Université de Limoges
Faculté des Sciences

Année Universitaire 2007-2008

Licence de Mathématiques
Géométrie Différentielle
Feuille d'exercices n° 3 : Abscisse curviligne, courbure

Exercice 1. Déterminer la longueur des courbes suivantes :
1. L'astroïde de paramétrisation

$$\left\{\begin{array}{l} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{array}\right. , \quad t \in [0, 2\pi].$$

2. La cardioïde d'équation polaire $r = 1 + \cos\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$.

Exercice 2. On considère la courbe $\mathcal{H}$ définie par la paramétrisation suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} x(\theta) = 2\,\cos 2\,\theta - \cos 4\,\theta \\ y(\theta) = -2\,\sin 2\,\theta - \sin 4\,\theta, \end{array}\right.$$

lorsque θ décrit l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.

1. Déterminer l'expression de $z(\theta) = x(\theta) + i\,y(\theta)$ en fonction de θ.
   Montrer que $|z'(\theta)|^2 = 32\,(1 + \cos 6\theta)$.
2. Calculer la longueur de la courbe $\mathcal{H}$ lorsque $\theta \in [-\pi/6, \pi/6]$, puis la longueur totale de la courbe.

Exercice 3. Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation cartésienne $y = -\ln\cos x, \quad x \in]-\pi/2, \pi/2[$.
1. Déterminer la fonction angulaire ϕ.
2. En déduire l'équation de la *développée* de $\mathcal{C}$ (courbe décrite par l'ensemble des centres de courbure de $\mathcal{C}$).

Exercice 4. On s'intéresse à l'arc $\mathcal{C}$ de cardioïde défini par l'équation polaire

$$r = 1 + \cos\theta, \qquad \theta \in [-\pi, \pi].$$

1. Désignons par s une abscisse curviligne sur $\mathcal{C}$ orientée dans le sens des θ croissants. Donner l'expression de $\dfrac{ds}{d\theta}$ en fonction de θ.
2. Calculer la longueur de $\mathcal{C}$.
3. Soit $\vec{u}_\theta$ le vecteur défini par $\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $\vec{T}$ le vecteur tangent unitaire à $\mathcal{C}$. Montrer que l'angle $V = (\widehat{\vec{u}_\theta, \vec{T}})$ est égal à $\pi/2 + \theta/2$. En déduire la valeur de l'angle $\phi = (\widehat{\vec{i}, \vec{T}})$ en fonction de θ.
4. Calculer le rayon de courbure R en chaque point de $\mathcal{C}$.
5. Déterminer la développée de $\mathcal{C}$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer que l'enveloppe $\mathcal{D}$ des normales à une courbe plane $\mathcal{C}$ coïncide avec l'ensemble de ses centres de courbure. On note $\Phi(t) = (f(t), g(t))$ un paramétrage de $\mathcal{C}$.

1) Déterminer l'équation cartésiennne de la normale $\mathcal{N}_{(t)}$ en un point régulier $M_{(t)}$ de $\mathcal{C}$ sous la forme $a(t)(x - f(t)) + b(t)(y - g(t)) = 0$.

2) Soit $\kappa_{(t)} = (x(t), y(t))$ le point caractéristique de $\mathcal{N}_{(t)}$, c'est à dire $\kappa_{(t)} = \mathcal{D} \cap \mathcal{N}_{(t)}$. Montrer que $\kappa_{(t)}$ vérifie les deux relations $a(t)(x - f(t)) + b(t)(y - g(t)) = 0$ et $a(t)x' + b(t)y' = 0$.

3) En déduire que les coordonnées du point caractéristique $\kappa_{(t)}$vérifient un système du type

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'.(x-f) + g'.(y-g) & = & 0 \\ f''.(x-f) + g''.(y-g) & = & c(t). \end{array} \right.$$

On suppose que $M_{(t)}$ n'est pas un point d'inflexion ; déterminer $x(t) - f(t)$ et $y(t) - g(t)$ en fonction de f, g et leurs dérivées.

4) En déduire que le point caractéristique de $\mathcal{N}_{(t)}$ est le centre de courbure de $\mathcal{C}$ en t.

Exercice 6. Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée régulière de classe $\mathcal{C}^2$, dont le support contient O, O n'étant pas point d'inflexion. On désigne par $s \mapsto M(s)$ un paramétrage normal de $\mathcal{C}$ choisi de sorte que $M(0) = O$ et par $(O; \vec{I}, \vec{J})$ le repère de Frénet en O.

1. Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{OM}(s) = s\,\vec{I} + \dfrac{s^2}{2}\, c(0)\, \vec{J} + o(s^2)$, où $c(0)$ est la courbure de $\mathcal{C}$ en O.

2. Etant donnés deux points M et N de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives s_1 et s_2, calculer l'aire $\mathcal{A}(O, M, N)$ du triangle OMN en fonction de s_1 et s_2.

3. Calculer

$$\lim_{(M,N)\to(O,O)} \frac{||\overrightarrow{OM}||.||\overrightarrow{ON}||.||\overrightarrow{MN}||.}{\mathcal{A}(O, M, N)}.$$

Exercice 7. *Développante*

On appelle développante de la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ toute courbe admettant $\mathcal{C}$ pour développée. On suppose dans toute la suite que $\mathcal{C}$ est une courbe birégulière de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie par la paramétrisation normale (I, Ψ).

1. Montrer que toute développante de $\mathcal{C}$ est nécessairement définie par une paramétrisation de la forme (I, F_λ), où :

$$F_\lambda(s) = \Psi(s) + (\lambda - s)\,\vec{T}(s), \tag{1}$$

λ étant une constante réelle.

2. Montrer que réciproquement toute courbe $\mathcal{D}_\lambda$ définie par (1) est une développante de $\mathcal{C}$ (on utilisera l'abscisse curviligne σ sur $\mathcal{D}_\lambda$ ainsi que le repère de Frénet $(P; \vec{T_1}, \vec{N_1})$ sur $\mathcal{D}_\lambda$).

3. Déterminer les développantes :

a. du cercle unité.

b. de la cardioïde d'équation polaire $r = 1 + \cos\theta$.