TP n°1

Exercice 1 Combien de nombres différents de 6 chiffres existe-t-il

a. Si il n'y a aucune restriction?

b. Si les nombres doivent être divisibles par 5?

c. Si les répétitions de chiffres sont exclues?

Exercice 2 Combien de nombres différents de quatre chiffres ou moins peut-on écrire avec les chiffres 3, 3, 5, 0?

Exercice 3 De combien de manières peut-on arranger 5 personnes sur

a. une ligne?

b. Autour d'une table ronde? (seulement la position relative des uns vis-à-vis des autres importe).

Exercice 4

a. A partir d'un groupe de 5 femmes et 7 hommes, combien de comités différents composés de 2 femmes et de 3 hommes peut-on former?

b. Qu'en est-il si 2 des hommes s'entendent mal et refusent de siéger simultanément au comité?

Exercice 5

a. Neuf fiches portent les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Deux d'entre elles sont tirées au hasard pour être rangées sur la table dans l'ordre de leur apparition, puis on lit le nombre obtenu, par exemple 07 (sept); 14 (quatorze), etc. Trouver la probabilité pour que le nombre soit pair.

b. Sur cinq fiches sont inscrits les chiffres 1, 2, 3, 4, 5. Deux d'entre elles sont tirées l'une après l'autre. Trouver la probabilité pour que le nombre de la deuxième fiche tirées soit plus grand que celui de la première.

Exercice 6 Aurélie et Nicolas jouent aux dés. Ils lancent tour à tour deux dés et observent les chiffres sortis. Quand la somme est sept ou le produit 6, Aurélie marque un point; quand la somme est six ou le produit est quatre, Nicolas en marque un. Pour qui parieriez-vous?

Exercice 7 On tire au hasard deux cartes d'un jeu de cartes de poker (52 cartes). Quelle est la probabilité qu'elles forment un *black jack*, ou autrement dit, que l'une soit un as et l'autre un dix, un valet, une dame ou un roi?

Exercice 8 On classe cinq hommes et cinq femmes selon leur résultats lors d'un examen. On fait l'hypothèse que tous les scores sont différents et que les 10! classements possibles ont tous la même probabilité de se réaliser. On désigne le rang de la meilleure femme par X (par exemple X vaudra 1 si le meilleur résultat a été obtenu par une femme). Donner la fonction $\mathbb{P}(\{X = i\})$ pour $i = 1, \ldots, 10$.

Corrigé

Exercice 1

a. Nous devons exclure le 0 du premier chiffre (sinon cela ferait un nombre de 5 chiffres). Nous avons donc 9×10^5 nombres différents de 6 chiffres.

b. Nous fixons le chiffre 5 ou le chiffre 0 à la fin du nombre de 6 chiffres. Nous trouvons $2 \times 9 \times 10^4$ nombres différents qui sont divisibles par 5.

c. Nous avons $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ nombres différents sans répétitions de chiffres.

Exercice 2. Nous avons $4!/2! = 12$ nombres différents (cet exercice est similaire à celui sur les anagrammes traité en TD 1).

Exercice 3.

a. Nous avons 5! manières possibles.

b. Numérotons les personnes $1, 2, \ldots, 5$. Si la table est ronde alors, par exemple, la configuration 1, 2, 3, 4, 5 est équivalente à la configuration 5, 1, 2, 3, 4. Puisque pour chaque configuration nous avons 5 configurations équivalentes, nous trouvons $5!/5 = 4! = 24$ manières possibles d'arranger les 5 personnes sur une table ronde.

Exercice 4.

a. Nous avons $\binom{5}{2} \times \binom{7}{3} = 350$ comités différents composés de 2 femmes et 3 hommes.

b. Si les deux hommes en question sont exclus du comité, on aura $\binom{5}{2} \times \binom{5}{3} = 100$ comités différents. Si par contre, l'un de ces hommes est inclus dans le comité et l'autre ne l'est pas, nous aurions $\binom{5}{2} \times \binom{5}{2} = 100$ comités différents. En conclusion, le nombre total de comités possibles dans ce cadre est égal à $100 + (2 \times 100) = 300$.

Exercice 5.

a. Nous avons $9 \times 8 = 72$ résultats possibles dont 40 sont des nombres pairs. Donc la probabilité cherchée est $40/72 = 5/9$. Une autre manière de trouver ce résultat est de dire qu'on a 9 possibilités pour le dernier chiffre dont 5 sont des chiffres pairs.

b. Nous avons $5 \times 4 = 20$ résultats possibles. Si le chiffre 1 est inscrit sur la première fiche, alors nous avons 4 possibilités favorables pour la deuxième fiche. En raisonant ainsi, nous trouvons $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ résultats favorables. Ce qui donne $10/20 = 1/2$ comme probabilité cherchée.

Exercice 6. Nous avons $6 \times 6 = 36$ résultats possibles. On a $2 + 2 + 2 = 6$ résultats où la somme est égale à 7, 2 résultats où le produit est égal à 6 et la somme n'est pas égale à 7, $2 + 2 + 1 = 5$ résultats où la somme est égale à 7, $2 + 1 = 3$ résultats où le produit est égal à 4 est la somme n'est pas égale à 6. Donc, la probabilité de marquer un point est la même pour Aurèlie et Nicolas et elle vaut $8/36 = 2/9$.

Exercice 7. Nous avons $\binom{52}{2}$ résultats possibles. On a 4 possibilités pour le as et 16 possibilités pour les autres cartes. Puisque l'ordre n'est pas important, nous avons un total de $4 \times 16 = 64$ résultats favorables. Donc, la probabilité cherchée vaut $64/\binom{52}{2} = 32/663$.

Exercice 8. L'événement $\{X = 1\}$ est égal à la réunion de $5 \times 9 \times 8 \times \ldots \times 2$ événements élémentaires. Donc $P(\{X = 1\}) = 1/2$ (ce résultat peut être obtenu aussi par un argument simple de symétrie). L'événement $\{X = 2\}$ est égal à la réunion de $5 \times 5 \times 8 \times \ldots \times 2$ événements élémentaires. Donc, $P(\{X = 2\}) = 5/18$. Par les mêmes arguments, nous trouvons

$$P(\{X = 3\}) = 5/36, \ P(\{X = 4\}) = 5/84, \ P(\{X = 5\}) = 5/252, \ P(\{X = 6\}) = 1/252,$$
$$P(\{X = 7\}) = P(\{X = 8\}) = P(\{X = 9\}) = P(\{X = 10\}) = 0.$$