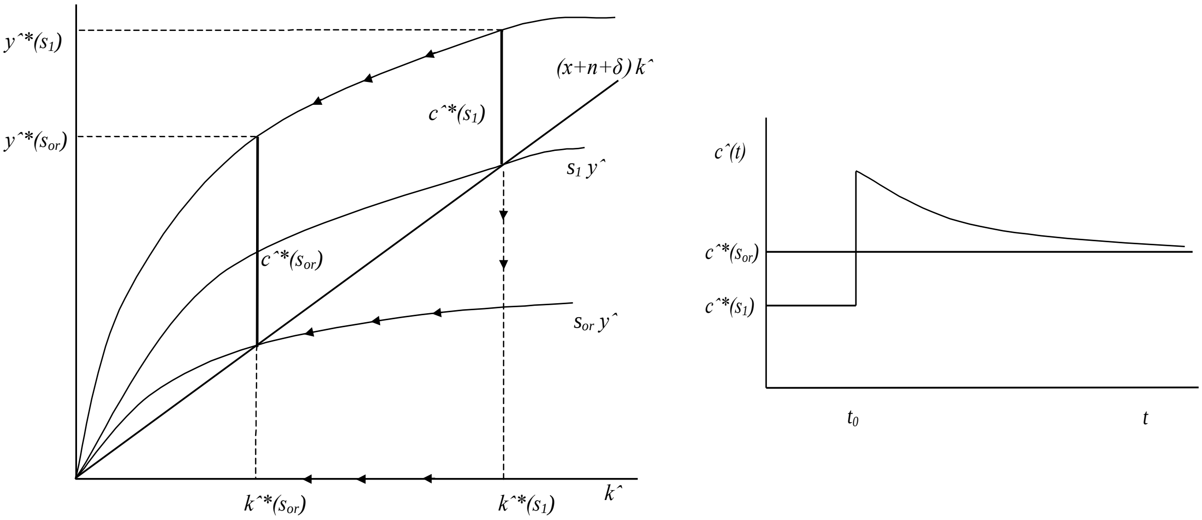
1) La figure 3.3 illustre le cas d'inefficience dynamique lorsque l'épargne est trop forte ($s_1 > s_{or}$). Si l'épargne est trop forte et donc le capital d'état régulier $\hat{k}^*(s_1)$, on peut être sûr que le dictateur bienveillant a intérêt à baisser le taux d'épargne. Ce taux d'épargne est inefficient,

---

[1] Quand par ailleurs on affirme que « α est trop faible », c'est pour signifier que le concept de capital est plus large que le concept de capital physique. Ici quand on affirme que « $s_{or} = \alpha$ est trop fort » c'est pour signifier que l'épargne optimale en capital physique est plus importante que l'épargne effective. Les deux propositions ne sont pas contradictoires.

car une consommation par tête plus élevée pourrait être obtenue en tout point du temps, en diminuant le taux d'épargne. Cette politique est une amélioration au sens de Pareto.

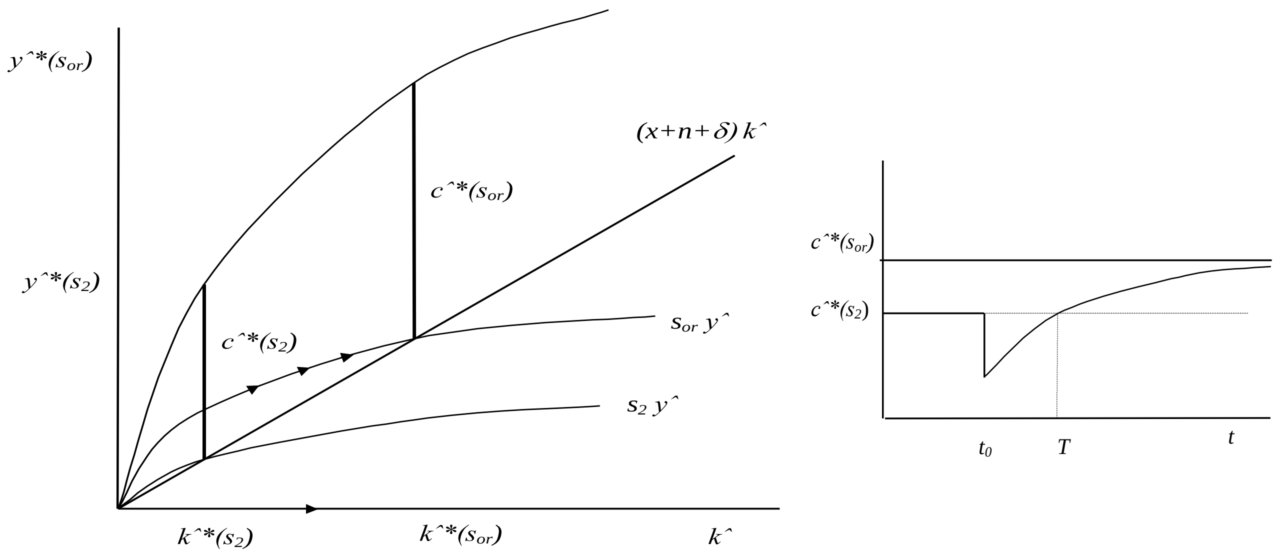
Figure 3.3 : épargne trop forte



Dès la date (t_0) de la politique (baisse de s_1 à s_{or}), la consommation se retrouve immédiatement au dessus de son niveau initial et y reste durant toute la dynamique transitoire, c'est donc une bonne politique (au sens de Pareto : toutes les générations y gagnent). Une épargne trop forte est une **inefficience dynamique** car une consommation par tête plus élevée pourrait être obtenue en tout point du temps.

2) La figure 3.4 illustre le cas où l'épargne est « trop faible » ($s_2 < s_{or}$). Si l'épargne est trop faible et donc le capital d'état régulier $\hat{k}^*(s_2)$, on ne peut pas savoir, dans ce modèle d'épargne exogène, si le dictateur à intérêt a augmenter le taux d'épargne. Cette politique n'est pas une amélioration au sens de Pareto.

Figure 3.4 : épargne trop faible



À la date (t_0) de la politique (hausse de s_2 à s_{or}), la consommation baisse, puis augmente progressivement durant la dynamique transitoire et se retrouve en fin de compte au dessus de son niveau initial. Mais durant la dynamique transitoire, entre t_0 et T la consommation est en dessous de son niveau initial. On ne peut pas être sûr que cette politique augmente le bien-être de la société. Augmenter le taux d'épargne augmentera le bien-être des générations futures, mais baisse pour l'instant le bien-être des générations présentes. Cette politique n'est donc pas une amélioration au sens de Pareto[2]. Mais cette politique peut cependant être une amélioration au sens utilitariste, tout dépend de la façon dont on pondère les intérêts des générations présentes et futures. Ce résultat fondamental sera montré dans le paragraphe 3.2.3.

Le modèle de Phelps nous assure d'une seule chose, c'est qu'il ne faut pas trop épargner. Une épargne excessive constitue une inefficience dynamique. Tous les états réguliers à droite de $\hat{k}^*_{or}$ sont des équilibres concurrentiels qui ne sont pas des optimums de Pareto. Cela peut paraître curieux, si l'on se rappelle du premier théorème de l'économie du bien être. Mais il en est simplement ainsi parce que nous avons considéré une épargne exogène. Au chapitre 10 nous considèrerons des raisons plus subtiles qui font qu'une situation d'inefficience dynamique peut survenir même dans le cas où l'épargne est endogène.

Pour l'instant, la question intéressante est de se demander si dans les faits, les économies sont en inefficience dynamique. Une épargne excessive correspond (voir figure 3.3) à une productivité marginale du capital ($r+\delta$) (la pente de la fonction de production), inférieure à ($x+n+\delta$), la pente de la droite d'investissement requis. Autrement dit se poser la question de savoir si les économies sont en inefficience dynamique revient à se demander si le taux d'intérêt est inférieur au taux de croissance $r < (x + n)$. Un tel cas de figure était à redouter durant les trente glorieuses où les taux d'intérêt et de croissance étaient approximativement r = 0 % et γ = 5 %. La situation actuelle est plutôt approximativement r = 5 % et γ = 2.5 %. Les économies ne sont donc pas aujourd'hui en situation d'inefficience dynamique, à droite de $\hat{k}^*_{or}$.

Il nous reste donc à expliquer pourquoi elles sont à l'équilibre à gauche de $\hat{k}^*_{or}$, avec un taux d'épargne « faible ». De plus on vient de voir que le critère de Pareto permet de définir ce qu'est une épargne « trop forte », mais ne permet pas d'expliquer ce qu'est une épargne « trop faible ». Pour comprendre ces deux points, il nous faut changer de critère de bien-être et prendre le critère utilitariste.

3.2 LE MODÈLE DE RAMSEY

Le modèle de Ramsey (1928) constitue la seconde référence (avec le modèle de Solow) des modèles de croissance, dans la mesure où il endogénéise le taux d'épargne. Ce taux devient expliqué par les comportements d'optimisation des agents. À coté des considérations du coté de l'offre qu'examine le modèle de Solow, le problème de la croissance est un problème de choix entre consommation présente et consommation future. Comprendre comment ce fait ce choix est donc fondamental. Vis-à-vis des problèmes que nous venons d'évoquer dans la section 1, l'intérêt de cette endogénéisation est double. Elle

---

[2] Remarquons que l'état régulier déterminé par s_2 (comme tous les états réguliers à gauche de k_{or}) est un optimum de Pareto, puisqu'il n'est pas possible d'améliorer le bien-être d'une génération sans diminuer celui d'une autre.

permet de comprendre pourquoi l'équilibre est à gauche de $\hat{k}*_{or}$, elle permet de juger la politique d'augmentation du taux d'épargne.

Nous présentons successivement l'équilibre concurrentiel, l'état régulier, la dynamique transitoire et enfin nous testons les prédictions de ce modèle néoclassique.

3.2.1 L'équilibre concurrentiel

La présentation de Barro et Sala-i-Martin (1995) distingue le problème des consommateurs de celui des producteurs. Elle est un peu plus compliquée que la présentation traditionnelle en terme d'agent, à la fois producteur et consommateur, mais bien plus instructive, nous la reprenons. Nous présentons longuement l'équilibre des consommateurs, puis celui des producteurs et enfin l'équilibre concurrentiel.

1) L'équilibre des consommateurs

À la date t = 0, le « père fondateur » d'une dynastie (qui croît au taux n) maximise l'utilité par tête de tous les membres de sa famille vivant à chaque date t. Ce critère d'optimisation est donc un critère utilitariste : on maximise la somme des utilités (ce qui présuppose une fonction d'utilité cardinale). Les utilités futures sont pondérées par le taux de préférence pure pour le présent (ρ > 0). Cette maximisation se fait sous trois contraintes : la contrainte budgétaire par tête à chaque date t, la contrainte de la richesse initiale donnée, la contrainte de la richesse finale actualisée, non négative, car il n'y a pas possibilité de laisser des dettes.

$$\text{Max}_{c(t)}\ U = \int_0^{+\infty} e^{-\rho.t} e^{n.t}\, u(c(t)).dt$$

sous : w(t) + r(t) . a(t) = c(t) + n . a(t) + Da(t)
à l'origine en t =0 : $a_0 > 0$ donné
à l'infini en $t \to \infty$: $a(t)\, e^{-(r-n)\, t} \geq 0$

a(t) représente les actifs nets par personne, a(t) est mesuré en termes réels, c'est-à-dire en unités de consommation. Les agents détiennent des actifs sous forme de droits de propriété sur le capital ou sous forme de prêts. Ils peuvent prêter et emprunter entre eux, mais l'agent représentatif (l'économie est fermée) a une position nette, nulle à l'équilibre. Puisque les deux sortes d'actifs, le capital et les prêts, sont supposés parfaitement substituables, ils doivent rapporter le même taux de rendement réel, r(t). La contrainte de budget d'un agent peut s'écrire comme une contrainte d'accumulation : Da = w + (r-n) a - c. Les actifs par tête (a) augmentent avec le revenu par tête, w + ra, et baissent avec la consommation par tête (c) et du fait de l'augmentation de la population, (na).

Le problème du « père fondateur » est de choisir le profil temporel de c(t) sous la contrainte d'accumulation (Da). Puisque w, r, n, sont données et puisque à un moment donné, l'état de la richesse (a) est donné, choisir la consommation c(t) c'est choisir l'épargne Da(t). La variable de contrôle est (c), la variable d'état est (a).

Le Lagrangien est : $$L = \int_0^{+\infty} e^{-(\rho-n).t}\left[u(c) + \lambda\left(w + (r-n)a - c - Da\right)\right].dt + \mu.a.e^{-(r-n)t}$$

Posons $\nu(t) = \lambda(t).e^{-(\rho-n).t}$ (λ est le prix implicite non actualisé et ν le prix implicite actualisé des actifs)

Le Hamiltonien est : $H = e^{-(\rho-n).t}u(c) + \nu\left(w + (r-n)a - c\right)$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \qquad \Rightarrow \nu = u' e^{-(\rho-n)t} \qquad (3.1)$$

$$\frac{d\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial a} \qquad \Rightarrow D\nu = -\nu(r-n) \qquad (3.2)$$

$$\lim_{t\to\infty} \nu(t).a(t) = 0 \qquad (3.3)$$

L'équation (3.2) est la condition d'optimalité sur le taux de croissance du prix implicite des actifs par tête.

$$D\nu = -\nu(r-n) \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{D\nu}{\nu} = r - n\,.$$

La valeur actuelle, du prix implicite des actifs par tête, diminue au taux (r-n). Cette condition d'optimalité est intuitive : Si la population ne croît pas, la valeur en terme d'utilité actuelle, des actifs détenus par un agent, diminue dans le temps à un taux égal à leur taux de rendement (r).

L'équation (3.3) est la condition de transversalité. La condition de transversalité indique que la valeur actualisée des actifs par tête (la quantité a(t) multipliée par le prix ν (t)) doit être nulle à la « fin » de la période de planification. En effet, la dynastie pourrait augmenter son utilité si les actifs détenus jusqu'à cette période terminale étaient utilisés pour augmenter la consommation.
Selon (3.2), le prix des actifs ν diminue dans le temps au taux (r-n) : $\nu(t) = \nu(0).e^{-(r-n)t}$. Posons $a(t) = a(0).e^{zt}$ où z est le taux de croissance de la quantité d'actifs. La condition de transversalité devient alors : $\lim_{t\to\infty} a(0)e^{zt}.\nu(0)e^{-(r-n)t} = 0$. Pour satisfaire cette condition, il faut donc que la quantité d'actifs par tête (a), croisse à un taux (z) inférieur à (r-n), ou de manière équivalente, que la quantité d'actifs de la dynastie (A=L.a), croisse à un taux inférieur à r. Cette condition dit qu'il n'est donc pas optimal pour une dynastie d'accumuler éternellement une quantité positive d'actifs à un taux plus élevé que r, car elle pourrait augmenter son utilité en consommant ces actifs. En cas d'emprunt, a(t) est négatif, et on peut se demander s'il n'est pas optimal de s'endetter éternellement, de faire croître la dette à un taux supérieur à r. Les dynasties (éternelles) aimeraient emprunter sans jamais avoir à rembourser le principal ou les intérêts, en remboursant chaque emprunt par un nouvel emprunt. Dans un jeu de Ponzi, l'agent emprunte 1 euro pour consommer et utilise un nouvel emprunt, de (1+r) ou plus, pour reconduire son principal et payer les intérêts. Dans ce cas, la dette de la dynastie croîtrait perpétuellement au taux r ou à un taux plus élevé. Mais cette dynastie emprunteuse devait trouver un prêteur consentant, c'est-à-dire une dynastie désireuse de détenir une quantité d'actifs croissants au taux r ou à un taux plus élevé. Mais la condition de transversalité dit que les prêteurs ne souhaitent pas, acquérir des actifs à un taux aussi élevé. Par conséquent, à l'équilibre, aucune dynastie ne pourra s'endetter indéfiniment, et la condition d'optimalité sera donc également vérifiée pour les emprunteurs (et du même coup la contrainte de richesse finale).

Les équations (3.1) et (3.2) donnent la règle de Ramsey-Keynes.

Réécrivons (3.1) comme suit :

$$v = u'.e^{-(\rho-n)t}$$
$$Dv = Du'.e^{-(\rho-n)t} - (\rho-n)e^{-(\rho-n)t}.u'$$
$$\frac{Dv}{v} = \frac{Du'.e^{-(\rho-n)t} - (\rho-n)e^{-(\rho-n)t}.u'}{u'.e^{-(\rho-n)t}}$$
$$\frac{Dv}{v} = \frac{Du'}{u'} - (\rho-n)$$
$$-\frac{Dv}{v} = (\rho-n) - \frac{Du'}{u'}$$

En égalisant (3.1) et (3.2) : $r = \rho - \frac{Du'}{u'}$

Où $\frac{Du'}{u'} = \frac{u''Dc}{u'} = \frac{u''}{u'}.c.\frac{Dc}{c}$

et donc : $r = \rho - \left(c\frac{u''}{u'}\right).\frac{Dc}{c}$

Avec la fonction d'utilité $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$

on a $\left(c\frac{u''}{u'}\right) = \left(c\frac{-\sigma.c^{-\sigma-1}}{c^{-\sigma}}\right) = -\sigma$

Et alors : $r = \rho + \sigma\frac{Dc}{c}$.

σ est l'élasticité de l'utilité marginale de la consommation, plus σ est grand, plus l'utilité marginale de la consommation diminue vite quand la consommation augmente, l'agent est très vite saturé. Un σ élevé signifie que les variations de la consommation se traduisent par de fortes variations de l'utilité marginale. Pour cette raison l'agent n'aime pas substituer de la consommation future (élevée, mais à faible utilité marginale) à de la consommation présente (faible mais à forte utilité marginale).

Remarque : $\lim_{\sigma\to 1}\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} = \ln c$.

$r = \rho + \sigma\frac{Dc}{c}$: La règle de Ramsey-Keynes nous dit qu'à l'équilibre, les agents égalisent leur taux d'intérêt psychologique au taux d'intérêt. Le taux d'intérêt psychologique indique que les agents préfèrent la consommation présente à la consommation future pour deux raisons. Premièrement, le terme ρ apparaît parce que les agents déprécient l'utilité future à ce taux. Deuxièmement, si (Dc/c > 0) comme les agents ont tendance à préférer une consommation régulière dans le temps, ils chercheront à niveler le flux en « transférant » une partie de leur consommation future vers le présent. Plus σ est élevé, plus la consommation présente est utile à la marge.

$\frac{Dc}{c} = \frac{1}{\sigma}(r-\rho)$: La règle de Ramsey-Keynes peut également s'interpréter ainsi : les agents choisissent un profil de consommation parfaitement uniforme, avec Dc/c = 0, si r = ρ en revanche, ils n'acceptent d'épargner pour obtenir un profil croissant (Dc/c > 0), que s'ils reçoivent en compensation un taux d'intérêt r suffisamment supérieur à ρ.

2) L'équilibre des producteurs

Nous reprenons le modèle de Solow avec progrès technique neutre au sens de Harrod. R = r + δ est le prix de location du capital et w le prix de location du travail.

L'entreprise maximise : $\pi = F(K, Le^{xt}) - RK - wL = Le^{xt}\left[f(\hat{k}) - R\hat{k} - we^{-xt}\right]$

A l'équilibre : $f'(\hat{k}) = r + \delta$ (3.4)

$$\left[f(\hat{k}) - \hat{k}.f'(\hat{k})\right].e^{xt} = w \quad (3.5)$$

3) L'équilibre concurrentiel et les deux équations dynamiques fondamentales

Tous les ménages sont identiques et toutes les entreprises ont la même fonction de production. A l'équilibre concurrentiel : les conditions d'optimalité (1,2,3,4,5) sont satisfaites et les conditions d'équilibre, sur les trois marchés, sont satisfaites.

Sur le marché du capital, la condition d'équilibre est : $a = k = \hat{k}.e^{xt}$. Elle permet avec (3.5) et (3.4) de réécrire la contrainte d'accumulation de l'agent représentatif en fonction de $\hat{k}$. Da = w + (r-n) a - c devient $D\hat{k}.e^{xt} + \hat{k}.x.e^{xt} = \left[f(\hat{k}) - \hat{k}f'(\hat{k}) \right].e^{xt} + \left[f'(\hat{k}) - \delta - n \right].\hat{k}.e^{xt} - c$

et en divisant par e^{xt} : $D\hat{k} = f(\hat{k}) - \hat{c} - [x + n + \delta].\hat{k}$ (3.6)

C'est l'équation dynamique du capital dans le modèle de Ramsey. Elle correspond à l'équation (2.4) du modèle de Solow.

Remarque : chez Solow le taux d'épargne était exogène, et l'évolution de la consommation était déterminée par celle de $\hat{y}$. Dans le modèle de Solow la dynamique du capital était suffisante pour déduire les dynamiques des autres variables. En effet : $\hat{c} = (1-s)f(\hat{k})$, donc $\frac{D\hat{c}}{\hat{c}} = \frac{D\hat{y}}{\hat{y}} = \frac{D\hat{k}}{\hat{k}}$ et comme $\hat{c} = \frac{c}{e^{x.t}}$, on a : $\frac{Dc}{c} = \frac{D\hat{c}}{\hat{c}} + x$.

Dans le modèle de Ramsey, l'évolution de la consommation est déterminée par la règle de Ramsey-Keynes : $\frac{Dc}{c} = \frac{1}{\sigma}(r - \rho)$. A l'équilibre concurrentiel, la variable r est égale à la productivité marginale du capital nette (condition 3.4) : $r = f'(\hat{k}) - \delta$. L'évolution de la consommation est donc déterminée par $\frac{Dc}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho \right]$. Comme $\frac{D\hat{c}}{\hat{c}} = \frac{Dc}{c} - x$, on a donc un équilibre concurrentiel caractérisé par une seconde équation dynamique qui détermine l'évolution de la consommation par tête efficaces :

$$\frac{D\hat{c}}{\hat{c}} = \frac{1}{\sigma}\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \sigma.x \right] \quad (3.7)$$

3.2.2 L'état régulier

A l'état régulier, toutes les variables croissent à taux constant. Or si $D\hat{k}/\hat{k} > 0$, $\hat{k} \to \infty$, et d'après les conditions d'Inada $f'(\hat{k}) \to 0$. Dans ce cas, d'après (3.7) $D\hat{c}/\hat{c} < 0$. Ce cas est donc impossible[3]. Le cas inverse l'est également. Le seul cas possible, comme dans le modèle de Solow, est le cas où $D\hat{k} = D\hat{c} = 0$. Les valeurs de $\hat{c}$ et $\hat{k}$ d'état régulier sont solutions de deux équations différentielles (3.6 et 3.7) annulées, elles satisfont les deux conditions suivantes :

$$D\hat{k} = f(\hat{k}) - \hat{c} - [x + n + \delta].\hat{k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{c}^* = f(\hat{k}^*) - (x + n + \delta)\hat{k}^*$$

$$D\hat{c} = \frac{1}{\sigma}\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \sigma.x \right].\hat{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + \sigma.x$$

---

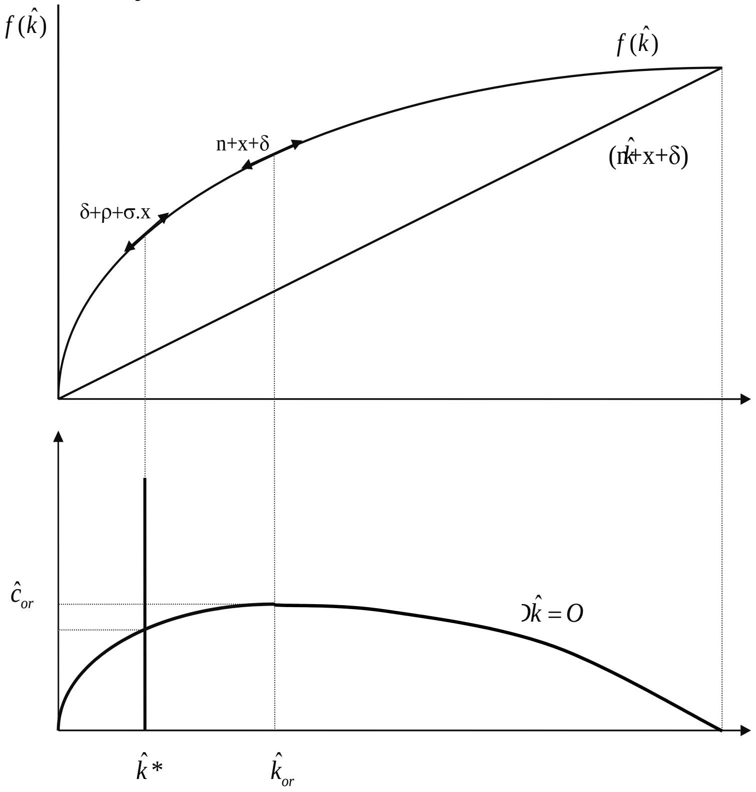
[3] Puisque $D\hat{c}/\hat{c}$ et $D\hat{k}/\hat{k}$ doivent être de même signe. Pour le montrer il faut étudier les variations de $\hat{c}$ par rapport au temps.

Figure 3.5 : état régulier du modèle de Ramsey

$D\hat{c}=0$ implique une valeur particulière pour la productivité marginale du capital (graphe du haut) et donc pour $\hat{k}$: droite verticale en $\hat{k}*$ sur le graphe du bas.

$D\hat{k}=0$ implique une valeur particulière pour $\hat{c}$: que la consommation soit un résidu après investissement requis. (lentille sur le graphe du haut) (courbe sur le graphe du bas).

L'intersection de la droite et de la courbe (graphe du bas) satisfait les deux conditions de l'état régulier.



L'état régulier est $\hat{k}*$, $\hat{c}*$.

Déterminons la condition d'existence de cet état régulier. Considérons la condition de transversalité : $\lim_{t\to\infty}\hat{k}.e^{x.t}.\nu(0)e^{-(r-n)t}=0$. Puisque $\hat{k}$ est constant à l'état régulier, cette condition est vérifiée lorsque $e^{-(r-n-x)t}$ tend vers zéro. Donc lorsque $r*=f'(\hat{k})-\delta>n+x$. Comme à l'état régulier $r*=\rho+\sigma x$, la condition pour avoir un état régulier est donc que $\rho+\sigma x$ > n + x. Une autre façon de trouver cette condition est d'examiner la fonction d'utilité intertemporelle. Pour qu'il existe une solution d'équilibre, il faut que l'utilité soit bornée. Pour cela, il faut que la préférence pour le présent soit suffisamment grande, ρ > n + x (1-σ), afin qu'il existe une solution au choix rationnel de l'agent. Cette condition (qui impose l'existence d'une préférence pour le présent, positive et suffisamment forte) doit donc être considérée comme un axiome de la rationalité, (au même titre que l'hypothèse de continuité des préférences dans le modèle de choix du consommateur, qui assure elle aussi l'existence de l'équilibre en excluant les ordres de préférences lexicographiques).

Déterminons la « règle d'or modifiée ». L'équation $f'(\hat{k})=\delta+\rho+\sigma x$ est la règle d'or modifiée. A l'optimum au sens utilitariste[4], le taux d'intérêt est égal au taux d'intérêt psychologique : $r*=\rho+\sigma x$. C'est une implication de la règle de Ramsey-Keynes à l'état régulier :

Tant que $r*>\rho+\sigma x$, les agents ont intérêt à investir, à renoncer à la consommation présente pour consommer plus demain, alors $D\hat{c}>0$.

---

[4] On a vu que tous les équilibres à gauche de $\hat{k}_{or}$ sont des optimums de Pareto. Parmi ceux-ci, un est optimal au sens de Phelps ($\hat{k}_{or}$) et un est optimal au sens utilitariste ($\hat{k}*$).

Tant que $r^* < \rho + \sigma x$, les agents ont intérêt à consommer aujourd'hui au prix d'un renoncement à la consommation future, alors $D\hat{c} < 0$.

A l'état régulier, puisque $D\hat{c} = 0$, on a $r^* = \rho + \sigma x$, où $x = Dc/c$.

Comparons maintenant les deux règles d'or. Maximiser la consommation d'état régulier selon le critère de Phelps, ou maximiser l'utilité intertemporelle selon le critère utilitariste, ne conduit évidemment pas à la même norme d'optimalité. La règle d'or est (r_{or} = x+n), la règle d'or modifiée est [$r^* = \rho + \sigma x$]. Selon la condition d'existence, $\rho + \sigma x >$ n+x et donc r* > r_{or} ou encore $f'(\hat{k}^*) > f'(\hat{k}_{or})$. Donc (et on le voit sur la figure 3.5) le niveau de consommation par tête, qui découle de la règle d'or modifiée, est inférieur à celui qui résulte de l'application de la règle d'or. En effet, la règle d'or modifiée résulte d'une modélisation où l'agent représentatif a une préférence pour le présent, et cette préférence pour le présent a un prix : c'est l'écart entre $\hat{c}^*$ et $\hat{c}_{or}$. Il faut bien noter que ce résultat est optimal au sens utilitariste (il l'est donc aussi au sens de Pareto) ; étant donné sa préférence pour le présent, « le père fondateur de la dynastie » préfère, à la date t=0, la consommation d'état régulier $\hat{c}^*$ inférieure à $\hat{c}_{or}$. On comprend donc pourquoi l'équilibre peut être à gauche de $\hat{k}_{or}$.

Calculons selon notre nouveau critère le taux d'épargne optimal. On va calculer le taux d'épargne déterminé de façon endogène. Avec la Cobb-Douglas ($\hat{y} = \hat{k}^{\alpha}$) on a :

$$s^* = \frac{I}{Y} = \frac{DK + \delta K}{Y} = \frac{DK/K + \delta}{Y/K} = \frac{x + n + \delta}{(1/\alpha)Pmk^*} = \alpha \frac{x + n + \delta}{(\delta + \rho + \sigma x)} \qquad (3.8)$$

En prenant les valeurs habituelles : α = 0,3, x = 2%, n = 1%, δ = 5%, ρ = 2%, σ = 2, on trouve un taux d'épargne optimal égal à 22%, inférieur au taux qui résulte de la règle d'or qui est égal à α = 30%. Le modèle de Ramsey donne une explication plus réaliste des taux d'épargne, il explique leur faiblesse par la préférence pour le présent.[5]

Nous sommes maintenant en mesure de montrer qu'il n'y a pas d'inefficience dynamique dans le modèle de Ramsey, puisque par la condition d'existence, l'état régulier est nécessairement à gauche de $\hat{k}_{or}$, l'excès d'épargne ne peut pas exister. Le taux d'épargne est optimal, il ne peut être trop élevé. Il pouvait l'être dans le modèle de Solow, car le taux d'épargne exogène était « arbitraire », il pouvait donc être trop fort. Concrètement, le modèle de Ramsey prédit un taux d'intérêt supérieur au taux de croissance, ce qui est la situation des économies occidentales depuis les années 1980. Dans une telle situation, il n'y a pas à craindre une épargne excessive. Dans le chapitre 10, nous retrouverons la possibilité d'inefficience dynamique dans le cadre du modèle à générations imbriquées.

3.2.3 Dynamique transitoire

---

[5] Mais il donne une prédiction plus élevée que le modèle du cycle de vie (cf. chapitre 10) où les agents égoïstes n'épargnent que pour désépargner durant leur retraite, ce qui implique un taux d'épargne macroéconomique nul. Dans le modèle du cycle de vie, on a un taux d'épargne positif si on admet : 1) une croissance de la population qui implique que plus de jeunes épargnent que de vieux ne désépargnent, 2) un progrès technique qui fait que les jeunes sont plus riches que les vieux et qu'ils épargnent donc plus que les vieux ne désépargnent, 3) l'incertitude qui explique l'épargne de précaution. On remarque que x et n sont également présents dans l'explication « à la Ramsey » : n joue positivement sur le taux d'épargne, x joue négativement (pour σ = 2), positivement pour σ < $(\rho + \delta)/(n + \delta)$, ce qui se comprend puisque plus σ est élevé, plus les agents préfèrent la « faible consommation présente » (voir exercice D1).

La dynamique transitoire est intéressante pour deux raisons, l'une positive, l'autre normative :
1) Comme dans le modèle de Solow, on vérifie si l'état régulier est stable. On va voir que c'est le cas, ce résultat s'appelle le théorème de l'autoroute.
2) Le critère de Pareto ne nous permettait pas de savoir, s'il fallait, et comment il fallait, passer d'une épargne trop faible à l'épargne optimale d'état régulier. Le critère utilitariste répond à cette question de la façon suivante : La dynamique transitoire résulte ici des comportements optimaux de consommation intertemporelle des agents de la société, sensés maximiser la fonction d'utilité intertemporelle utilitariste, elle est donc nécessairement optimale.

Construisons le diagramme de phase.
En dynamique transitoire, $D\hat{c}$ croît ou décroît selon que la productivité marginale du capital est plus ou moins forte :

$$D\hat{c} = (1/\sigma)\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \sigma x\right]\hat{c} = 0 \iff f'(\hat{k}) = \delta + \rho + \sigma x \iff \hat{k} = \hat{k}*$$

$$D\hat{c} = (1/\sigma)\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \sigma x\right]\hat{c} > 0 \iff f'(\hat{k}) > \delta + \rho + \sigma x \iff \hat{k} < \hat{k}*$$

$$D\hat{c} = (1/\sigma)\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \sigma x\right]\hat{c} < 0 \iff f'(\hat{k}) < \delta + \rho + \sigma x \iff \hat{k} > \hat{k}*$$

En dynamique transitoire $D\hat{k}$ croît ou décroît selon que la consommation est plus ou moins forte :

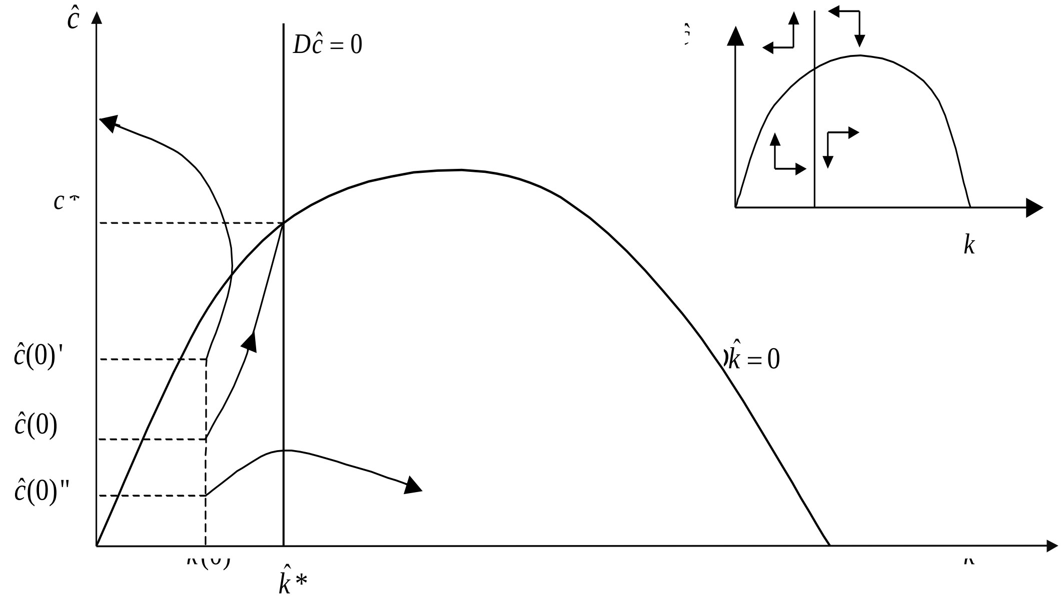
$$D\hat{k} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\,\hat{k} = 0 \iff \hat{c} = f(\hat{k}) - (x+n+\delta)\hat{k}$$

$$D\hat{k} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\,\hat{k} > 0 \iff \hat{c} < f(\hat{k}) - (x+n+\delta)\hat{k}$$

$$D\hat{k} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\,\hat{k} < 0 \iff \hat{c} > f(\hat{k}) - (x+n+\delta)\hat{k}$$

La figure 3.6 donne le diagramme de phase, qui décrit la dynamique transitoire du modèle.

Figure 3.6 : dynamique transitoire du modèle de Ramsey



Dans le médaillon de la figure 3.6, l'espace est divisé en quatre régions, les flèches indiquent la direction de $\hat{c}(t)$ et $\hat{k}(t)$ dans chaque région. Seules les régions sud-ouest et nord-est permettent la convergence vers l'état régulier $\hat{c}*$ et $\hat{k}*$. C'est donc dans ces deux régions que passe le bras stable qui décrit la dynamique convergente de $\hat{c}(t)$ et $\hat{k}(t)$. C'est le sentier selle. Le modèle est donc stable au sens du point selle. En suivant le sentier selle, $\hat{c}(t)$ et $\hat{k}(t)$ convergent vers $\hat{c}*$ et $\hat{k}*$. Les autres sentiers ne convergent pas vers l'état régulier.

Le résultat important du modèle est qu'il est optimal, pour des agents rationnels comme ceux que l'on a décrits, de suivre ce sentier selle, et c'est ce qu'ils font.

En effet, si l'économie démarre avec $\hat{k}(0)$, il existe une seule consommation $\hat{c}(0)$ qui la positionne sur le sentier stable. Cette consommation est, dans ce modèle, déterminée par les conditions d'optimalité (1,2,3,4,5). Elle est optimale pour l'instant zéro et pour toutes les dates futures jusqu'à l'infini, puisqu'elle résulte du problème d'optimisation. La chronique $\hat{c}(t)$ qui en résulte, respecte à chaque date les conditions (1,2,3,4,5). Les autres consommations positionnent l'économie sur un sentier divergent et non optimal. Par exemple, si $\hat{c}(0)' > \hat{c}(0)$, cela veut dire que les agents n'épargnent pas assez, que l'épargne est « trop faible », la consommation $\hat{c}(t)'$ va augmenter jusqu'à ce que, dans la région nord-ouest, $\hat{k}$ devienne nul, ainsi qu'en définitive, la production et la consommation. Si $\hat{c}(0)'' < \hat{c}(0)$, cela veut dire que les agents épargnent « trop » et dans la région sud-est, $\hat{c}(t)''$ va baisser pour que $\hat{k}$ devienne maximal et en définitive la consommation nulle.

Théorème de l'autoroute : la dynamique transitoire qui résulte de l'équilibre concurrentiel est celle qui est stable. Le sentier selle fait converger l'économie vers l'état régulier, c'est-à-dire de croissance à taux constant.

Premier théorème de l'économie du bien-être en dynamique : cet équilibre concurrentiel est optimal au sens utilitariste[6], donc le sentier selle suivi par l'économie l'est. À chaque instant, les conditions d'optimalité (1,2,3,4,5) sont satisfaites. Un dictateur bienveillant qui diviserait la production entre consommation et épargne ne ferait pas mieux.

Déterminons maintenant le sentier selle de $\hat{c}(t)$ et $\hat{k}(t)$. Parmi les trajectoires de $D\hat{k}$ et $D\hat{c}$, il s'agit d'identifier la seule trajectoire qui converge. On repart du système de deux équations différentielles : $D\hat{k} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\,\hat{k}$ et $D\hat{c} = (1/\sigma)\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \sigma x\right]\hat{c}$.

Les deux équations ci-dessus constituent un système d'équations différentielles non linéaires. On les linéarise au voisinage de l'état régulier ($\hat{c}*, \hat{k}*$) :

$$
\begin{aligned}
D\hat{k} &= G(\hat{k},\hat{c}) \\
D\hat{k} &\approx G(\hat{k}*\hat{c}*) + \frac{dG}{d\hat{k}}(\hat{k}-\hat{k}*) + \frac{dG}{dc}(\hat{c}-\hat{c}*) \\
D\hat{k} &\approx 0 + \left[f' - (x+n+\delta)\right](\hat{k}-\hat{k}*) + (-1)(\hat{c}-\hat{c}*) \\
D\hat{k} &\approx \left[(\rho+\sigma x+\delta) - (x+n+\delta)\right](\hat{k}-\hat{k}*) - (\hat{c}-\hat{c}*) \\
D\hat{k} &\approx \left[\rho - n - x(1-\sigma)\right](\hat{k}-\hat{k}*) - (\hat{c}-\hat{c}*) \\
D\hat{k} &\approx \zeta(\hat{k}-\hat{k}*) - (\hat{c}-\hat{c}*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D\hat{c} &= H(\hat{k},\hat{c}) \\
D\hat{c} &\approx H(\hat{k}*\hat{c}*) + \frac{dH}{d\hat{k}}(\hat{k}-\hat{k}*) + \frac{dH}{d\hat{c}}(\hat{c}-\hat{c}*) \\
D\hat{c} &\approx f''\frac{\hat{c}*}{\sigma}(\hat{k}-\hat{k}*) + \frac{f' - \delta - \rho - \sigma x}{\sigma}(\hat{c}-\hat{c}*) \\
D\hat{c} &\approx f''\frac{\hat{c}*}{\sigma}(\hat{k}-\hat{k}*)
\end{aligned}
$$

[6] Le premier théorème de l'économie du bien-être de la microéconomie utilise le critère de Pareto. Évidemment un optimum au sens utilitariste est aussi un optimum au sens de Pareto (la réciproque n'est pas vraie).

On a donc le système linéarisé :

$D\hat{c} = \chi(\hat{k} - \hat{k}^*)$ *avec* $\chi = f''\hat{c}^*\frac{1}{\sigma}$,

$D\hat{k}(t) = \zeta(\hat{k} - \hat{k}^*) - (\hat{c} - \hat{c}^*)$ *avec* $\zeta = \rho - n - x(1-\sigma)$.

Il s'agit de déterminer les solutions de ce système et de choisir celles qui convergent. Pour cela, on peut se ramener dans le cas présent à un système à une seule équation différentielle d'ordre 2 en $\hat{k}$.

En différenciant $D\hat{k}$ par rapport à t on a : $\frac{d^2\hat{k}(t)}{dt^2} = \zeta\frac{d\hat{k}(t)}{dt} - \frac{d\hat{c}(t)}{dt}$.

On remplace $d\hat{c}/dt$ par son expression et on obtient : $\frac{d^2\hat{k}(t)}{dt^2} - \zeta\frac{d\hat{k}(t)}{dt} + \chi\hat{k}(t) = \chi\hat{k}^*$.

C'est une équation différentielle d'ordre 2 en $\hat{k}$.

Son polynôme caractéristique est $x^2 - \zeta x + \chi = 0$. Il a deux racines :

Une négative, $x_1 = \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4\chi}}{2} < 0$, l'autre positive, $x_2 = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4\chi}}{2} > 0$.

La première racine est convergente la seconde divergente, en effet les solutions de l'équation homogène sont, $\hat{k}(t) = \alpha_1 e^{x_1 t} + \alpha_2 e^{x_2 t}$ et les solutions de l'équation générale sont : $\hat{k}(t) = \hat{k}^* + \alpha_1 e^{x_1 t} + \alpha_2 e^{x_2 t}$ où α_1 *et* α_2 sont des constantes d'intégration arbitraires.

Parmi ces solutions, seules les trajectoires convergentes sont optimales. Pour ne retenir que celles-ci, l'agent choisit $\alpha_2 = 0$ et la trajectoire convergente dictée par la condition à l'origine $\alpha_1 = \hat{k}(0) - \hat{k}^*$:

$$\hat{k}(t) = \hat{k}^* + \left[\hat{k}(0) - \hat{k}^*\right]e^{x_1 t} \qquad (3.9)$$

Comme $D\hat{k}(t) = \zeta(\hat{k} - \hat{k}^*) - (\hat{c} - \hat{c}^*)$, la consommation optimale en (t) est :

$\hat{c}(t) = \hat{c}^* + \zeta(\hat{k}(t) - \hat{k}^*) - D\hat{k}$ or $D\hat{k} = x_1(\hat{k}(0) - \hat{k}^*)e^{x_1 t}$ et donc :

$$\hat{c}(t) = \hat{c}^* + \left(\zeta - x_1\right)\left[\hat{k}(0) - \hat{k}^*\right]e^{x_1 t} \qquad (3.10)$$

On a donc obtenu nos deux sentiers convergents qui constituent le sentier selle. On remarque que, comme chez Solow, le modèle de Ramsey prédit une convergence conditionnelle à l'état régulier. Cette convergence s'effectue au taux x_1. On peut enfin déterminer pour un $\hat{k}(0)$ donné, la valeur de la consommation initiale permettant à l'économie d'être sur le sentier selle : $\hat{c}(0) = c^* + \left(\zeta - x_1\right)\left[\hat{k}(0) - \hat{k}^*\right]$.

Il nous reste à déterminer le coefficient de convergence (β) pour la technologie Cobb-Douglas $\hat{y} = \hat{k}^\alpha$. Le coefficient de convergence est donné par la valeur de x_1 :

$-\beta = x_1 = \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4\chi}}{2} < 0$ avec $\chi = f''(k^*).c^*\frac{1}{\sigma}$ et $\zeta = \rho - n - x(1-\sigma)$

En utilisant $f(\hat{k}) = \hat{k}^\alpha$ on évalue facilement f''. En effet, on a $f'(\hat{k}) = \alpha\hat{k}^{\alpha-1}$ et donc :

$f'' = \alpha(\alpha-1)\hat{k}^{\alpha-2} = (\alpha-1)\frac{1}{\alpha}\alpha^2\frac{\hat{k}^{(\alpha-1)}}{\hat{k}}\frac{\hat{k}^\alpha}{\hat{k}^\alpha} = (\alpha-1)\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha^2.\hat{k}^{(\alpha-1)2}}{f(\hat{k}^*)} = \frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{f'(\hat{k}^*)^2}{\hat{y}^*}$ on déduit :

$\chi = f''(\hat{k}^*).\hat{c}^* \dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{\alpha-1}{\alpha.\sigma}.f'(\hat{k}^*)^2 \dfrac{\hat{c}^*}{\hat{y}^*} = \dfrac{\alpha-1}{\alpha.\sigma}.f'(\hat{k}^*)^2(1-s^*)$ que l'on peut évaluer à proximité de l'état régulier par $\chi = \dfrac{\alpha-1}{\alpha.\sigma}.(\delta+\rho+\sigma x)^2(1-\alpha\dfrac{x+n+\delta}{\delta+\rho+\sigma x})$.

En remplaçant, on trouve la valeur du coefficient de convergence :

$$\beta = \frac{1}{2}\left\{\left\{(\rho-n-x(1-\sigma))^2 + 4\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)(\rho+\delta+\sigma x)\left[\frac{\rho+\delta+\sigma x}{\alpha}-(n+x+\delta)\right]\right\}^{1/2} - (\rho-n-x(1-\sigma))\right\}$$

Pour des valeurs économiquement raisonnables des paramètres (voir ci dessous) :
β est une fonction décroissante de σ.
β est une fonction croissante de ρ.
β est une fonction fortement décroissante de α. Si $\alpha = 1$, alors $\beta = 0$. Il n'y a pas de convergence, comme dans le modèle AK que l'on examinera dans la section 3.
β est une fonction croissante de δ, n et x, comme dans le modèle de Solow.

Il peut sembler curieux que β soit une fonction croissante de ρ. On s'attend à ce que des individus plus patients épargnent plus et convergent plus vite. Inversement si ρ augmente, le niveau d'épargne tend à baisser. Mais l'effet de l'épargne sur la vitesse de convergence dépend non du niveau de l'épargne, mais de sa tendance à augmenter ou baisser durant la convergence. La question intéressante est de savoir si les pays vont épargner beaucoup quand ils sont pauvres ou quand ils sont riches ? S'ils épargnent beaucoup lorsqu'ils sont pauvres ils vont converger vite. Mais s'ils se mettent à épargner seulement lorsqu'ils sont suffisamment riches, ils vont converger lentement. Ce comportement dépend évidemment de σ. Nous allons examiner cette question en liaison avec les performances empiriques du modèle.

3.2.4 Tests du modèle néoclassique de Ramsey

Le modèle de Ramsey implique trois prédictions contraires aux faits : l'évolution du taux d'épargne, le taux de croissance durant la convergence, le niveau des taux d'intérêt.

1) L'évolution du taux d'épargne

Le taux d'épargne, contrairement au modèle de Solow où il était exogène et constant, est dans le modèle de Ramsey variable durant la transition. En effet théoriquement, durant la transition, r diminue, ce qui provoque un effet de substitution, une baisse de l'incitation à épargner. Mais durant la transition, y augmente, ce qui provoque un effet revenu qui dépend de σ. Si σ est élevé, l'agent à tendance à lisser sa consommation, donc à ne pas trop épargner tant qu'il est pauvre puis à épargner quand il devient riche et saturé. Une raison (les rendements décroissants) pousse l'épargne à la baisse, l'autre (la saturation) à la hausse.

Empiriquement on observe que le taux d'épargne (d'investissement) est croissant durant le développement économique. Voilà quelques valeurs de I/Y en 1985

Tableau 3.2 : taux d'épargne et niveau de développement, (moyenne 1980-90)

Tchad	Ouganda	Inde	Brésil	USA
1,4%	1,8%	14,4%	16,9%	21%

Source : Summers et Heston, 1991.

De même, on a vu que la régression de Mankiw-Romer-Weil (1992) donne un lien positif entre l'épargne et la richesse : $\ln(y_i) = 6{,}87 + 1{,}48\ln(s_i) - 1{,}48\ln(n_i+0{,}05)$. La figure C2 de l'annexe C illustre cette corrélation positive.

Un autre argument est donné par les régressions de convergence conditionnelle. Ces régressions donnent une corrélation positive entre l'épargne et le taux de croissance (la figure C1 de l'annexe C illustre cette corrélation positive). Mais Barro (1990), fait remarquer, que mieux on explique la valeur de l'état régulier du PIB par tête (y*), plus le coefficient de l'épargne diminue. Cela suggère que la corrélation entre l'épargne et le taux de croissance est de causalité inverse. C'est le développement qui influence la propension à épargner. C'est l'effet revenu qui semble l'emporter sur l'effet de substitution.

Puisque le taux d'épargne est variable dans le modèle de Ramsey, il est intéressant de voir si ce modèle prédit cette croissance de l'épargne durant le processus de développement.

On vient de dire que l'épargne croît dans le modèle de Ramsey, si on a un σ élevé, si l'effet revenu domine. Barro et Sala-i-Martin (1996 p. 88) montrent que pour des valeurs raisonnables des paramètres, la valeur critique de σ est égale à 17. Il faut σ > 17 pour que l'épargne croisse. C'est une valeur trop élevée pour être réaliste, une valeur raisonnable est σ = 2. Dans ce cas, le modèle de Ramsey prédit donc une épargne décroissante durant le processus de développement, une forte épargne des pauvres.

On a une première prédiction du modèle de Ramsey contraire aux faits. Mais voyons pourquoi en examinant la convergence, car si, conformément au modèle, les agents épargnent beaucoup lorsqu'ils sont pauvres, ils vont d'après ce modèle converger vite, trop vite.

2) La convergence

Nous avons vu (§2.3.2) qu'il y a un consensus empirique pour dire que β =0,02. Nous avons également expliqué que le modèle de Solow prédisait une convergence trop rapide, un β =0,056. Un tel taux implique que les variables y et k rattrapent chaque année 5,6% de l'écart qui les sépare de y* et k*, ce qui est trop rapide. Qu'en est-il dans le modèle de Ramsey ?

Les coefficients de convergence sont β_S chez Solow et β_R chez Ramsey :

$$\beta_s = (1-\alpha)(x+n+\delta)$$

$$\beta_R = \frac{1}{2}\left\{\left\{\left(\rho-n-x(1-\sigma)\right)^2 + 4\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)\left(\rho+\delta+\sigma x\right)\left[\frac{\rho+\delta+\sigma x}{\alpha}-(n+x+\delta)\right]\right\}^{1/2} - \left(\rho-n-x(1-\sigma)\right)\right\}$$

Prenons la paramétrisation de référence suivante :

α =0,3	x=0,02	n=0,01	δ =0,05	ρ =0,02	σ =2

Avec ces paramètres, on trouve : β_S = 0,056 et β_R = 0,09. Les deux valeurs prédites de β sont trop élevées, et la convergence prédite par Ramsey est encore plus rapide que chez Solow.

Sur la base de cette paramétrisation, calculons β_R en modifiant un paramètre *ceteris paribus* :

σ = 2	σ = 20	σ = 40	σ = 100	σ = 100000	σ = 5E12
β = 0,09	β = 0,055	β = 0,051	β = 0,048	β = 0,046	β = 0,02

ρ = 0,02	ρ = 0,03	ρ = 0,05	ρ = 0,1
β = 0,09	β = 0,097	β = 0,11	β = 0,14

α = 0,3	α = 0,4	α = 0,5	α = 0,6	α = 0,7	α = 0,75
β = 0,09	β = 0,06	β = 0,04	β = 0,035	β = 0,023	β = 0,019

n = 0,01	n = 0,02	n = 0,05	n = 0
β = 0,09	β = 0,094	β = 0,10	β = 0,08

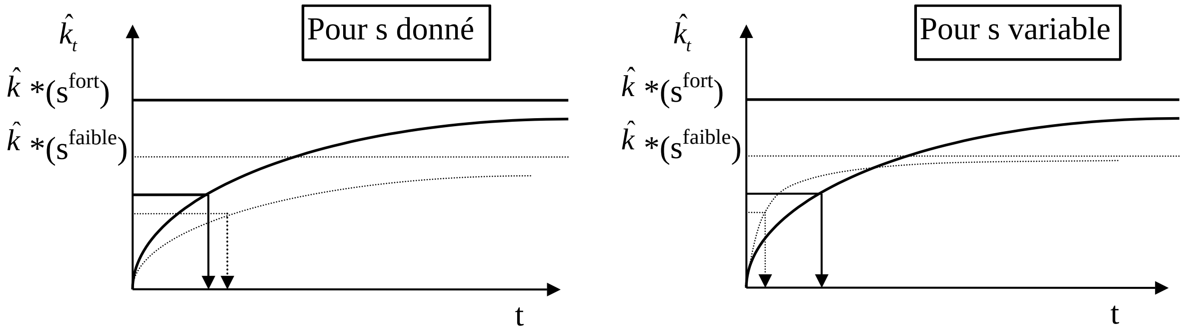
x = 0,02	x = 0,03	x = 0,05	*x = 0*
β = 0,09	β = 0,10	β = 0,13	β *= 0,06*

δ = 0,05	δ = 0,06	δ = 0,1	δ *= 0*
β = 0,09	β = 0,1	β = 0,136	□ β *= 0,046*

σ : β est une fonction peu sensible aux variations de σ, pour σ = 20, on a β_R = 0,055. Il faut un σ très élevé pour obtenir un coefficient de convergence identique à celui de Solow qui pourtant est trop élevé, et il faudrait une valeur impossible pour obtenir le coefficient de convergence de 2%. Certes, quand σ>17, les pays vont épargner quand ils sont riches, le profil de l'épargne est croissant (l'effet revenu domine), cela devrait diminuer leur vitesse de convergence. Mais l'effet de substitution joue en sens inverse. Quand ils sont riches le taux d'intérêt devient faible, ce qui décourage l'épargne. Ils vont donc avoir un profil croissant mais très faiblement croissant, et cela ne diminue pas sensiblement la vitesse de convergence. Lorsque les deux effets se compensent (pour σ=17), le profil de l'épargne est constant, et l'on retrouve un β identique à celui de Solow.

ρ : On voit que β est une fonction croissante de ρ. Si ρ augmente, le taux d'épargne d'état régulier diminue, cela rapproche l'état régulier, et pour cette raison il y a une tendance à converger moins vite. Mais l'effet de ρ sur β dépend aussi de la tendance de l'épargne à augmenter ou baisser durant la convergence et ce comportement dépend de σ. Si σ est faible, les pays épargnent plus lorsqu'ils sont pauvres (k faible) et ils vont converger vite. La valeur σ = 2 implique donc une épargne décroissante durant la transition, donc une convergence rapide.

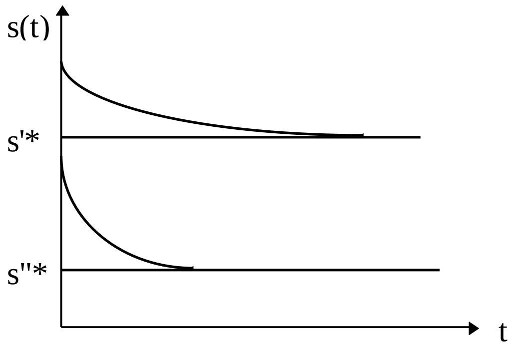
Figure 3.7 : modification des comportements d'épargne chez Solow et Ramsey et convergence



Dans le modèle de Solow (s donné sur la figure 3.7), une baisse de l'épargne rapproche l'état régulier et donc diminue la vitesse de convergence, les flèches montrent que la demi vie du processus de convergence s'allonge. Dans le modèle de Ramsey (s variable sur la figure 3.7), une augmentation de ρ, baisse l'épargne d'état régulier mais également modifie le sentier de k(t). Sous l'hypothèse σ=2, l'épargne est relativement plus forte au début du processus qu'à la fin, le capital croît plus vite au début. Comme les taux de croissance déclinent dans le temps, ce sont « les premiers qui font converger ». Les flèches montrent que la demi-vie du processus de convergence se raccourcit et donc que la vitesse de convergence augmente.

On peut expliquer cela d'une autre façon par la figure 3.8 :

Figure 3.8 : augmentation de la préférence pour le présent et convergence



-Si *ceteris paribus*, le taux de préférence pure pour le présent augmente, le niveau du taux d'épargne d'état régulier baisse, et l'ensemble du sentier d'épargne baisse.
-Mais ce qui détermine l'épargne, c'est le taux psychologique $\psi = \rho + \sigma$. Dc/c. Plus k est faible, plus *ceteris paribus*, Dc/c est élevé, moins l'effet de ρ joue sur ψ.
-L'effet de l'augmentation de ρ sur ψ est d'autant plus faible que k est faible, donc s(t) diminue moins (à la suite de la hausse de ρ) au début du processus.

Ce résultat du modèle de Ramsey est remarquablement optimiste, puisqu'il signifie que les pays pauvres qui ont une forte préférence pour le présent sont handicapés par un état régulier de faible niveau, mais « privilégiés » par une convergence conditionnelle rapide. Concrètement le message de politique économique est « qu'ils sont à l'optimum » et qu'il n'y a pas de politique de développement à mener !

α : On voit que la vitesse de convergence est très sensible à α. La seule valeur réaliste de β est obtenue pour α = 0,075. On a la même conclusion qu'avec le modèle de Solow. Pour α = 0,075, on trouve : β_S = 0,02 et β_R = 0,019. Les deux valeurs calibrées des coefficients de convergence sont alors conformes à la convergence observée.

n, x, δ : On voit que β est une fonction croissante de ces paramètres. Pour aucune valeur de ces paramètres on n'obtient un coefficient conforme aux faits.

3) Le taux d'intérêt

Comme le modèle de Solow, le modèle de Ramsey prédit une valeur excessive du taux d'intérêt des pays pauvres. Prenons la paramétrisation suivante pour le taux d'intérêt d'état régulier, $r^* = \rho + \sigma x$ = 0,02 + 3 (0,02) = 0,08, ce qui donne une productivité marginale du capital d'état régulier de : f '(k*)= r* + δ = 0,08 + 0,05 = 0,13.
Supposons une technologie Cobb-Douglas : $y = k^{\alpha}$, et donc $Pmk = \alpha k^{\alpha - 1}$.

Si α = 0,3 alors, Pmk = 0,3 k $^{-0,7}$.
Supposons dans un pays pauvre k = 1, et dans un pays riche à l'état régulier k* = 10, c'est a dire supposons un rapport de 1 à 10 des capitaux par tête entre les pays riches et les pauvres. Le rapport des productivités marginales du capital est alors de 1 à 5 : $\frac{Pmk_P}{Pmk_R} = \frac{1}{10}^{-0,7} = 5$.

En admettant que les pays riches sont à l'état régulier avec une productivité marginale du capital de 0,13, cela implique une productivité marginale du capital dans les pays pauvres de : $Pmk_p = 5 \times 0,13 = 0,65$. Cette productivité marginale du capital de 65% dans les pays pauvres implique un taux d'intérêt de 60%. Ces valeurs sont irréalistes comme l'ont souligné King et Rebelo (1993).

Remarquons la liaison des trois critiques empiriques au modèle de Ramsey : c'est ce taux d'intérêt très élevé qui encourage l'épargne, donne un profil décroissant au taux d'épargne contraire aux faits et assure la convergence très rapide également irréaliste.

Si α =0,75 le rapport des productivité marginale du capital diminue considérablement :
$$\frac{Pmk_P}{Pmk_R} = \frac{1}{10}^{-0,25} = 1,8.$$
Ce rapport implique des valeurs plus réalistes de la productivité marginale du capital et du taux d'intérêt dans les pays pauvres. Avec α = 0,75, la fonction de production est moins courbée, et les différences de pente, moins prononcées. (voir exercice D6 en annexe D).

Conclusion

Pour α = 0,3, la dynamique transitoire du modèle de Ramsey ne fournit pas une bonne description de différents aspects du développement économique. Pour une société qui démarre en dessous de son état régulier, il prévoit 1) une vitesse de convergence excessive, c'est-à-dire un taux de croissance transitoire démesurément élevé, 2) une diminution du taux d'épargne 3) un taux d'intérêt et de croissance démesurément élevés.

Tous ces défauts disparaissent en adoptant une conception élargie du capital. Pour α = 0,75, le modèle Solow-Ramsey prévoit alors : 1) un coefficient de convergence de 2%, 2) un taux d'épargne qui augmente légèrement durant la transition. 3) une valeur réaliste pour le taux d'intérêt et le taux de croissance, durant la transition.

Ce sont ces arguments qui plaident pour élargir la notion de capital, pour dire que les rendements du facteur accumulable ne sont pas aussi décroissants que le supposent ces modèles de croissance exogène. Nous allons donc envisager les conséquences de l'hypothèse d'une valeur plus élevée pour α.

3.3 L'ÉPARGNE OPTIMALE DANS LE MODÈLE AK

Le modèle AK est le modèle le plus simple de croissance endogène (plus exactement auto-entretenue), il suppose que la productivité du capital ne diminue pas, ce qui assure une croissance auto-entretenue. Rebelo (1991) montre à partir de ce modèle, que les différences de croissance proviennent des différences de politique fiscale et d'épargne. On présente le modèle puis on examine le rôle de l'épargne et enfin la « justification » de la politique économique.

3.3.1 Bases du modèle AK

Partons de la fonction de production Cobb-Douglas (2.8) : $Y(t) = K(t)^{\alpha}\left[A(t).L(t)\right]^{(1-\alpha)}$

Supposons que le progrès technique qui améliore le travail ne soit plus spécifié comme exogène par l'équation (2.9), mais vienne de l'apprentissage par la pratique, du « learning by doing » de Arrow (1962), ou de la « loi de Kaldor-Verdorn » (1957). L'hypothèse est que, plus les agents produisent, plus il savent produire. Le progrès technique est un sous-produit de l'activité. On pourrait alors spécifier A(t) comme une fonction de Y(t), mais on va plutôt supposer que l'apprentissage est un sous-produit de l'accumulation de capital. L'accumulation a une retombée indirecte, lors de l'introduction de nouvelles machines, les travailleurs doivent résoudre de nouveaux problèmes, et donc ils développent leurs capacités productives. La fonction d'apprentissage est donc une fonction croissante du stock de capital :

$$A(t) = B.K(t)^{\phi} \qquad (3.11)$$

où B et ϕ sont des constantes positives.

La fonction de production devient : $Y = K^{\alpha}\left[B.K^{\phi}.L\right]^{(1-\alpha)} = K^{\alpha}K^{\phi(1-\alpha)}B^{(1-\alpha)}L^{(1-\alpha)}$.

On reste donc, avec cette modélisation, dans un modèle à un seul facteur accumulable, le capital, mais dont l'accumulation s'accompagne d'une externalité positive.

Cherchons les conditions sur les paramètres pour avoir une croissance à taux constant. Supposons que L croît au taux n, que le taux d'épargne est exogène et pour simplifier que l'usure du capital est nulle (δ =0) alors :

$$DK = s.K^{\alpha}K^{\phi(1-\alpha)}B^{(1-\alpha)}L^{(1-\alpha)} \quad \text{et} \quad \frac{DK}{K} = s.K^{\alpha+\phi(1-\alpha)-1}.B^{(1-\alpha)}L^{(1-\alpha)}$$

Dans ce taux de croissance, s et B sont des constantes, seuls K(t) et L(t) sont fonction du temps. Les conditions pour avoir une croissance à taux constant dépendent donc de ϕ et de n :

Si $\phi > 1$ alors $\alpha + \phi(1-\alpha) - 1 > 0$ et $\frac{d\gamma_K}{dK} > 0$ la croissance est explosive quel que soit n.

Si $\phi = 1$ alors $\alpha + \phi(1-\alpha) - 1 = 0$ et $\frac{d\gamma_K}{dK} = 0$ la croissance auto-entretenue se fait à taux constant si n = 0 mais elle est explosive si n > 0.

Si $\phi < 1$ alors $\alpha + \phi(1-\alpha) - 1 < 0$ et $\frac{d\gamma_K}{dK} < 0$ la croissance transitoire s'étiole. A l'état régulier elle est en définitive constante et fonction de n. Elle est nulle si n=0 et positive si n>0. En effet en utilisant $\frac{DY}{Y} = \alpha + \phi(1-\alpha)\frac{DK}{K} + (1-\alpha)\frac{DL}{L}$, à l'état régulier : $\frac{DY}{Y} = \frac{DK}{K} = \gamma = \frac{n}{1-\phi}$.

Il y a donc deux possibilités de croissance à taux constant : (ϕ =1 et n = 0), (ϕ <1 et n ≥ 0).

1) Pour Solow ϕ = 0 et n > 0, il n'y a pas d'externalités, alors γ = n, la croissance est entièrement exogène, elle n'est pas auto-entretenue.

2) Pour Arrow (1962), Schechinski (1967), Jones (1995), ϕ < 1 et n > 0 alors $\gamma = n/1-\phi$. La croissance reçoit un « coup de pouce » de l'externalité, mais l'externalité n'est pas assez forte pour compenser l'effet des rendements décroissants. Si n = 0, il n'y a pas de croissance, elle

n'est pas auto-entretenue. Si n > 0, la croissance est semi-endogène (voir 12.1.1, auto-entretenue et endogène durant la dynamique transitoire, mais exogène à l'état régulier).
3) Pour Romer (1986), Rebelo (1991), ϕ = 1 et n = 0, alors $\gamma = sB^{(1-\alpha)}L^{(1-\alpha)} = sA$, il y a croissance auto-entretenue. C'est le cas retenu par le modèle AK. Si ϕ = 1 et n = 0, la fonction de production (2.8) $Y(t) = K(t)^{\alpha}\left[A(t)L(t)\right]^{(1-\alpha)}$ avec $A(t) = B.K(t)$ et $L(t) = L$, devient alors :

$$Y(t) = K(t)^{\alpha}\left[B.K(t).L\right]^{(1-\alpha)} = K(t).B^{(1-\alpha)}L^{(1-\alpha)} = A.K(t)$$

où $A = B^{(1-\alpha)}L^{(1-\alpha)}$ est une constante, à ne pas confondre avec $A(t)$ de l'équation 2.8.
Les modèles de Romer (étudié au chapitre 8) et le modèle AK (que l'on va étudier) imposent donc des conditions « fil du rasoir » sur la valeur des paramètres, conditions irréalistes que nous critiquerons au § 12.1.2.

3.3.2 Le modèle AK et la politique d'épargne

La fonction de production est celle du troisième cas :

$$Y(t) = A\,K(t) \tag{3.12}$$

Cette fonction de production présente un double avantage : 1) Les rendements d'échelle sont constants de telle sorte que l'équilibre peut être concurrentiel, 2) Le rendement du facteur accumulable est constant de telle sorte qu'il n'y a pas diminution de sa productivité marginale et donc non extinction de la croissance. Puisque les rendements d'échelle sont constants, on peut utiliser la forme intensive : $y(t) = Ak(t)$
(3.13)

On suppose d'abord que l'épargne est exogène. L'usure du capital se fait au taux δ. L'égalité épargne investissement est $DK + \delta K = sY$, on en tire l'équation dynamique fondamentale par tête $Dk = sy - \delta k$. On en tire le taux de croissance du capital $Dk/k = sA - \delta$. Puisque $y_t = Ak_t$ et $c_t = (1-s)\, y_t$, on déduit :

$$\gamma = \frac{Dk}{k} = \frac{Dy}{y} = \frac{Dc}{c} = \frac{DK}{K} = \frac{DY}{Y} = \frac{DC}{C} = sA - \delta \tag{3.14}$$

Le taux de croissance est une fonction croissante de la productivité marginale du capital (A), et du taux d'épargne (s). Toute politique qui améliore la productivité marginale du capital ou qui augmente le taux d'épargne, augmente la croissance d'état régulier.[7]

Si l'épargne est endogène, déterminée optimalement comme dans le modèle de Ramsey, la dynamique de la consommation est : $Dc/c = 1/\sigma(r-\rho)$ où $r = Pmk - \delta = A - \delta$.

On déduit les taux de croissance : $$\gamma = \frac{Dy}{y} = \frac{Dk}{k} = \frac{Dc}{c} = \frac{1}{\sigma}(A - \delta - \rho) \tag{3.15}$$

Toute politique qui modifie A, σ, ρ, modifie le taux de croissance des variables.

On sait qu'il existe dans ce cas une condition d'existence. La croissance de la consommation est positive si $\gamma = 1/\sigma(A - \delta - \rho) > 0$, c'est-à-dire si A $> \rho + \delta$. Pour qu'il

---

[7] Remarque : il n'y a pas de dynamique transitoire dans ce modèle : à chaque instant l'économie croît à taux constant. Pour un niveau donné K_0 du stock de capital initial, les valeurs des autres variables (C et Y) du modèle sont déterminées. Comme $\forall t : Y_t = AK_t$, en t = 0 : $Y_0 = AK_0$,

et comme $\forall t : C_t = Y_t - DK_t - \delta K_t = AK_t - \gamma K_t - \delta K_t = (A - \gamma - \delta) K_t$, en t = 0 : $C_0 = (A - \gamma - \delta) K_0$.

existe une solution au problème de maximisation de l'utilité intertemporelle, il faut que l'utilité soit bornée. Comme l'utilité est $U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} dt$ avec $c_{(t)} = c_0 . e^{1/\sigma.(A-\delta-\rho).t}$, elle est bornée si $\lim_{t\to\infty} U = cste$, c'est-à-dire si $\rho > \frac{(1-\sigma)(A-\delta-\rho)}{\sigma}$.

Dans ce modèle, on peut donc obtenir un effet nouveau de la politique économique. Si celle-ci modifie A, σ, ρ, c'est-à-dire la productivité marginale du capital ou les comportements d'épargne, elle affecte non seulement les niveaux mais aussi les taux de croissance de y, k, c. Cet effet est tout à fait nouveau, la politique économique peut modifier le taux de croissance. Mais il nous faut maintenant mettre en évidence une « justification » pour mener une politique économique. Nous allons donc revenir sur le « fondement » du modèle AK en terme de « learning by doing » qui explique le terme « A » en invoquant une externalité.

3.3.3 Non-optimalité de la concurrence et politique économique

L'intérêt de l'examen des fondements microéconomiques du modèle AK est de faire apparaître un écart entre la solution concurrentielle et la solution optimale. Rebelo (1991) montre que les différences de croissance proviennent des différences de politique fiscale et d'épargne. On calcule la solution centralisée, puis décentralisée, on envisage ensuite les politiques qui peuvent corriger l'écart entre les deux solutions.

Équilibre centralisé : la fonction de production macroéconomique est Y = A K.
La productivité marginale sociale du capital est égale à A. Le dictateur bienveillant calcule la totalité du produit marginal du capital : sa contribution marginale directe à l'augmentation de la production en tant qu'input « capital physique » (K^{α}) et sa contribution indirecte ($K^{1-\alpha}$) qui résulte de l'effet d'apprentissage. Le planificateur détermine donc le taux de croissance optimal : $\gamma_{opt} = \frac{1}{\sigma}\left(A - \delta - \rho\right)$

(3.16)

Le taux d'épargne optimal est $s_{opt} = \frac{DK/K + \delta}{Y/K} = \frac{1/\sigma.(A-\delta-\rho)+\delta}{A}$, il est constant.

Équilibre décentralisé : la fonction de production d'une entreprise est $Y_i = K_i^{\alpha} L_i^{(1-\alpha)} K^{(1-\alpha)} B^{(1-\alpha)}$ où K_i et L_i sont les variables de contrôle du producteur. K_i est le capital physique utilisé par le producteur. Le producteur décentralisé considère K et B comme des données. $K^{1-\alpha}$ représente l'externalité de l'apprentissage que le producteur ne contrôle pas. La productivité marginale du capital calculée par le producteur est donc :

$$\frac{\partial Y_i}{\partial K_i} = \alpha K_i^{\alpha-1} L_i^{1-\alpha} B^{1-\alpha} K^{(1-\alpha)}$$

Par hypothèse, toutes les entreprises sont identiques, il en résulte qu'à l'équilibre : $\frac{K_i}{L_i} = \frac{K}{L}$.

Donc $\frac{\partial Y_i}{\partial K_i} = \alpha \left(\frac{K_i}{L_i}\right)^{\alpha-1} B^{(1-\alpha)} K^{(1-\alpha)} = \alpha \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} B^{(1-\alpha)} K^{(1-\alpha)} = \alpha L^{(1-\alpha)} B^{(1-\alpha)} = \alpha A$

où A est le niveau d'efficacité de l'économie. Puisque n = 0, A est constant et la productivité marginale du capital privée aussi. Elle dépend de L, car l'apprentissage par la pratique est d'autant plus important que la taille de l'économie est grande.

L'équilibre décentralisé n'est pas optimal : $PmK_{sociale}$ = A alors que $PmK_{privée} = \alpha$ A. Si par exemple α = 1/3, la productivité marginale sociale du capital est trois fois plus forte que la productivité marginale privée du capital. Les agents décentralisés ne tiennent pas compte des effets externes de l'accumulation du capital, ils n'internalisent pas le fait que quand ils investissent, non seulement leur revenu augmente, mais aussi le stock global de capital et donc l'apprentissage par la pratique. Le taux d'intérêt concurrentiel est $r_c = \alpha A - \delta$ et le taux de croissance de la consommation est selon la règle de Ramsey-Keynes : $\frac{Dc}{c} = \frac{1}{\sigma}(r_c - \rho)$.

L'économie décentralisée a donc un taux de croissance concurrentiel égal à :

$$\gamma_{concu} = \frac{1}{\sigma}(\alpha A - \delta - \rho) \qquad (3.17)$$

Le taux d'épargne concurrentiel est $s_{concu} = \frac{1/\sigma.(\alpha A - \delta - \rho) + \delta}{A}$.

De par la présence d'externalités, le taux de croissance obtenu en concurrence est inférieur au taux de croissance optimal. L'épargne concurrentielle est pour les mêmes raisons inférieure à l'épargne optimale. Le dictateur bienveillant prend lui en compte la totalité de la productivité marginale du capital, il internalise l'externalité.

La politique peut donc consister en une politique centralisée d'épargne. Ce modèle nous montre qu'une économie (stalinienne) où l'investissement est réalisé de façon centralisée investira plus et croîtra plus vite qu'une économie concurrentielle. Romer souligne que même si des entreprises privée avaient intérêt à coopérer pour réaliser la solution centralisée, les coalitions échouent en présence d'externalités, chacune ayant intérêt à faire cavalier seul.

La politique économique peut donc plutôt consister en une politique d'incitation fiscale. Une autre propriété de ce modèle n'existe pas chez Solow où la fiscalité affecte les niveaux mais pas le taux de croissance exogène. Ici une taxe (τ) sur le capital diminue la productivité marginale du capital après impôt, donc la rentabilité de l'investissement, et diminue le taux de croissance $\gamma_{concu} = \frac{1}{\sigma}(\alpha A(1-\tau) - \delta - \rho)$. Une possibilité, pour une politique économique qui vise à réaliser l'optimum décentralisé, est donc de subventionner le capital au taux $s = (1-\alpha)/\alpha = 2$ lorsque α =1/3. Alors cette politique (qu'il faut bien sûr considérer comme un cas d'école) permet en principe de retrouver l'optimum :

$$\gamma_{concu} = \frac{1}{\sigma}(\alpha A(1+s) - \delta - \rho) = \gamma_{opt}.$$

Conclusion

En présence d'externalités, la croissance de concurrence parfaite n'est pas optimale au sens de Pareto. Un dictateur qui internalise l'externalité peut réaliser un taux de croissance d'état régulier supérieur pour l'économie en augmentant le taux d'épargne. Comme il n'y a pas de dynamique transitoire dans ce modèle, cette politique assure donc une amélioration au sens de Pareto. Le modèle AK « justifie[8] » donc la politique économique. Mais ce modèle a de nombreux défauts. Le principal est de ne pas fournir de dynamique transitoire. Si la convergence n'existait pas, le modèle AK serait intéressant, mais si la convergence existe, le modèle AK est insatisfaisant. Un autre défaut du modèle est que la productivité marginale du capital et le taux de croissance dépendent de L, la taille de la population. Cet effet de taille n'existe pas dans les faits. Une critique plus fondamentale du modèle AK est que ϕ doit être exactement égal à 1 et si l'on retient la « base » du modèle fondé sur le learning by doing il faut également $n = 0$. Cette condition de « fil du rasoir » invalide l'intérêt scientifique du modèle. On discute de ce point dans la conclusion générale.

Le modèle de Ramsey présente quelques défauts empiriques identiques à ceux du modèle de Solow. Ils se résument par la conclusion que la valeur de α est trop faible lorsqu'on la contraint à être égale à la part du revenu qui revient au capital physique (30%). Cette idée plaide donc pour élargir la notion de capital. Nous le ferons au chapitre suivant en introduisant le capital public, au chapitre 7 en introduisant le capital humain et au chapitre 8 le capital technologique. Le modèle néoclassique de Solow-Ramsey reste toutefois un cadre théorique pertinent, nous allons envisager avec lui la politique budgétaire.

[8] On peut reconnaître l'existence d'une amélioration au sens d'un critère quelconque et refuser de mener une politique économique pour la réaliser sans commettre de faute de logique. Le modèle AK ne justifie donc pas *logiquement* la politique économique. Pour qu'il en soit ainsi, il faudrait ajouter une prémisse supplémentaire, le principe selon lequel « chaque fois qu'il existe des améliorations au sens d'un critère quelconque, il faut les réaliser par une politique économique appropriée ».