Université de Limoges
Faculté des Sciences

Année Universitaire 2007-2008

Licence de Mathématiques
Géométrie Différentielle
Feuille d'exercices n° 6 : Surfaces et nappes paramétrées

Exercice 1. Considérons le lieu des milieux des cordes d'une hélice circulaire $\mathcal{H}$.
(a) Montrer que le lieu cherché est le support d'une nappe paramétrée Σ (dont on déterminera la paramétrisation).
(b) Déterminer les points stationnaires de Σ.

Exercice 2. On se place dans l'espace affine $\mathcal{A}$ associé à l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Soit A un point de $\mathcal{A}$ et $\overrightarrow{K} : \mathbb{R} \to E \setminus \{0\}$ une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle cône Σ de sommet A la nappe (réglée) définie par la paramétrisation

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{A} \\ (u,v) & \mapsto & A + v\,\overrightarrow{K}(u). \end{array} \right.$$

1) A quoi correspond la courbe tracée sur Σ obtenue en fixant u ? Une telle courbe s'appelle une *génératrice* de Σ.

2) Déterminer les points stationnaires de Σ ainsi que le plan tangent aux points réguliers de Σ. Montrer que le plan tangent est constant le long des génératrices (on dit que Σ est *développable*).

Exercice 3. Soit γ le support d'une courbe paramétrée (I, ϕ) régulière de classe $\mathcal{C}^2$.
(a) Considérons la surface obtenue en réunissant l'ensemble des tangentes à γ. Montrer que cette surface est le support d'une nappe paramétrée Σ (dont on déterminera la paramétrisation).
(b) Déterminer les points stationnaires de Σ.
(c) Montrer que Σ est développable.

Exercice 4. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $f(x,y,z) = x^3 - 3\,xy + z = 0$.
(a) On rappelle qu'un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de $\mathcal{S}$ est singulier si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0.$$

Montrer que $\mathcal{S}$ n'a pas de point singulier.
(b) Prouver que l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ est :

$$3(x_0^2 - y_0)x - 3x_0 y + z - 2x_0^3 + 3x_0 y_0 = 0.$$

(c) Le *contour apparent* de $\mathcal{S}$ vu de O est par définition l'ensemble des points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent contient O. Prouver que le contour apparent de $\mathcal{S}$ vu de O est formé de l'axe $(O; \vec{j})$ et de la courbe d'équations $y = 2x^2/3$, $z = x^3$.
(d) Le *contour apparent* de $\mathcal{S}$ pour la direction $\mathbb{R}\,\vec{i}$ est par définition l'ensemble des points de $\mathcal{S}$ en lesquels la direction du plan tangent contient $\vec{i}$. Montrer que le contour apparent de $\mathcal{S}$ pour la direction $\mathbb{R}\,\vec{i}$ est la courbe d'équations $y = x^2$, $z = 2x^3$.

Exercice 5. *Hélices tracées sur un cône de révolution*
On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et on considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z^2 = 3\,(x^2+y^2)$.
1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un cône dont on précisera le sommet, ainsi qu'une paramétrisation. On appelle *génératrice* d'un cône toute droite passant par son sommet et tracée sur le cône. Montrer que les génératrices de $\mathcal{S}$ forment un angle constant α (à déterminer) avec $\vec{k}$.

On se propose de déterminer et d'étudier les *hélices* d'axe $(O;\vec{k})$ tracées sur le cône $\mathcal{S}$. On rappelle qu'une hélice d'axe $(O;\vec{k})$ est une courbe Γ dont les tangentes font un angle constant ϕ avec $(O;\vec{k})$.

2. Quelles courbes particulières obtient t-on pour $\phi = \pi/2$? $\phi = \pi/6$?

On s'intéresse désormais au cas $\phi \in]\pi/6, \pi/2[$. Dans la suite, on utilise le repère $(O;\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta,\vec{k})$ ainsi que les coordonnées cylindriques associées r, θ et z. On cherche Γ sous la forme d'une courbe paramétrée par

$$\theta \mapsto M(\theta) = O + \, r(\theta)\,(\vec{u}_\theta + \sqrt{3}\,\vec{k}),$$

où $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Justifier l'égalité suivante :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}.\,\vec{k} = \cos\phi\,\left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}\right\|.$$

En utilisant l'expression analytique de $M(\theta)$, en déduire que la fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ satisfait la condition différentielle

$$r'^2(\theta) = r^2(\theta)\,\frac{\cos^2\phi}{3 - 4\,\cos^2\phi}.$$

Montrer finalement que l'expression de $r(\theta)$ est donnée par $r(\theta) = r_0\,e^{m\,\theta}$, où $r_0 = r(0)$ et m est une quantité que l'on exprimera en fonction de ϕ.
4. Représenter la courbe gauche Γ tracée sur le cône $\mathcal{S}$ (on pourra prendre $r_0 = 1$ et $m = 1$).
5. Calculer l'abscisse curviligne s de la courbe Γ en fonction de θ, r_0 et m, puis déterminer les coordonnées du vecteur tangent unitaire $\overrightarrow{T}$ dans la base $(\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta,\vec{k})$.
6. En remarquant que $\dfrac{1}{2}\vec{u}_\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{k}$ est un vecteur directeur unitaire de la génératrice passant par $M(\theta)$, montrer que la courbe Γ fait un angle constant ψ avec les génératrices de $\mathcal{S}$. On calculera ψ en fonction de m.
7. Calculer $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}$. En déduire l'expression de la courbure c de Γ en fonction de θ, r_0 et m. Déterminer également les coordonnées du vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$ dans la base $(\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta,\vec{k})$.
8. Donner l'expression du vecteur binormal unitaire $\overrightarrow{B}$ dans la base $(\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta,\vec{k})$ puis calculer la torsion τ de la courbe Γ en fonction de θ, r_0 et m. Que remarque t-on pour le quotient c/τ ? On justifiera sa réponse.