

Devoir Surveillé 2

8 décembre 2008 - durée 1h30

Documents : une feuille double autorisée par personne ; calculatrice autorisée pour un usage personnel.
Toutes les réponses doivent être justifiées. Les 4 exercices sont indépendants.

Exercice 1

a) Donner les solutions réelles des équations suivantes :

(i) $x^2 + 3x - 10 = 0$;

(ii) $x^2 - 4x + 5 = 0$.

b) Donner la forme factorisée du trinôme $x^2 + 3x - 10$ et faire son tableau de signe.

c) On note z le nombre complexe égal à $2 + i$ et \bar{z} son conjugué. Donner la forme algébrique de z^2 et de \bar{z}^2 ; vérifier que z et \bar{z} sont des racines complexes de $x^2 - 4x + 5$.

Exercice 2

Kevin a 3 euros et 60 centimes d'argent de poche à dépenser pour acheter ses bonbons préférés : les «yellow» (à 40 centimes l'un) et les «Xtras» (à 30 centimes l'un). Il ne veut pas garder un seul centime !

a) Écrire l'équation vérifiée par le nombre y de bonbons «yellow» et le nombre x de bonbons «Xtras» que Kevin peut acheter. Montrer qu'elle se ramène à :

$$y = -\frac{3}{4}x + 9 .$$

b) Soit D la droite d'équation cartésienne : $y = -\frac{3}{4}x + 9$. Donner sa pente et son ordonnée à l'origine ; déterminer le nombre x_0 tel que

$$-\frac{3}{4}x_0 + 9 = 0 .$$

Tracer la droite D dans un repère orthonormé (échelle : 1cm = 1 unité sur chaque axe).

c) En déduire l'ensemble de toutes les combinaisons possibles de bonbons «yellow» et «Xtras» que Kevin peut acheter.

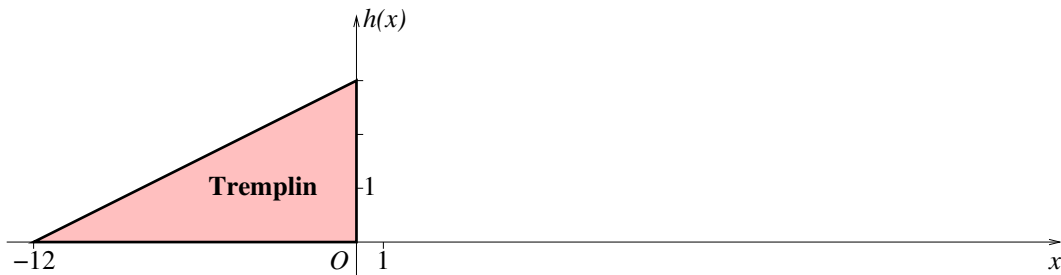
d) Placer dans le même repère que ci-dessus le point de coordonnées cartésiennes $(5, 5)$. Quelle est sa position par rapport à la droite D ? Qu'en déduit-on concernant Kevin ?

Exercice 3

Un skieur nautique tiré par un bateau s'élance sur un tremplin haut de 3 m au-dessus du niveau de l'eau. On note x sa distance horizontale par rapport au tremplin et $h(x)$ sa hauteur par rapport au niveau de l'eau au point de la trajectoire d'abscisse x (voir figure). On admet que :

$$h(x) = -\frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{4}x + 3 \quad \text{pour } x \geq 0 .$$

- Montrer que les racines de h sont -8 et 24 ; en déduire la distance parcourue en l'air par le skieur nautique.
- À quelle distance du tremplin se retrouve-t-il une deuxième fois à 3 m au-dessus de l'eau ?
- On admet que le skieur atteindra sa hauteur maximale pour $x = 8$ (pourquoi ?); déterminer sa hauteur maximale.
- Esquisser la trajectoire décrite par le skieur (attention : l'échelle n'est pas la même sur les deux axes).



Exercice 4

- Placer dans le plan muni d'un repère orthonormé les points A et B de coordonnées **polaires** respectives $(2, \frac{3\pi}{4})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6})$.
- Donner les affixes a et b de ces points sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.
- Calculer le produit ab de deux manières différentes.
- En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{11\pi}{12})$.
- Calculer

$$\left(-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 .$$