IUFM du Limousin 2010-11

Master MEFE - S1

**S. Vinatier** Examen

# Correction Partie II — La constante d'Euler

1. Limite de la suite $(u_n)$

   a) Soit $k \geq 2$, alors $k-1 \leq t \leq k \iff \frac{1}{k} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k-1}$, d'où
   $$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k-1} \quad .$$
   Il s'ensuit que $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k-1} \geq \sum_{k=2}^{n+1} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) \geq \ln n$, d'où $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

   b) Soit $n \geq 1$, alors $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq 0$ par le résultat précédent, donc $(u_n)$ est décroissante (et majorée par $u_1$) ; de plus $u_n = S_n - \ln n \geq 0$, donc $(u_n)$ est minorée par 0 (donc bornée). Étant décroissante et minorée, $(u_n)$ admet une limite $\gamma$ vérifiant $0 \leq \gamma \leq u_1 = 1$, c'est-à-dire $\gamma \in [0,1]$.

2. Une première approximation de la vitesse de convergence

   a) Le résultat découle directement de 1.a).

   b) $1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k = 1 - \int_1^n \frac{dt}{t} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = S_n - \ln n = u_n$, donc $\displaystyle\sum_{k\geq 2} w_k$ converge, et $1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} w_k = \gamma$, d'où le résultat.

   c) $r_n = u_n - \gamma = 1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k - 1 + \sum_{k=2}^{\infty} w_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$.
   De plus, $(u_n)$ décroît vers $\gamma$ donc $r_n \geq 0$. Il s'ensuit que $n \geq 10^6 \Rightarrow 0 \leq u_n - \gamma \leq 10^{-6}$, donc on est sûr que $u_n$ donne une approximation à $10^{-6}$ près de $\gamma$ si $n$ dépasse un million.

3. Étude d'une fonction

   a) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et
   $$f'(x) = -\frac{1}{4(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})(x+1)^2} \quad .$$
   De plus, $(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})$ est positif à l'extérieur de ses racines ($-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$), donc $> 0$ sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $f' < 0$ sur $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire $f$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Enfin $f(0) = -1 + \ln 3 > -1 + \ln e = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

b) Notons que $-f'(x) > 0$, donc

$$-f'(x) \leq \frac{1}{4(x+\frac{1}{2})^4} \Longleftrightarrow (x+\tfrac{3}{2})(x+1)^2 \geq (x+\tfrac{1}{2})^3 \ ,$$

ce qui est vrai puisque $\frac{3}{2} \geq 1 \geq \frac{1}{2}$. Pour $k \geq 1$ entier et $X \geq k$ réel, on a donc

$$\int_k^X -f'(x)dx \leq \frac{1}{4}\int_k^X \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^4} = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{(X+\frac{1}{2})^3} - \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3}\right) \ ,$$

quantité qui tend vers $\frac{1}{12(k+\frac{1}{2})^3}$ quand $X$ tend vers $+\infty$. Il s'ensuit que la fonction $X \mapsto \int_k^X -f'(x)dx$ est majorée quand $X$ tend vers l'infini ; comme de plus elle est croissante (car $-f' > 0$), elle admet une limite en $+\infty$, qui vérifie :

$$\int_k^\infty -f'(x)dx \leq \frac{1}{12(k+\frac{1}{2})^3} \ .$$

Enfin, $\displaystyle\int_k^X -f'(x)dx = f(k) - f(X)$ tend vers $f(k)$ quand $X$ tend vers $+\infty$, ce qui donne le résultat.

4. Application à l'étude de la suite $(x_n)$

a) $x_n = S_n - \ln(n+\frac{1}{2}) = (S_n - \ln n) + (\ln n - \ln(n+\frac{1}{2}) = u_n - \ln(1+\frac{1}{2n})$, donc $\lim_{n\to\infty} x_n = \gamma$.

b) $x_k - x_{k+1} = S_k - \ln(k+\frac{1}{2}) - S_{k+1} + \ln(k+\frac{3}{2}) = f(k)$. Or $f > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ donc $x_k > x_{k+1}$ pour tout $k$, c'est-à-dire $(x_n)$ est strictement décroissante. De plus, $\displaystyle\sum_{k=n}^N f(k) = x_n - x_{N+1}$ tend vers $x_n - \gamma$ quand $N$ tend vers $+\infty$, donc $\displaystyle x_n - \gamma = \sum_{k=n}^\infty f(k)$.

c) $(k+\frac{1}{2})^2 = k^2+k+\frac{1}{4} > k^2+k = k(k+1)$. Il s'ensuit que $(k+\frac{1}{2})^4 > k^2(k+1)^2$, puis $\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^4} < \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et enfin

$$\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3} < \frac{k+\frac{1}{2}}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{2k^2(k+1)^2} = \int_k^{k+1}\frac{dx}{x^3} \ .$$

d) $(x_n)$ décroît vers $\gamma$ donc $x_n - \gamma \geq 0$ pour tout $n$ ; de plus :

$$x_n - \gamma = \sum_{k=n}^\infty f(k) \leq \frac{1}{12}\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3} \leq \frac{1}{12}\sum_{k=n}^\infty \int_k^{k+1}\frac{dx}{x^3} = \frac{1}{12}\int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^3} = \frac{1}{24n^2} \ .$$

e) On a $\frac{1}{24n^2} \leq 10^{-6} \Leftarrow 24n^2 \geq 10^6 \Leftarrow n \geq \frac{1000}{2\sqrt{6}} \Leftarrow n \geq 205$, donc $x_n$ donne une approximation à $10^{-6}$ près de $\gamma$ dès que $n$ dépasse 205.
On a donc notablement accéléré la convergence vers $\gamma$ ; il est possible de faire encore mieux (voir la suite du problème, tiré du Capès interne 1994).