Université de Limoges
Faculté des Sciences

Année Universitaire 2007-2008

Licence de Mathématiques
Géométrie Différentielle
Feuille d'exercices n° 4 : Courbes gauches

Exercice 1. On note C_1 le cylindre de révolution de rayon 1 et d'axe O_y ; On note C_2 le cylindre de révolution de rayon 2 et d'axe O_z ;

1) Déterminer une paramétrisation de C_1 (resp. C_2)

2) Montrer que l'intersection $C_1 \cap C_2$ forme deux courbes fermées distinctes dont on déterminera *soigneusement* une paramétrisation (donner son domaine de validité).

3) Montrer que l'intersection n'a que des points réguliers.

Exercice 2. Soit $\mathcal{C}$ l'arc défini par :

$$x = \sin t \, \cos t, \quad y = \cos^2 t, \quad z = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\,\pi).$$

(a) Montrer que le support de $\mathcal{C}$ est l'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = y$. En déduire le tracé de $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ est appelé *Fenêtre de Viviani*).

(b) Déterminer le repère de Frenet, la courbure et la torsion de $\mathcal{C}$.

Exercice 3. Déterminer le repère de Frenet, la courbure et la torsion de la courbe paramétrée définie par

$$x = t, \quad y = t^2/2, \quad z = t^3/6, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. Déterminer le repère de Frenet, la courbure et la torsion de la courbe paramétrée définie par

$$x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = \sqrt{2}\,t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5. Une courbe régulière $\mathcal{H}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est appelée une *hélice* lorsque ses tangentes font un angle constant V avec une direction fixe appelée axe de l'hélice.

1. Que trouve t-on si $V = 0$? $V = \pi/2$? Dans toute la suite, on suppose que $0 < V < \pi/2$.

2. On suppose que $\mathcal{H}$ est une courbe trirégulière de classe $\mathcal{C}^3$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Les tangentes font un angle constant avec une direction fixe.

(ii) Les normales principales sont parallèles à un plan fixe.

(iii) Les binormales font un angle constant avec une direction fixe.

(iv) La courbure et la torsion sont dans un rapport constant.

3. Application : montrer que la courbe définie à l'exercice 4 est une hélice dont on précisera l'axe.

Exercice 6. Soit $\mathcal{C}$ le support d'une courbe paramétrée birégulière de classe $\mathcal{C}^3$ admettant le paramétrage normal (I, Ψ). On suppose que les plans osculateurs aux points de $\mathcal{C}$ passent par un point fixe Ω.

1. Montrer que pour tout $s \in I$, on a $\overrightarrow{\Omega M}(s).\overrightarrow{B}(s) = 0$.

2. On se propose de montrer que $\overrightarrow{B}$ est constant sur I. Pour cela, on raisonne par l'absurde en

supposant qu'il existe $s_0 \in I$ tel que $\dfrac{d\overrightarrow{B}}{ds}(s_0) \neq 0$.

a. Justifier qu'il existe un intervalle $J \subset I$ tel que $\dfrac{d\overrightarrow{B}}{ds}$ ne s'annule pas sur J.

b. Montrer que : $\forall s \in J$, $\overrightarrow{\Omega M}(s).\overrightarrow{N}(s) = 0$.

c. Montrer que : $\forall s \in J$, $\overrightarrow{\Omega M}(s).\overrightarrow{T}(s) = 0$.

d. En déduire que : $\forall s \in J$, $M(s) = \Omega$ et montrer la contradiction.

3. Conclure.

Exercice 7. Soit $\mathcal{C}$ le support d'une courbe paramétrée trirégulière de classe $\mathcal{C}^3$ admettant le paramétrage normal (I, Ψ). On désigne par $\Omega(s)$ le centre de courbure en $\Psi(s)$ et par $\mathcal{C}_1$ la courbe paramétrée $s \mapsto \Omega(s)$. On note $(M; \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ (resp. $(\Omega; \vec{T_1}, \vec{N_1}, \vec{B_1})$) le repère de Frenet de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_1$) en M (resp. Ω).

1. On suppose que le rayon R de courbure de $\mathcal{C}$ est constant. Montrer que le rayon de courbure de $\mathcal{C}_1$ est constant égal à R et que : $\vec{T_1} = \pm\vec{B}, \quad \vec{N_1} = -\vec{N}, \quad \vec{B_1} = \mp\vec{T}$.

2. Etant donné un paramétrage normal $\sigma \mapsto m(\sigma)$ d'une courbe γ plane birégulière et un vecteur $\vec{k}$ normé orthogonal au plan de γ, on définit l'hélice $\mathcal{C}$ par la paramétrisation $\sigma \mapsto m(\sigma) + h\,\sigma\,\vec{k}$. On désigne par r le rayon de courbure de γ au point m et par $(m; \vec{t}, \vec{n})$ le repère de Frenet de γ en m. Exprimer R en fonction de r ainsi que les vecteurs $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ en fonction de $\vec{t}$, $\vec{n}$ et $\vec{k}$.

3. Appliquer le résultat de 1. au cas particulier de l'hélice définie en 2. Décrire la courbe $\mathcal{C}_1$ obtenue.