Chapitre I

Combinatoire

La combinatoire (ou analyse combinatoire) est l'étude et, plus en particulier, le dénombrements des configurations d'une collection finie d'objets. Par exemple, voici des questions typiques qui peuvent être resolues à l'aide de la combinatoire :

– Quel est le nombre de parties d'un ensemble de n éléments ayant exactement k éléments ?
– Quel est le nombre des combinaisons de 6 numéros de 1 à 49 au Loto français, avec au moins 3 numéros gagnants ?

On utilisera des résultats de combinatoire de base pour la théorie des probabilités sur les ensembles finis.

1.1. Rappels de théorie des ensembles et des fonctions

Nous considerons une approche naïve à la théorie des ensembles : on dira que un ensemble est une collection d'objets que l'on appèlle *éléments* de l'ensemble. Les ensembles seront notés avec les lettres majuscules $A,B,C\ldots$, exception faite des ensembles de nombres naturels $\mathbb{N}$, entiers $\mathbb{Z}$ ou réels $\mathbb{R}$. Si $a,b,c\ldots$ appartiennent à l'ensemble A, on notera $A = \{a,b,c\ldots\}$, ou simplement $a,b,c \in A$. On n'admet pas de répétition dans les éléments d'un ensemble, par exemple les ensembles $\{1,1,2\}$ et $\{1,2\}$ coïncident.

On utilisera les notations classiques pour la *réunion* $A \cup B$, l'*intersection* $A \cap B$, la *différence* $A \setminus B$ et la *différence symétrique* $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (voir Figure 1.1) de deux ensembles A,B. Par exemple, si $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ et si B est l'ensemble des nombres impairs ($B \subset \mathbb{N}$), on aura $A \cap B = \{1,3,5\}$ et $A \setminus B = \{2,4,6\}$. Réunion et intersection s'étendent à des collections infinies d'ensembles.

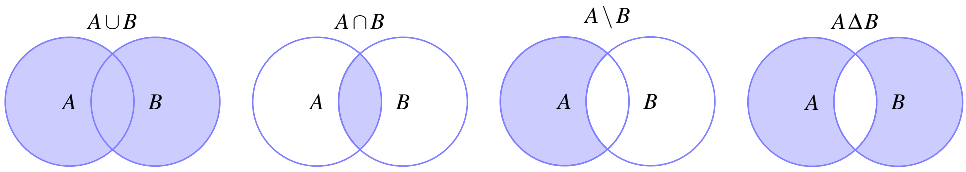

FIGURE 1.1. Réunion, intersection, différence et différence symétrique d'ensembles

Une *partie* ou *sous-ensemble* d'un ensemble A est un ensemble B dont les éléments appartiennent à A (noté $B \subset A$). Deux ensembles A,B sont égaux si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$ (A est une partie de B et B est une partie de A). Un ensemble A contenant un nombre fini d'éléments est dit *fini*, et le nombre de ses éléments (son *cardinal*) est notée $|A|$. Si A est un ensemble, on appelle *ensemble des parties* de A l'ensemble $\mathscr{P}(A)$ dont les éléments sont les parties de A. Par exemple

$$\mathscr{P}(\{1,2,3\}) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}.$$

Si A est fini, $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$ (exercice).

Une fonction $f \colon A \to B$ est dite *injective* si $f(a_1) = f(a_2)$ implique $a_1 = a_2$, pour tout $a_1, a_2 \in A$ et *surjective* si pour tout $b \in B$ il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Une fonction injective et surjective est dite *bijective*. Si A est B sont des ensembles finis, et $f \colon A \to B$ est bijective, alors $|A| = |B|$. L'ensemble des fonctions de A à B est noté B^A ; si A, B sont des ensembles finis, alors $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Un ensemble A est dit *dénombrable* s'il existe $B \subset \mathbb{N}$ et une fonction bijective $f : A \to B$. Par exemple, tout ensemble finis sont dénombrables. Soit A un ensemble, alors une collection dénombrable $A_1, \dots, A_n \dots \in \mathscr{P}(A)$ de parties de A est appelée une *partition* de A si $A_i \cap A_j = \emptyset$, pour tout $i \neq j$, et $A = \cup_i A_i := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \cdots$. Par exemple $\{1,2,3\}, \{4\}, \{5,6,7\}$ est une partition (finie) de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Le résultat suivant est très important en combinatoire et sera utilisé dans la probabilité sur les ensembles finis. Il permet d'exprimer le cardinal de la réunion d'une collection finie d'ensembles, en fonction du cardinal de ces ensembles et de leurs intersections.

Théorème 1 (Principe d'inclusion-exclusion)**.** *Soient $A_1, \dots, A_n$ ensembles finis. Alors*

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \right)$$

Le principe d'inclusion-exclusion pour n petit :

$n = 2$: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

$n = 3$: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

Explication pour le cas $n = 3$ (et en general pour tout n). On veut calculer $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$, et pour faire ça on commence à additionner les cardinaux $|A_1| + |A_2| + |A_3|$. En faisant ça, nous avons compté 2 fois chacune des intersections 2 à 2, et trois fois l'intersection 3 à 3. En soustrayant les intersections 2 à 2, on les a donc comptés une fois chacune, mais on a soustrayé 3 fois l'intersection 3 à 3, qu'il faut donc re-additionner pour obtenir le bon résultat.

1.2. Dispositions

Soit U un ensemble de cardinal $|U| = n$, on peut penser par exemple à l'ensemble $U = \{1, 2, \dots, n\}$ des nombres naturels inférieurs à n. Supposons de devoir choisir k éléments parmi les n éléments de U.

On parle de *disposition* si on est interessés à l'*ordre* des éléments choisis. Nous faisons une distinction en 2 cas différents : Dispositions sans et avec *répétition*.

1.2.1. Dispositions sans répétition

Nous choisissons k éléménts *sans répétition* (c'est-à-dire qu'on ne peut pas choisir le même élément plusieurs fois) et en considerant l'arrangement *ordonné* (par exemple, les arrangements 1 2 3 et 2 1 3 sont différents).

Le nombre de dispositions sans répétition de k éléments parmi n ($k \le n$) est

$$D_{n,k} := \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1).$$

Dans la formule, la valeur $n!$ est appelée *factorielle* de n ; ça corresponds au produit des prémiers n nombres naturels, et peut être définie récursivement comme suit :

$$0! = 1 \quad \text{et} \quad n! = n \cdot (n-1)!.$$

Explication. Nous avons n choix pour le prémier élément, mais seulement $n-1$ pour le deuxième (on ne peut pas choisir le premier élément), $n-2$ pour le troisième, etc. pour k fois.

Exemple 2. Nous souhaitons s'habiller différemment pendant une semaine, en évitant de choisir la même couleur de chemise dans deux jours différents. Nous avons 10 chemises de couleurs différentes disponibles. Il y a exactement $D_{10,7} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ dispositions possibles. ⋆

Dans le language des ensembles, une disposition sans répétition de k éléments d'un ensemble U, $|U| = n$, est une fonction injective d'un ensemble A de cardinal k vers U, ce qui corresponds à *choisir*, ou *extraire* k éléments de U. La propriété d'injectivité "pour tout $a_1 \neq a_2$ dans A, $f(a_1) \neq f(a_2)$" garantie la non-répétition.

1.2.2. Dispositions avec répétition

Cette fois-ci, nous pouvons choisir k éléménts *avec répétition* mais en considerant encore la disposition *ordonnée*. Remarquons que dans ce cas k peut être superieur à n. Le nombre de ces arrangements est

$$D'_{n,k} := n^k.$$

Explication. Nous avons n choix pour le premier éléments, même chose pour le deuxième et pour tous les autres éléments de la suite. La suite a longueur k, donc $A_{n,k} = n \cdot n \cdot n \cdots n$ (k fois) $= n^k$.

Exemple 3 (Écriture en base [1] n avec k chiffres). Combien de nombre de au plus k chiffres peut-on écrire en base n ? Supposons pour simplicité que $n = 2$ et $k = 3$: nous nous intéressons aux nombres qui peuvent s'écrire en base 2 (c-à-d. avec symboles 0 et 1) avec 3 chiffres ou moins. Il y a exactement $8 = 2^3 = n^k$ nombres ayant cette propriété, et précisement :

$$0 = 000 \qquad 1 = 001 \qquad 2 = 010 \qquad 3 = 011$$

$$4 = 100 \qquad 5 = 101 \qquad 6 = 110 \qquad 7 = 111$$

⋆

Une disposition avec répétition corresponds à une fonction (n'importe quelle) d'un ensemble A avec k éléments à valeurs dans U. L'ensemble A contient les k places dans l'arrangement ordonné. Du coup on retrouve $|\{f : A \to U\}| = |U^A| = |U|^{|A|} = n^k$.

1.3. Combinaisons

Dans plusieurs cas pratiques, nous sommes intéressés à des suites finis d'objets *sans spécifier un ordre*, et on parle dans ce cas de *combinaisons*. Par exemple les arrangements 15423 et 12345 doivent être considerés la même combinaison des premiers cinq nombres naturels.

1. Écrire en base n un certain nombre entier N signifie decomposer N en somme de puissances entières successives de n : $N = a_t n^t + a_{t-1} n^{t-1} + \cdots + a_1 n + a_0 = a_t a_{t-1} \ldots a_0$. Par exemple en base 2, on a $6 = 4 + 2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 110$. L'écriture est unique.

1.3.1. Combinaisons sans répétition

Si l'arrangement est non-ordonné et sans répétition, on parle de combinaison sans répétition. Le nombre de combinaisons sans répetition de k éléments parmi n éléments d'un ensemble U ($k \leq n$) est

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemple 4 (Tirage sans remise). On considère une urne avec 10 boules, énumerées de 1 à 10. On extrait $k = 4$ fois une boule *sans remise*. Si nous ne sommes pas interessés à l'ordre des tirages, l'experience est equivalente à celle d'extraire un groupe de 4 boules au même temps. Le nombre des possibles résultats du tirage est le nombre de combinaisons de 4 éléménts parmi 10, c'est-à-dire $C_{10,4} = 210$. ⋆

$n=0$							1						
$n=1$						1		1					
$n=2$					1		2		1				
$n=3$				1		3		3		1			
$n=4$			1		4		**6**		**4**		1		
$n=5$		1		5		10		**10**		5		1	
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1

FIGURE 1.2. Triangle de Pascal

Le nombre $\binom{n}{k}$ est appelé *coefficient binomiale*. Voici les propriétés principales des coefficients binomiaux :
— $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ pour tout n
— $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie)
— $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ (Triangle de Pascal)

Une méthode *récursive* pour calculer avec les coefficients binomiaux est suggéré par la troisième propriété decrite dessus, donné par ce qu'on appelle le *Triangle de Pascal*[2] (Figure 1.2).

Le comportement symétrique de $\binom{n}{k}$ est montré en Figure 1.3 pour $n = 20$.

1.3.2. Combinaisons avec répétition

On dispose de n éléments appartenant à un ensemble U, et on souhaite un arrangement de taille k *non-ordonné* et *avec répétition*, ce qu'on appelle une combinaison avec répétition. Le nombre de ces combinaisons est

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k}.$$

Explication. Toute combinaison de k éléments avec répétition à choisir parmi n éléments $a_1, \ldots, a_n$ donnés peut s'écrire (sans perte de généralité) comme suit :

$$\underbrace{a_1 \ldots a_1}_{k_1 \text{ fois}}, \underbrace{a_2 \ldots a_2}_{k_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{a_n \ldots a_n}_{k_n \text{ fois}}$$

2. Le niveau est donné par n, alors que la profondité dans chaque niveau est donnée par k : $\binom{n+1}{k}$ est donné par la somme des coefficients binomiaux à niveau n et profondité k et $k-1$ (en Figure 1.2, le **10** est la somme de **6** et **4**).

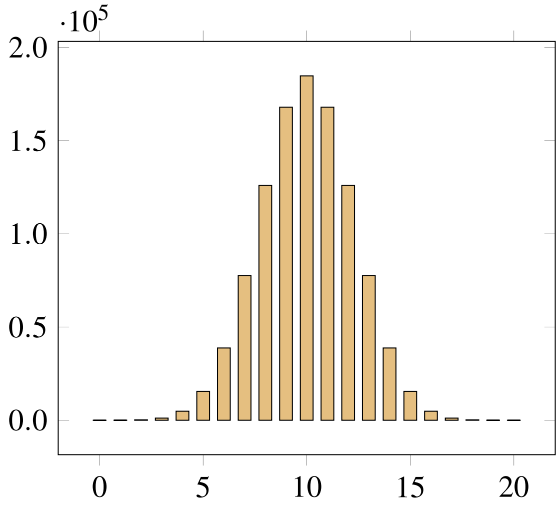

FIGURE 1.3. Valeurs du coefficient binomiale $\binom{20}{k}$, pour $k = 0, \ldots, 20$.

avec $k_1 + \cdots + k_n = k$. Cela correspond à placer k objets dans n boîtes, et, après, à appeler a_i tous les objets placé dans la $i-$ème boîte. De manière équivalente, à placer $n-1$ “cloisons” séparants k objets :

$$\underbrace{a_1 \ldots a_1}_{k_1 \text{ fois}} \underbrace{\theta_1}_{\text{cloison}} \underbrace{a_2 \ldots a_2}_{k_2 \text{ fois}} \underbrace{\theta_2}_{\text{cloison}} \ldots \underbrace{\theta_{n-1}}_{\text{cloison}} \underbrace{a_n \ldots a_n}_{k_n \text{ fois}}.$$

Du coup le nombre de combinaisons avec répétition des éléments $a_1, \ldots, a_n$ pris k à k est le nombre de combinaisons de $n-1$ objets parmi $k+n-1$, c'est-à-dire $C_{n+k-1,n-1}$ $(= C_{n+k-1,k})$.

Exemple 5 (Nombre de monômes de degré k). Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de n variables, et soit $k \in \mathbb{N}$. Le nombre de monômes de degré k en x est donné par le nombre de combinaisons avec répétition pris k à k, des éléments de $U = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (combinaisons car le produit de variables étant commutatif, on ne s'interesse pas à l'ordre; avec répétition car une variable peut apparaître avec puissance ≥ 2). ⋆

La propriété $C'_{n,k} = C'_{n,k-1} + C'_{n-1,k}$ est une consequence directe du Triangle de Pascal appliqué à $C_{n+k-1,k}$: $C_{n+k-1,k} = C_{n+k-2,k-1} + C_{n+k-2,k}$.

1.4. Permutations

Nous donnons un nom special aux arrangements de n éléments parmi n ($k = n$ en Section 1.2) : permutation. La possibilité de répétition joue un rôle aussi pour les permutations.

1.4.1. Permutations sans répétition

Il s'agit d'une disposition sans répétition de n éléments parmi n. Donc le nombre total de ces arrangements est :

$$P_n := D_{n,n} = n!$$

Exemple 6 (Code confidentiel). Le code confidentiel d'une certaine carte de crédit est fait par les nombres $1, 2, 6, 9$. Combien de tentatif faut-il faire pour être sûrs de saisir le code correct (code de 4 chiffres) ? Exactement $P_4 = 4! = 24$ tentatifs. ⋆

1.4.2. Permutations avec répétition

Nous considerons un ensemble U de n éléments, et des nombres naturels $k_1, \ldots, k_n$. Nous souhaitons obtenir un arrangement de $k_1 + \cdots + k_n$ éléments ou n sont distincts (les éléments de U) et où les elements de U se répètent respectivement $k_1, \ldots, k_n$ fois.

Exemple 7 (Nombre d'anagrammes). Un anagramme d'un mot donné est une autre mot (pas forcement listé dans le vocabulaire) qui utilise les mêmes lettres. Par exemple, PARISIEN est un anagramme (avec sens) de ASPIRINE : dans ce cas $U = \{A,S,P,I,R,N,E\}$, $n = |U| = 7$, $k_1 + \cdots + k_7 = 8 =$ longueur du mot. La lettre I apparait 2 fois, du coup il faut diviser par $2! = 2$ le nombre total de permutations de Section 1.4.1, donc le nombre d'anagrammes est $= 8!/2! = 20160$. $\star$

En généralisant l'example précedent, on voit que le nombre de permutations de k éléments où n sont distincts (ou permutations avec répétitions $k_1, \ldots, k_n$) est

$$P'_{n,k_1,\ldots,k_n} := C_{k_1+\cdots+k_n,k_1} \cdot C_{k_2+\cdots+k_n,k_2} \cdots C_{k_n,k_n} = \frac{(k_1+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}.$$

Explication. Pour construire une suite de $k_1 + \cdots + k_n$ éléments avec les répétitions donnée, nous devons choisir (combinaisons, car l'ordre n'intervient pas)

— les k_1 emplacements du premier élément de U, parmi $k_1 + \cdots + k_n$ places
— les k_2 emplacements du deuxième élément de U, parmi $k_2 + \cdots + k_n$ places
— ...
— les k_n emplacements du dernier élément de U, parmi k_n places

ce qui donne les produit des coefficients $C_{k_i+\cdots+k_n,k_i}$, pour $i = 1, \ldots, n$. La deuxième egalité suit simplement en utilisant la définition de $C_{k_i+\cdots+k_n,k_i}$:

$$\frac{(k_1+\cdots+k_n)!}{k_1!\cancel{(k_2+\cdots+k_n)!}} \frac{\cancel{(k_2+\cdots+k_n)!}}{k_2!\cancel{(k_3+\cdots+k_n)!}} \cdots \frac{\cancel{(k_{n-1}+k_n)!}}{k_{n-1}!\cancel{(k_n)!}} \frac{\cancel{(k_n)!}}{k_n!} = \frac{(k_1+\cdots+k_n)!}{k_1!\cdots k_n!}$$

Tableau récapitulatif :

Arrangement	Répétition	Nombre	Exemple
Dispositions	sans	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	*Ex. 2* : Façons de s'habiller.
Dispositions	avec	$D'_{n,k} = n^k$	*Ex. 3* : Écriture en base n.
Combinaisons	sans	$C_{n,k} = \binom{n}{k}$	*Ex. 4* : Tirages sans remise.
Combinaisons	avec	$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.	*Ex. 5* : Nombre de monômes.
Permutations	sans	$P_n = n!$	*Ex. 6* : Code confidentiel.
Permutations	avec	$P'_{n,k_1,\ldots,k_n} = \frac{(k_1+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$	*Ex. 7* : Anagrammes.

1.5. Théorème du binôme

Les coefficients binomiaux apparaissent en un résultat de base de combinatoire.

Théorème 8 (Théorème du binôme)**.** *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. Soit P_n la propriété à prouver pour $n \in \mathbb{N}$. La preuve est par *récurrence*[3] sur n. Pour $n = 0$, la propriété est verifiée puisque

$$(a+b)^0 = 1 \quad \text{et} \quad \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

Supposons P_n vraie. On a que

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \overset{p=k+1}{=} \\
&= \left(\textstyle\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p-1}a^p b^{n-p+1} + \binom{n}{n}a^{n+1}b^0\right) + \left(\binom{n}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}\right) = \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{p=1}^{n}\left(\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}\right)a^p b^{n-p+1} \overset{\text{Pascal}}{=} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{p=1}^{n}\binom{n+1}{p}a^p b^{n-p+1} = \\
&= \sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}a^p b^{n-p+1}
\end{aligned}$$

ce qui montre que P_{n+1} est vraie. ■

Exemples de développements du binôme $(a+b)^n$ à comparer avec le Triangle de Pascal de page 7 :

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + \mathbf{5}a^4b + \mathbf{10}a^3b^2 + \mathbf{10}a^2b^3 + \mathbf{5}ab^4 + b^5 \\
(a+b)^6 &= a^6 + \mathbf{6}a^5b + \mathbf{15}a^4b^2 + \mathbf{20}a^3b^3 + \mathbf{15}a^2b^4 + \mathbf{6}ab^5 + b^6
\end{aligned}$$

3. Soit P_n une propriété parametrisée par $n \in \mathbb{N}$. Une preuve de P_n par recurrence sur n est donnée par : (1) une preuve de P_0 et (2) une preuve de l'implication $P_n \to P_{n+1}$.