TD4 : correction de l'exercice 5

L'*algèbre des quaternions* de Hamilton $\mathbb{H}$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $\{e, j, k, l\}$, muni de la multiplication définie sur les couples de vecteurs de base par les relations :

$$e^2 = e \ , \quad j^2 = k^2 = -e \ , \quad jk = -kj = l \ ,$$

puis étendue à $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ par bilinéarité. En particulier, $(-e)^2 = (-1)^2 e^2 = e$.

1. a) On a $l^2 = -kjjk = -kk^2k = -k^2k^2 = -(-e)^2 = -e$, $lj = -kjj = -kk^2 = -k^2k = -(-e)k = ek = k$, de même pour les autres relations demandées.

   b) $h\overline{h} = (xe + yj + zk + tl)(xe - yj - zk - tl) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)e$, en utilisant la bilinéarité de la multiplication et les produits des vecteurs de base ci-dessus. Comme $h \neq 0$ entraîne $x^2+y^2+z^2+t^2 \in \mathbb{C}^*$, il s'ensuit que tout $h \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$ a un inverse, égal à $(x^2+y^2+z^2+t^2)^{-1}\overline{h}$. L'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$ est donc un **corps**, que l'on dit *gauche* pour signifier que la multiplication y est non commutative.

   c) Soit $h \in \mathbb{H}$ de la forme $h = xe + yj + zk + tl$ avec $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned} h\overline{h} = e \ &\Leftrightarrow \ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \ x = 1, \ y = z = t = 0 \text{ ou } \cdots \text{ ou } t = 1, \ x = y = z = 0 \\ &\Leftrightarrow \ h \in \{\pm e, \pm j, \pm k, \pm l\} \end{aligned}$$

2. a) $Q_8 = \{\pm e, \pm j, \pm k, \pm l\}$ contient bien l'élément neutre e ; chaque élément y a un inverse : e et $-e$ sont leur propre inverse, j et $-j$, k et $-k$, l et $-l$, sont inverses l'un de l'autre ; enfin les produits d'éléments de Q_8 sont bien des éléments de Q_8, d'après les relations ci-dessus.
   Notons G le groupe défini par les générateurs et relations :

$$G = \left\langle a, b \,|\, a^4 = b^4 = 1 \, , \ a^2 = b^2 \, , \ ba = a^3 b \right\rangle \ .$$

   Il existe un morphisme de groupes φ de G dans Q_8 qui envoie 1 sur e, a sur j et b sur k. En effet, $\varphi(a)^2 = j^2 = -e = k^2 = \varphi(b)^2$, $\varphi(a)^4 = \varphi(b)^4 = (-e)^2 = e$ et $\varphi(b)\varphi(a) = kj = -jk = \varphi(a)^3\varphi(b)$ car $\varphi(a)^3 = -ej = -j$ par ce qui précède.
   Enfin, tout élément de G peut s'écrire sous la forme $a^n b^m$ avec $0 \leq a \leq 3$ et $0 \leq b \leq 1$ (puisque $b^2 = a^2$), donc $|G| = 8 = |Q_8|$, si bien que φ est un isomorphisme.

   b) Soit $g \in Q_8$, alors $g = a^n b^m$ comme ci-dessus et $g^{-1}a^2 g = b^{-m}a^{-n}a^2 a^n b^m = b^{-m}a^2 b^m = b^{-m}b^2 b^m = b^2 = a^2$ donc a^2 commute à tous les éléments de Q_8.
   Dans Q_8, a et b sont d'ordre 4, donc les groupes qu'ils engendrent sont d'indice 2, donc distingués. Chacun d'eux est donc la réunion de classes de conjugaison ; comme a^2 est dans le centre de Q_8 (ou parce qu'il est le seul élément d'ordre 2 dans $\langle a \rangle$), il est seul dans sa classe, tout comme le neutre 1 ; enfin a n'est pas dans le centre de Q_8 ($ba = a^3 b \neq ab$), donc il est dans la même classe que le seul élément de $\langle a \rangle$ qui reste : a^3. De la même façon, b et b^3 sont dans la même classe, ab et $a^3 b$ aussi. Les classes de conjugaison de Q_8 sont donc :

$$\{1\} \ , \quad \{a^2\} \ , \quad \{a, a^3\} \ , \quad \{b, b^3\} \ , \quad \{ab, a^3 b\} \ .$$

   Remarque. Le sous-groupe engendré par a^2 est distingué et d'ordre 2, si bien que le groupe quotient $Q_8/\langle a^2 \rangle$ est d'ordre 4 donc abélien. Comme deux éléments de Q_8 ne peuvent être conjugués que si leurs images dans le groupe quotient le sont, c'est-à-dire ici si elles sont égales (puisque le quotient est abélien), on voit que les classes de conjugaison de Q_8 sont de cardinal au plus 2, 1 pour les éléments du centre, 2 pour les autres, de la forme $\{g, a^2 g\}$.

c) Soit χ le caractère d'une représentation de degré 1 de Q_8, alors les valeurs de χ sont des racines de l'unité d'ordre divisant l'ordre des éléments, qui est 1, 2 ou 4. De plus, comme a est conjugué à a^3 (et b à b^3, ab à $a^3b = (ab)^3$), on sait que les valeurs de χ en ces éléments sont des racines de l'unités d'ordre divisant $3-1 = 2$ (par Ex. 3.c). Enfin χ est un morphisme de groupes, donc $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ est déterminé par les valeurs de χ en a et en b, pour chacune desquelles il ya deux choix : 1 ou -1, soit 4 listes de valeurs possibles pour χ.

En dehors du caractère de la représentation unité, on vérifie immédiatement que l'application ρ_a de Q_8 dans $GL(\mathbb{C})$ qui envoie a sur $Id_{\mathbb{C}}$ et b sur $-Id_{\mathbb{C}}$ est un morphisme de groupes, donc une représentation de Q_8, dont le caractère vaut 1 en a et -1 en b. On fait de même pour montrer que les autres caractères proviennent eux aussi de représentations de Q_8 de degré 1.

Q_8 a donc 4 représentations de degré 1 ; comme il y a 5 classes de conjugaison et par la formule sur les carrés des degrés des représentations irréductibles $\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|$, on voit qu'il reste 1 représentation irréductible de degré 2 à trouver.

d) Le morphisme ρ de Q_8 dans $GL(\mathbb{C}^2)$ défini par

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad , \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

définit une représentation de degré 2 de Q_8, qui est irréductible car les espaces propres associés à la première matrice, à savoir les droites engendrées par les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^2$, ne sont pas vecteurs propres de la seconde matrice, donc $\mathbb{C}^2$ n'a pas de sous-espace non trivial stable par ρ.

On a maintenant les 5 représentations irréductibles de Q_8 ; en écrivant les matrices $\rho(a^2)$ et $\rho(ab)$, on trouve les valeurs du caractère de ρ, qui permettent de compléter la table des caractères de Q_8 :

	$\{1\}$	$\{a^2\}$	$\{a, a^3\}$	$\{b, b^3\}$	$\{ab, a^3b\}$
χ_U	1	1	1	1	1
χ_a	1	1	1	-1	-1
χ_b	1	1	-1	1	-1
χ_{ab}	1	1	-1	-1	1
χ_ρ	2	-2	0	0	0

3. Les groupes Q_8 et D_4 ont la même table de caractères, mais ils ne sont pas isomorphes : Q_8 a 3 sous-groupes d'indice 2 (6 éléments d'ordre 4 : $\pm j$, $\pm k$, $\pm l$) tandis que D_4 n'en a qu'un (et deux éléments d'ordre 4 : r et r^3).