Examen

Jeudi 19 mai 2011 - durée 2h

Documents manuscrits du cours et du TD autorisés pour un usage personnel ; toutes les réponses doivent être justifiées. Barème indicatif : $2 + 5 + 7 + 6$.

Exercice 1
On se place dans l'espace euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3, identifié à $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique.
Former une équation cartésienne du plan P passant par le point $A = (0, 1, 4)$ et contenant la droite D d'équations cartésiennes

$$D : \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

Exercice 2
Dans le plan euclidien $\mathcal{P}$, muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on note r la rotation de centre O, d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Étant donné un point M de coordonnées (a, b), on note M' son image par r.

a) Déterminer les images par r des points $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $I = (0, 1)$ et $B = (1, 1)$.
b) Donner la matrice de r, puis les coordonnées de M' en fonction de a et b.
c) On suppose $M \neq M'$, déterminer (en fonction de a et b) l'équation cartésienne de la droite passant par M et M'.
d) Montrer que la courbe d'équation $x^2 + y^2 - x - y = 0$ est le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
e) En déduire le lieu $\mathcal{L}$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que M, M' et I soient alignés.

Exercice 3
Dans le plan affine, soient A, B, C trois points distincts non alignés.

1. Soit M un point du plan affine.
   a) Justifier l'existence de $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$;
   b) déterminer en fonction de x et y des réels α, β, γ tels que $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$; justifier que M est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ).
   c) Montrer que (AM) est parallèle à (BC) si et seulement si $\beta = -\gamma$.
   d) Montrer que $M \in (AC)$ si et seulement si $\beta = 0$.

2. On suppose qu'on a choisi α, β, γ de sorte que $\alpha + \beta + \gamma = 1$; on suppose de plus que $\beta \neq 0$ et que les droites (AM) et (BC) sont concourantes en un point D.
   a) Montrer que $\overrightarrow{DM} = \alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} + \gamma\overrightarrow{DC}$.
   b) Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}$ forment une base du plan vectoriel ;
   c) en déduire à l'aide de la question précédente qu'on a $\beta\overrightarrow{DB} + \gamma\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$, puis que :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{\gamma}{\beta} \ .$$

Exercice 4 (Théorème de Ceva)
Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant.

Soient ABC un triangle non aplati et A', B', C' trois points distincts des sommets et appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB). Supposons que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles, alors :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \ . \tag{1}$$

Remarque : la réciproque de cette assertion est vraie.

1. Sens direct - cas des droites parallèles
   On suppose que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.
   a) Établir les égalités :
   $$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}}$$
   b) En déduire l'égalité (1).
2. Sens direct - cas des droites concourantes
   On suppose que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point noté G. On sait par l'exercice 3 qu'on peut choisir α, β, γ tels que G soit le barycentre de (A, α), (B, β), (C, γ).
   a) Montrer que $G \notin (AC)$ *(on peut raisonner par l'absurde)*.
   On obtient de même que $G \notin (AB)$ et $G \notin (BC)$.
   b) Vérifier que (AG) et (BC) concourent en A', en déduire à l'aide de l'exercice 3 que
   $$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\gamma}{\beta} \ .$$
   c) Montrer de même les égalités :
   $$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{\alpha}{\gamma} \ , \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{\beta}{\alpha} \ .$$
   d) En déduire l'égalité (1).