10. Tests non paramétriques

La quasi totalité des tests que l'on a utilisés jusqu'à présent supposent que la loi de la variable aléatoire X étudiée est normale dans les populations considérées (hormis pour la conformité ou la comparaison de moyennes sur de grands échantillons). Cette condition n'étant pas toujours satisfaite, on étudie maintenant des tests qui sont valables même quand la loi de X n'est pas normale. Ce sont des tests de **comparaison de moyennes**. Lorsque les échantillons peuvent être considérés indépendants, on applique le test de *Mann et Whitney* pour 2 échantillons, celui de *Kruskal et Wallis* pour un nombre quelconque d'échantillons. Lorsque on a affaire à deux échantillons appariés (c'est-à-dire non indépendants), on applique le test de *Wilcoxon*.

Tous ces tests sont dits *non paramétriques* car ils ne nécessitent pas d'estimation de la moyenne et de la variance. En fait, ils n'utilisent même pas les **valeurs** x_i recueillies dans les échantillons, mais seulement leur **rang** dans la liste ordonnée de toutes les valeurs.

1 Test de Mann et Whitney

On dispose des mesures des valeurs de X dans deux échantillons indépendants E_1 et E_2, de tailles respectives n_1 et n_2. On souhaite comparer les deux moyennes expérimentales, c'est-à-dire tester l'hypothèse nulle (H_0) : « $\mu_1 = \mu_2$ ».

On commence par trier les valeurs obtenues dans la réunion des deux échantillons par **ordre croissant**. Pour chaque valeur x_i issue de E_1, on compte le nombre de valeurs issues de E_2 situées après lui dans la liste ordonnée (celles qui sont égales à x_i ne comptent que pour $\frac{1}{2}$). On note u_1 la somme des nombres ainsi associés aux différentes valeurs issues de E_1. On fait de même en échangeant les rôles des deux échantillons, ce qui donne la somme u_2. Soit u la plus petite des deux sommes obtenues :

$$u = \min\{u_1 \ ; \ u_2\} \ .$$

On note $\mathcal{U}$ la variable aléatoire associée.

- Pour n_1 et n_2 quelconques, on lit dans les tables du test de Mann et Whitney le nombre m_α tel que, sous (H_0), $P(\mathcal{U} \le m_\alpha) = \alpha$. On rejette (H_0) au risque d'erreur α si $u \le m_\alpha$. Autrement on accepte (H_0).
- Si n_1 et n_2 sont assez grands (≥ 20 en général), sous (H_0), $\mathcal{U}$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec

  $$\mu = \frac{n_1 n_2}{2} \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}} \ .$$

  On lit u_α dans la table de l'écart réduit de la loi normale tel que $P(|\mathcal{N}| \ge u_\alpha) = \alpha$, on calcule

  $$\varepsilon = \frac{u - \mu}{\sigma}$$

  et on rejette (H_0) au risque d'erreur α si $\varepsilon \notin]-u_\alpha; u_\alpha[$. Autrement on accepte (H_0).

2 Test de Kruskal et Wallis

On dispose des mesures des valeurs de X dans k échantillons indépendants $E_1, \ldots, E_k$, de tailles respectives $n_1, \ldots, n_k$. On souhaite comparer les k moyennes expérimentales, c'est-à-dire tester l'hypothèse nulle (H_0) : « $\mu_1 = \cdots = \mu_k$ ».

Comme ci-dessus, on trie les valeurs obtenues dans la réunion des k échantillons par ordre croissant, puis on associe à chaque valeur son rang dans la liste si elle n'apparaît qu'une fois, la moyenne des rangs de ses apparitions si elle apparaît plusieurs fois (par exemple, une valeur apparaissant aux 8e et 9e positions sera associée les deux fois à 8,5). Pour chaque échantillon E_i, on calcule la somme r_i des rangs des valeurs qui en sont issues. On pose :

$$h = \frac{12}{n(n+1)} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^2}{n_i} \right) - 3(n+1) \ ,$$

où $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ est l'effectif global. On note H la variable aléatoire associée.

- Si $n_1, \ldots, n_k$ sont assez grands (> 5 en général), sous (H_0), H suit approximativement la loi du χ^2 à $k-1$ degrés de liberté. On lit χ^2_α dans la table du χ^2 tel que $P(H \geq \chi^2_\alpha) = \alpha$ et on rejette (H_0) au risque d'erreur α si $h \geq \chi^2_\alpha$. Autrement on accepte (H_0).
- Dans le cas où on dispose de 3 échantillons de petite taille (≤ 5), on lit dans les tables du test de Kruskal et Wallis ci-dessous le nombre h_α tel que, sous (H_0), $P(H \geq h_\alpha) = \alpha$. On rejette (H_0) au risque d'erreur α si $h \geq h_\alpha$. Autrement on accepte (H_0).

3 Test de Wilcoxon

On dispose de deux échantillons *appariés* E_1 et E_2, c'est-à-dire que chaque valeur de E_1 est associée à une valeur de E_2. On teste l'hypothèse nulle (H_0) : « $\mu_1 = \mu_2$ ».

On calcule les différences entre les valeurs appariées, puis on les classe par ordre croissant des valeurs absolues, en omettant les différences nulles. On affecte à chaque différence non nulle son rang dans le classement (ou la moyenne de ses rangs en cas d'ex-æquo). On note w_+ la somme des rangs des différences strictement positives, w_- la somme des rangs des différences strictement négatives ; on vérifie que

$$w_+ + w_- = \frac{N(N+1)}{2} \ ,$$

où N désigne le nombres de différences non nulles. Enfin, on note w le plus petit des deux nombres : $w = \min\{w_+, w_-\}$. Soit W la variable aléatoire associée à w.

- Si $N \leq 25$, on lit dans la table du test de Wilcoxon (ci-dessous) le nombre w_α tel que, sous (H_0), $P(W \geq w_\alpha) = \alpha$. On rejette (H_0) au risque d'erreur α si $w \geq w_\alpha$. Autrement on accepte (H_0).
- Si $N > 25$, sous (H_0), W suit approximativement la loi normale $\mathbb{N}(\mu, \sigma)$ avec

$$\mu = \frac{N(N+1)}{4} \ , \quad \sigma = \sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}} \ ;$$

  on calcule donc la valeur de $u = \frac{w-\mu}{\sigma}$ et on la compare à u_α lu dans la table de la loi normale centrée réduite. On conclut comme à l'habitude.

Exercice 1
Deux groupes de 10 étudiants ayant suivi une formation différente ont subi le même examen. Le classement de l'examen est le suivant :

groupe A	1		3	4	5		7	8	8ex			12			15		17			
groupe B		2				6				10	11		13	14		15ex		18	19	20

On veut déterminer si les différences de formation influencent significativement les résultats.

(a) Montrer qu'il faut utiliser un test non paramétrique.

(b) Appliquer le test de Mann et Whitney et conclure.

Exercice 2
Comparer les moyennes des échantillons :

E1 :	3,0 ; 9,8 ; 2,0 ; 5,2 ; 3,6 ; 5,9 ; 8,5 ; 9,4 ,
E2 :	9,3 ; 12,5 ; 11,3 ; 7,6 ; 3,2 ; 8,6 ; 7,2 ; 14,2 ; 9,6 ; 3,8 .

On ne dispose d'aucune hypothèse sur la loi suivie par la variable aléatoire étudiée au niveau des populations.

Exercice 3
On a dosé la teneur en calcium de trois types d'eau issus d'origines géographiques différentes. Chacun d'eux a fait l'objet de quatre prélèvements, dont les résultats sont exprimés ici en mg/l.

Eau 1 :	18 ; 20 ; 22 ; 25 ,
Eau 2 :	15 ; 16 ; 17 ; 21 ,
Eau 3 :	15 ; 20 ; 21 ; 25 .

L'origine géographique de ces eaux a-t-elle une influence significative sur leur teneur en calcium ?

Exercice 4
On a étudié l'activité d'une enzyme, l'actylcholinestérase, chez des animaux soumis à l'action d'un insecticide organophosphoré. Elle est exprimé ici en micromoles de substrat hydrolysé par minute et par mg de protéines. Les résultats obtenus sur des échantillons indépendants en fonction du temps d'exposition sont fournis par le tableau suivant.

aucune exposition	1 jour	2 jours	3jours
15,0	15,0	2,0	0,5
8,5	9,0	2,2	3,0
10,0	8,0	4,0	2,3
10,0	2,0	2,4	0,6
7,6	5,0	1,1	0,9
5,0	3,0	0,7	0,5

L'insecticide entraîne-t-il une diminution significative de l'activité de l'enzyme ? (On comparera globalement les quatre échantillons.)

Exercice 5
Un chimiste a mis au point une méthode de dosage du principe actif contenu dans des comprimés pharmaceutiques. Il décide de la comparer à une méthode de référence. Pour cela il dose 12 comprimés par les deux méthodes, avec les résultats suivants (quantité de principe actif en mg, pour chaque comprimé) :

comprimé numéro	méthode de référence	méthode testée	comprimé numéro	méthode de référence	méthode testée
1	9,2	9,5	7	10,0	10,1
2	10,0	9,0	8	10,3	9,3
3	9,0	8,8	9	10,2	9,0
4	9,4	9,5	10	10,2	9,7
5	10,1	9,1	11	9,8	9,1
6	9,5	10,0	12	10,1	9,3

Y a-t-il une différence significative entre les résultats des deux méthodes ?