VISIBLE

IMAGES & DISPOSITIFS DE VISUALISATION SCIENTIFIQUES

2012 n° 9

Pulim

9.
Visualisation et mathématisation

Politique éditoriale

Visible est une revue de sémiotique visuelle publiée par le Centre de Recherches Sémiotiques (CeReS) de l'université de Limoges, qui entend témoigner de l'importance des échanges dans les recherches actuelles sur la signification. Soucieuse d'interdisciplinarité, *Visible* souhaite aussi affirmer un souci d'approfondissement théorique afin de rendre compte de l'extrême diversité des objets visuels, aujourd'hui partagés entre le monde de l'art, la communication, l'informatique et la mercatique, notamment. La revue entend aussi faire le lien entre les différents domaines attentifs à la signification de l'objet, entre la théorie et l'analyse, la recherche fondamentale et appliquée.

La revue participe à la construction d'un lieu d'échanges européen et publie, par priorité, les résultats de ces rencontres, en français et en italien.

Le neuvième numéro de *Visible*

Avec ce numéro dirigé par Sémir Badir et Maria Giulia Dondero (FNRS/Université de Liège), *Visible* poursuit le cycle consacré aux recherches entreprises dans le cadre de l'ANR *Images et dispositifs de visualisation scientifiques* (2008-2010). Pour ce programme qui confronte la sémiotique aux sciences dites dures, le groupe de chercheurs constitué pour le programme précédent (les universités de Liège et Venise rassemblées autour de celle de Limoges) s'est élargi aux scientifiques de l'université de Strasbourg (laboratoire IRIST).

Visible retrace les étapes successives de cette réflexion collective et réunit les actes des journées d'étude organisées par les différentes équipes européennes. Ce neuvième numéro est consacré aux journées d'étude de Liège (3-4 décembre 2009). Anticipant sur une publication nécessairement différée dans le temps, un site fonctionnel dédié aux membres du réseau permet de partager la réflexion collective, les corpus et résultats. <www.flsh.unilim.fr/anr-idivis/>

Tous nos remerciements à l'ANR qui finance cette revue.

Numéro préparé par
Sémir BADIR et Maria Giulia DONDERO

9.
Visualisation et mathématisation

Pulim

La collection *Visible* « L’hétérogénéité du visuel »

n°1, *La diversité sensible* (2005)
dirigé par Anne Beyaert-Geslin et Nanta Novello-Paglianti

n°2, *Syncrétismes* (2006)
dirigé par Maria Giulia Dondero et Nanta Novello-Paglianti

n°3, *Intermédialité visuelle* (2007)
dirigé par Sémir Badir et Nathalie Roelens

n°4, *Diagrammes, cartes, schémas graphiques* (2008)
dirigé par Elisabetta Gigante

La collection Visible « Images et dispositifs de visualisation scientifiques »

n°5, *L’image dans le discours scientifique : statuts et dispositifs de visualisation* (2009)
dirigé par Maria Giulia Dondero et Valentina Miraglia

n° 6, *Techniques de transformation, transformation des techniques* (2010)
dirigé par Maria Giulia Dondero et Audrey Moutat

n°7, *Camoufler l’invisible, exhiber l’invisible* (2011)
dirigé par Alvise Mattozzi

n° 8, *Définir l’image scientifique* (2012)
dirigé par Catherine Allamel-Raffin et Amirouche Moktefi

n° 9, *Visualisation et mathématisation* (2012)
dirigé par Sémir Badir et Maria Giulia Dondero

39^C, rue Camille Guérin – 87031 Limoges cedex – France
Tél : 05.55.01.95.35 – Fax : 05.55.43.56.29
E-mail : pulim@unilim.fr
http://pulim.unilim.fr

La pensée du texte littéraire : une pensée diagrammatique Iconicité et abstraction

Noëlle Batt
Université Paris 8

Mais essayez de vous figurer ce que suppose le moindre de nos actes. Songez à tout ce qui doit se passer dans l'homme qui émet une petite phrase intelligible, et mesurez tout ce qu'il faut pour qu'un poème de Keats ou de Baudelaire vienne se former sur une page vide, devant le poète.
Songez aussi qu'entre tous les arts, le nôtre est peut-être celui qui coordonne le plus de parties ou de facteurs indépendants : le son, le sens, le réel et l'imaginaire, la logique, la syntaxe et la double invention du fond et de la forme..., et tout ceci au moyen de ce moyen essentiellement pratique, perpétuellement altéré, souillé, faisant tous les métiers, le langage commun, dont il s'agit pour nous de tirer une Voix pure, idéale, capable de communiquer sans faiblesses, sans effort apparent, sans faute contre l'oreille et sans rompre la sphère instantanée de l'univers poétique, une idée de quelque moi merveilleusement supérieur à Moi[1].

Si l'art littéraire n'est pas assimilable à une production langagière ordinaire, aussi subtile soit-elle, c'est, comme l'a dit Proust, que les beaux textes sont écrits comme dans une langue étrangère. D'autres l'ont dit après lui. Paul Valéry, Deleuze citant Proust, et même Genette[2]. Si l'art littéraire

[1] Paul Valéry : « Poésie et pensée abstraite », conférence prononcée à l'Université d'Oxford, *The Zaharoff Lecture for 1939*, Oxford, Clarendon Press, 1939, reprise dans *Variété V* [1944], *Œuvres complètes*, Paris, Gallimard, Bibliothèque de la Pléiade, tome 1, p. 1339.

[2] Proust, *Contre Sainte-Beuve* : « Les beaux livres sont écrits dans une sorte de langue étrangère. » (p. 296, édition de poche). Paul Valéry, « Poésie et pensée abstraite », *Œuvres*, Bibliothèque de la Pléiade, tome 1 : « [...] et puis ces discours si différents des discours ordinaires que sont les vers, qui sont bizarrement ordonnés, qui ne

n'est assimilable ni à la logique ni à la philosophie bien qu'il se livre pourtant à des questionnements et à des investigations qui peuvent être de nature logique ou philosophique, c'est qu'il les mène sur un tout autre mode que la logique ou la philosophie. Mode essentiellement lié à la manière dont il défigure et refigure, et la langue commune, et les syntaxes discursives sur lesquelles il s'appuie. Mode lié aussi au fait que dans un texte littéraire, les différents niveaux emboîtés ou, pour reprendre la terminologie du Groupe μ, « tabularisés » – linguistique (phonématique, morphématique, sémantique) ; diégétique, narratif, stylistique ; prosodique, rhétorique, symbolique… – entrent en résonance les uns avec les autres, et que le sens artistique *émane*, émerge, procède de l'action conjointe, *indistincte* et *indivisible*[3], d'unités ou de sous-unités de nature hétérogène reliées dans un dispositif.

Et s'il est une discipline non artistique dont la littérature puisse être rapprochée, c'est très certainement, plus que tout autre, la mathématique parce que littérature et mathématique font advenir des mondes possibles en développant des relations imaginaires entre des éléments posés *a priori*. Toutes deux élaborent une pensée (plutôt qu'elles ne communiquent une connaissance) en manipulant des signes, en les dotant d'une énergie et en les faisant agir dans une configuration signifiante conçue pour avoir sur le sujet-récepteur un effet : une configuration performative.

---

répondent à aucun besoin *si ce n'est au besoin qu'ils doivent créer eux-mêmes* ; qui ne parlent jamais que de choses absentes […] étranges discours qui semblent faits par un *autre* personnage que celui qui les dit, et s'adresser à un *autre* que celui qui les écoute. En somme, c'est un *langage dans un langage* » (p. 1324). Gérard Genette, « Figures » dans *Figures* : « Ce qu'on peut retenir de la vieille rhétorique, ce n'est donc pas son contenu, c'est son exemple, sa forme, son idée paradoxale de la Littérature comme un ordre fondé sur l'ambiguïté des signes, sur l'espace exigu, mais vertigineux, qui s'ouvre entre deux mots de même sens, deux sens d'un même mot : deux langages du même langage » (Paris, Le Seuil, 1966, p. 220). Gilles Deleuze, « La littérature et la vie », *Critique et Clinique* : « Ce que fait la littérature dans la langue apparaît mieux : comme dit Proust, elle y trace précisément une sorte de langue étrangère, qui n'est pas une autre langue, ni un patois retrouvé, mais un devenir-autre de la langue, une minoration de cette langue majeure, un délire qui l'emporte, une ligne de sorcière qui s'échappe du système dominant. Kafka fait dire au champion de nage : je parle la même langue que vous, et pourtant je ne comprends pas un mot de ce que vous dites. Création syntaxique, style, tel est ce devenir de la langue : il n'y a pas de créations de mots, il n'y a pas de néologismes qui vaillent en dehors des effets de syntaxe dans lesquels ils se développent. Si bien que la littérature présente déjà deux aspects, dans la mesure où elle opère une décomposition et une destruction de la langue maternelle, mais aussi l'invention d'une nouvelle langue dans la langue, par création de syntaxe. » (Paris, Minuit, 1993, pp. 15-16).

[3] Nous reprenons ici des termes employés par Paul Valéry pour exprimer des caractéristiques de la fabrication d'un objet par la nature, en l'occurrence, la coquille d'un mollusque, cf. « L'Homme et la Coquille », dans *Œuvres complètes*, Paris, Gallimard, Bibliothèque de la Pléiade, p. 898 et p. 903.

À quoi tient cette puissance de l'art littéraire ? Répondre à la question, comprendre et expliquer ce qui se passe spécifiquement dans et par ce discours d'un type tout à fait particulier, s'impose comme une nécessité.

Je vais donc m'arrêter plus ou moins rapidement sur les trois traits qui signent à mon sens, la spécificité de cet art :

Une action de modélisation grâce à des moyens techniques appropriés impliqués dans une organisation générique, typique et formelle obéissant à des principes conventionnels culturellement et historiquement déterminés.

Une inscription diagrammatique de cette modélisation. Les caractéristiques de l'écriture littéraire découlent d'un déséquilibre introduit par l'écrivain entre les trois composantes du langage (symbolique, indiciel et iconique) au bénéfice de la composante iconique, et plus particulièrement diagrammatique. Ce trait est étendu à tous les niveaux de la composition de l'œuvre.

Un effet cognitif et esthétique directement lié à deux caractéristiques de l'iconicité du langage littéraire, d'une part la mobilisation de la matérialité de la langue qui agit sur les sens du sujet ; d'autre part la saisie par l'esprit du rapport de rapports qui procède de la mise en relation de tous les types de connexions établis à tous les niveaux de l'œuvre. La participation conjointe dans l'acte de lecture de l'intelligence de l'esprit et de l'intelligence du corps, (réseaux neuronaux des zones perceptuelles et motrices aussi bien que des zones du langage) font de l'expérience esthétique une expérience cognitive d'un genre unique. Nous verrons jusqu'à quel degré de précision ce double effet cognitif et esthétique se laissera définir.

1. Une action de modélisation

Créer un monde possible dans et par la fiction est l'un des moyens auxquels on peut recourir pour tenter de comprendre le monde où nous nous trouvons. Cela revient à lui inventer une altérité. Il s'agit de construire un artefact obtenu par réduplication, mais décalée, différée, décentrée.

La modélisation implique donc la création d'une diégèse avec des données spatiales, des données temporelles, des actions, des personnages et des objets. Je n'insisterai pas. Tous les outils méthodologiques de l'école formaliste russe (Eikhenbaum, Chklovski…) ou du premier structuralisme (Barthes, Greimas, Todorov, Brémond…) sont là pour en dresser les cartes, établir des correspondances, repérer les causalités qui s'y disputent la préséance, en déterminer la logique et la chronologie et toutes leurs distorsions.

La modélisation implique aussi le choix d'une stratégie de narration comprenant la sélection d'une instance de narration, d'une instance de focalisation et d'un mode d'organisation temporelle, toutes choses qui vont faire que les éléments associés et noués dans la diégèse vont nous parvenir modulés, vectorisés d'une façon contingente, dépendant directement des choix effectués. Il suffit de réécrire un récit en changeant l'un de ces paramètres (instance d'énonciation, de focalisation, temporalité du récit) pour voir à quel point ces choix sont déterminants pour la réception de la diégèse et son appréciation. Ce sont ici les concepts de la narratologie (Genette, Todorov, Mieke Bal, Dorrit Cohn, Gerald Prince…) ou de la sémiotique littéraire (Lotman, Greimas, le Groupe µ, Coquet, Ouellet…) qui permettent de la saisir et de la rationaliser.

La modélisation implique enfin le choix d'une stratégie d'écriture qui investit le lexique et la syntaxe en faisant éventuellement appel aux ressources de l'*elocutio*, et le choix d'une stratégie de composition qui fait appel aux ressources de la *dispositio* et de la *compositio*. L'ancienne rhétorique est donc aussi de la partie. Mais au moment où nous devons considérer l'écriture, il nous faut détailler ce que nous avons appelé le caractère diagrammatique du langage littéraire, ce qui nécessitera un détour par Peirce et Wittgenstein.

2. Un caractère diagrammatique

Reprenons donc rapidement la catégorisation de celui qui est surtout connu comme sémioticien, mais qui fut aussi un logicien dont les travaux furent parfois lus de longues années seulement après avoir été écrits : Charles Sanders Peirce, auteur des *Collected Papers* en 8 volumes. Nous en traiterons ici à travers deux commentateurs : Roman Jakobson, dans un article intitulé « À la recherche de l'essence du langage » paru en 1965[4], et Christiane Chauviré dans un article intitulé « Perception visuelle et mathématiques chez Peirce et Wittgenstein » paru en 2003 dans les actes d'un colloque organisé au Collège de France par Jacques Bouveresse : « Philosophies de la perception. Phénoménologie, grammaire et sciences cognitives »[5].

On sait que Peirce pour fonder sa sémiotique dont le nom remonte à la *semeiôtikê* des Stoïciens, renoue avec les logiciens de l'Antiquité et du Moyen Age. En se fondant sur la différence entre le signifiant et le signifié, il distingue trois variétés fondamentales de signes (ou *representamen* comme il les appelle), et rappelons que cette distinction vaut pour le langage mathématique aussi bien que pour le langage naturel : l'*icône* qui opère avant tout par la similitude de fait entre le signifiant et le signifié, l'*indice* qui opère par la contiguïté de fait entre signifié et signifiant, et le *symbole* (terme qui fut aussi employé par Saussure avant que celui-ci ne lui préfère celui de "signe") qui opère avant tout par contiguïté instituée, apprise, entre signifiant et signifié, ce qui requiert, pour pouvoir l'interpréter correctement, de connaître la règle conventionnelle qui le fonde. Notons que Peirce remarque d'emblée que les trois fonctions qui caractérisent chaque variété de *representamen* – ressemblance, contiguïté et relation conventionnelle – coexistent à des degrés divers dans les trois variétés et que la dénomination de chacune ne fait que sanctionner la prédominance d'une fonction sur les deux autres.

[4] Repris in *Problèmes de linguistique générale, I*, Paris, Gallimard, 1966.
[5] In J. Bouveresse & J-J. Rosat (éds), *Philosophies de la perception. Phénoménologie, grammaire et sciences cognitives*, Paris, Odile Jacob, 2003.

L'icône, à laquelle nous allons nous intéresser ici, est subdivisée par Peirce en deux sous-catégories : l'*image* et le *diagramme*. Si, dans l'image, le signifiant représente « les simples qualités des signifiés », dans le diagramme, la ressemblance entre le signifiant et le signifié « ne concerne que les relations entre leurs parties ». Le diagramme est donc défini comme « un *representamen* qui est de manière prédominante une icône de relation, et que des conventions aident à jouer ce rôle ». Les exemples d'abord cités sont des exemples classiques : des figures géométriques de tailles différentes illustrant la production de pétrole dans deux pays différents. Puis, Peirce déclare que « toute équation algébrique est une icône dans la mesure où elle rend perceptibles, par le moyen des signes algébriques, les relations des quantités visées. » Il note que : « l'algèbre n'est pas autre chose qu'une sorte de diagramme et le langage n'est pas autre chose qu'une sorte d'algèbre ». Et, « pour qu'une phrase puisse être comprise, il faut que l'arrangement des mots en son sein fonctionne en qualité d'*icônes* ». Jakobson illustre le propos en indiquant, par exemple, que l'on préfère dire « Le Président et le Ministre… » plutôt que « le Ministre et le Président » afin que la chronologie syntaxique reflète la hiérarchie politique ; et que la formule de César, « *Veni, vidi, vici* », a peut-être impressionné les esprits parce qu'outre l'allitération et l'assonance dominantes, elle nommait les actions dans l'ordre où elles se sont produites.

L'étude des diagrammes trouve l'occasion d'un nouveau développement dans la théorie moderne des graphes (*graphs*)[6], et Jakobson se dit frappé par leurs analogies manifestes avec les schémas grammaticaux, en particulier syntaxiques. Il note que, tant dans la morphologie que dans la syntaxe, toute relation entre les parties et le tout se conforme à la définition que donne Peirce des diagrammes et de leur nature iconique. Il désigne, par exemple, dans le cas des comparatifs et des superlatifs, l'accroissement graduel du nombre des phonèmes correspondant à la gradation des signifiés : « high, higher, highest ». Il fait remarquer qu'il n'existe aucune langue dans laquelle la marque du pluriel se fasse par soustraction de phonème ; elle se fait toujours par addition (p. 30). Donnant raison à Peirce, Jakobson fait remarquer que Saussure lui-même finira par nuancer sa notion d'arbitraire en distinguant ce qui est « radicalement arbitraire » de ce qui est « relativement arbitraire » (p. 31). Sur le plan du lexique, Jakobson rassemble des séries lexicales apparentées qui ont de manière heureuse, dans une langue donnée, des liens phonologiques qui ne tiennent pas à des racines communes et qui frappent le *native speaker* (ami, ennemi ; père, mère, frère) ; il en conclut que « la paronomase joue un rôle considérable dans la vie du langage » et que le discours ne perd pas une occasion de l'exploiter. Confirmant Peirce, Jakobson conclut : « "le système de diagrammatisation" d'une part manifeste et obligatoire dans toute la structure syntactique et morphologique du

[6] On notera que c'est ce mot de « graph » qu'utilise Bacon dans une des interviews accordées à David Sylvester et que Deleuze citera en le traduisant par « diagramme » dans *Francis Bacon. Logique de la sensation*, Paris, Le Seuil, 2002 [1981].

langage, d'autre part latent et virtuel dans son aspect lexical, ruine le dogme saussurien de l'arbitraire du signe » (p. 36).

Le langage poétique, qui tantôt exploite les qualités particulières des langues, tantôt « en rémunère le défaut », pour reprendre la formulation de Mallarmé dans *Crise de vers*[7], renchérit bien évidemment sur cette position. Si la forme iconique est déjà présente dans le langage pragmatique, comme le dit Peirce et le commente Jakobson dans cet article, c'est dans le langage littéraire qu'elle se trouvera exacerbée et magnifiée au point d'en devenir un trait définitoire, comme si le langage littéraire procédait à une stylisation quantitative et qualitative de l'iconicité du langage pragmatique et en faisait sa signature.

Regardons maintenant ce que nous permet d'ajouter à ces remarques le texte de Christiane Chauviré : « Perception visuelle et mathématiques chez Peirce et Wittgenstein » (2003). Pour commencer, ce texte situe la pensée de Peirce dans la continuité de la pensée kantienne, d'abord en établissant la filiation entre le schème kantien et le diagramme peircien, ensuite en montrant que Peirce après Kant considère que le raisonnement qui est coulé dans une forme schématique ou diagrammatique et qui est ainsi donné à « voir », placé sous « l'œil de l'esprit », atteint de cette manière plus efficacement l'entendement que celui qui est livré comme une concaténation de propositions abstraites. C'est donc toute une théorie de l'argumentation et de la conviction qui est proposée là, dont on pressent les avantages qui pourront être tirés pour le texte littéraire. Déjà, on ne s'étonne plus que Platon ait chassé le poète de la cité…

Par ailleurs, le texte de Chauviré présente le Peirce logicien qui se réfère aussi bien au langage verbal qu'au langage mathématique et ce que dit Peirce des deux langages est très instructif pour la compréhension de la composante diagrammatique du langage verbal commun et plus encore du langage artistique. Voici le commentaire de Christiane Chauviré :

> C'est au diagramme, modélisation, figure stylisée d'un état de choses imaginé par le mathématicien, qu'il revient d'expliquer la pensée mathématique dans son aspect fécond, aussi bien d'ailleurs que la création artistique. Nous avons là un cas de mentalisme élégant. La pensée mathématique consiste à tracer sous l'œil de l'esprit des figures qu'elle déforme et reforme, non certes au hasard, mais conformément à des règles et dans le but d'obtenir une

---

[7] « …mais sur l'heure, tourné à de l'esthétique, mon sens regrette que le discours défaille à exprimer les objets par des touches y répondant en coloris ou en allure, lesquelles existent dans l'instrument de la voix, parmi les langages et quelquefois chez un. À côté d'*ombre*, opaque, *ténèbres* se fonce peu ; quelle déception, devant la perversité conférant à *jour* comme à *nuit*, contradictoirement des timbres obscur ici, là, clair. Le souhait d'un terme de splendeur brillant, ou qu'il s'éteigne, inverse ; quant à des alternatives lumineuses splendides – *Seulement*, sachons, *n'existerait pas le vers* : lui, philosophiquement rémunère le défaut des langues, complètement supérieur. », « Crise de Vers », *Œuvres*, Paris, Gallimard, Bibliothèque de la Pléiade, 1945, pp. 363-4.

> configuration finale, un diagramme où se lira la conclusion nécessaire du raisonnement […]. Thèse remarquable : le diagramme n'est pas, comme la figure du géomètre, simple illustration, support concret d'un raisonnement se déroulant ailleurs, dans la pensée pure et abstraite : la formation et déformation de diagrammes est constitutive de la pensée mathématique qui s'y épuise tout entière, la pensée en général n'étant aux yeux de Peirce, comme plus tard à ceux de Wittgenstein, rien d'autre qu'une manipulation de signes (qui peuvent être des signes mentaux ou externes). […] La construction de diagrammes successifs, chacun apportant une modification […] au précédent permet de lire dans la configuration finale des propriétés inattendues ou des relations mathématiques insoupçonnées jusqu'alors. (p. 202-203)

Il paraît utile, à ce stade du raisonnement, d'introduire dans la discussion la réflexion qu'a présentée Gilles Châtelet sur la fonction des diagrammes en mathématiques dans *Les Enjeux du mobile*[8] et de la confronter à la pensée de Peirce telle que la décrit Christiane Chauviré. Peirce n'est pas la référence de base pour Châtelet. On ne trouve dans son livre qu'une citation des *Collected Papers* à propos d'un point mineur sur la relation indicielle entre deux particules (p. 258). Les auteurs qu'il invoque sont Oresme, Argand, Kant, Faraday, Grassman, Hamilton, Schelling et il semble désireux d'ancrer sa réflexion dans la pratique des mathématiques. Châtelet cherche manifestement à émanciper la philosophie des mathématiques de la tutelle de la logique et il considère avec beaucoup d'intérêt les remarques sur le diagramme que l'étude du peintre Francis Bacon a inspirées à Gilles Deleuze. Châtelet est prêt à troquer les théorèmes pour les diagrammes et il explique que la pensée mathématique s'élabore dans le geste même qui trace ces diagrammes, quand le corps et l'esprit coopèrent pour faire advenir le virtuel. Il n'aurait certainement pas nié le rôle que fait jouer Peirce à l'iconicité pour emporter la conviction du sujet (acteur et observateur), et aurait sans doute souscrit à la conclusion de Chauviré qui met l'accent sur l'opérativité du diagramme dans la pensée mathématique ; mais un seuil significatif est franchi par lui quand il défend l'idée que les diagrammes projettent le virtuel sur l'espace qu'ils sont en train de cartographier. Comme le dit Kenneth Knoespel dans son article « Diagrammes, matérialités et cognition »[9] : « La grande force de Châtelet est non seulement d'avoir écrit un livre fertile en intuitions, mais d'avoir "retrouvé l'opérativité" et par là d'avoir rendu possible la transition cruciale qui, des diagrammes, permet de passer à la diagrammatique ». C'est dans le cadre de cette évolution critique du diagramme à la diagrammatique pour capter le virtuel que j'inscris personnellement mon utilisation du concept pour aborder l'étude des textes littéraires.

---

[8] Gilles Châtelet, *Les Enjeux du mobile : Mathématiques, physique, philosophie*, Paris, Le Seuil, 1993.

[9] In *TLE* 22, « Penser par le diagramme ».

Chez Peirce comme chez Wittgenstein, le mathématicien et l'écrivain ne sont pas là pour mettre en évidence des choses qui existent déjà, mais pour inventer, former et exhiber. Les suites de symboles algébriques sont des diagrammes au même titre que les figures géométriques. Algèbre et géométrie ne s'opposent pas l'une à l'autre, elles s'opposent, tout comme la poésie, à la philosophie réduite à convaincre par le raisonnement abstrait et par la preuve uniquement discursive. Alain Badiou, s'interrogeant sur le bannissement du poète de la cité par Platon au livre X de *La République*, développe la nature de ce qui sépare poésie et philosophie, pour conclure à la nécessaire et salutaire rivalité des deux disciplines[10]. C'est que la philosophie est obligée de se soumettre à la discursivité, d'aligner les propositions et d'argumenter en construisant un raisonnement abstrait, alors que la poésie peut poser sous les yeux du lecteur le rapport sensible des configurations de toutes natures qu'elle a élaborées, les offrant ainsi à un entendement immédiat. Sémiotiquement, les icônes ont une affinité avec les formes. C'est pourquoi Peirce développera des systèmes logiques faits de graphes (*graphs*), défendra sa conception d'une logique iconique opposée à la logique de Frege.

Compte tenu de ce que l'on a déjà lu sous sa plume, on ne sera pas surpris d'apprendre que, sensible aux mathématiques comme « art du tracé », et comme « art de la synthèse », Peirce n'avait pas manqué d'établir lui-même un pont entre les sciences mathématiques et les arts :

> Le travail du poète ou du romancier n'est pas tellement différent de celui de l'homme de science. L'artiste introduit une fiction, mais ce n'est pas une fiction arbitraire, elle exhibe des affinités que l'esprit approuve en déclarant qu'elles sont belles, ce qui sans être exactement la même chose que de dire que la synthèse est vraie, relève de la même espèce générale. Le géomètre trace un diagramme qui est sinon exactement une fiction du moins une création, et l'observation de ce diagramme le rend capable de synthétiser et de montrer des relations entre des éléments qui semblaient n'avoir auparavant aucune connexion nécessaire entre eux » (*Collected Papers*, I, p. 383).

3. Un effet cognitif et esthétique

Nous en arrivons donc au troisième trait du texte littéraire que je voudrais mettre en valeur ici : l'effet cognitif et esthétique, qui résulte précisément du fait de « synthétiser et montrer des relations entre des éléments qui semblaient n'avoir auparavant aucune connexion nécessaire entre eux » comme l'écrivait Peirce dans le passage cité précédemment, ou, pour le dire dans une formulation de Deleuze et Guattari dans *Qu'est-ce que la philosophie* : qui est produit par la sensation qui se forme dans le plan de composition esthétique « en contractant ce qui la compose et en se composant avec d'autres sensations qu'elle contracte à son tour » (p. 199).

[10] Alain Badiou, « Que pense le poème ? », *L'Art est-il une connaissance* ?, Paris, Editions Le Monde, 1993.

Analyser l'effet esthétique revient donc à analyser l'effet, sur le sujet lecteur, de ces « affinités », de cette « synthèse » (Peirce), ou de cette « contraction » (Deleuze) consécutives à la soudaine aimantation (intégration) des différents agencements effectués par l'auteur aux différents niveaux de l'œuvre. Indéniablement, cette synthèse ou contraction donne du plaisir, le plaisir de la compréhension globale que produit la conjonction de plusieurs enchaînements de phénomènes locaux dessinés à la surface du texte et comme tels, reçus par les sens autant que compris par l'esprit.

Mais la synthèse, au moment où elle se produit, est éminemment dépendante de la qualité des enchaînements, des parcours qu'elle synthétise, lesquels parcours ont également un caractère iconique et de ce fait, ne peuvent s'annuler dans le résultat qu'ils produisent. Au contraire, la synthèse est à peine réalisée et saisie par l'esprit, qu'elle réenclenche une demande du parcours comme l'indique Paul Valéry quand il développe, dans « Poésie et Pensée abstraite », la métaphore bien connue du pendule qui oscille perpétuellement entre le son et le sens :

> Pensez à un pendule qui oscille entre deux points symétriques. Supposez que l'une de ces positions extrêmes représente la forme, les caractères sensibles du langage, le son, le rythme, les accents, le timbre, le mouvement – en un mot, la *Voix* en action. Associez, d'autre part, à l'autre point, au point conjugué du premier, toutes les valeurs significatives, les images, les idées ; les excitations du sentiment et de la mémoire, les impulsions virtuelles et les formations de compréhension – en un mot tout ce qui constitue le *fond*, le sens d'un discours. Observez alors les effets de la poésie en vous-mêmes. Vous trouverez qu'à chaque vers, la signification qui se produit en vous, loin de détruire la forme musicale qui vous a été communiquée, redemande cette forme. Le pendule vivant qui est descendu du *son* vers le *sens* tend à remonter vers son point de départ sensible, comme si le sens même qui se propose à votre esprit ne trouvait d'autre issue, d'autre expression, d'autre réponse que cette musique même qui lui a donné naissance (*Œuvres*, I, pp. 1331-32).

Récapitulons. L'analyse des niveaux infra-sémantiques du texte littéraire permet un repérage des « saillances perceptives » dues à la « non généricité morphologique »[11] ou encore des « bruits » systémiques[12] sur les plans morpho-phonétique, morpho-graphique, morpho-syntaxique ou prosodique. L'analyse des plans sémantique et thématique va, pour sa part, mettre en valeur la création de rapports logiques internes à ces plans. Il reste alors à faire travailler les différents plans les uns avec les autres, à mettre en correspondance ce qui s'y produit, à observer les effets des couplages réalisés.

[11] Cf. Jean Petitot, *Morphologie et Esthétique*, Maisonneuve & Larose, 2004, p. 57 et p. 82.

[12] Cf. la théorie de l'information réinterprétée pour la littérature par Iouri Lotman, *La Structure du texte artistique*, Paris, Gallimard, 1973.

Ce sera, par exemple, dans un très court poème de Emily Dickinson[13], la répétition de plosives à l'initiale des substantifs du premier et du deuxième vers, opposée à l'occurrence unique d'une fricative à l'initiale du seul substantif du troisième vers qui sera associée à l'opposition entre des éléments végétaux et animaux de la nature d'une part et l'imagination humaine d'autre part[14] ; dans un sonnet de Shakespeare[15], des spondées et des trochées interrompant erratiquement le rythme familier du pentamètre iambique s'avèreront localisés dans des mots désignant littéralement ou métaphoriquement la mort ; ou encore dans un poème de Hopkins[16] une opposition entre la répétition dans trois voyelles consécutives du trait distinctif de la tension et dans les trois suivantes, du trait distinctif du relâchement correspondra à une opposition entre deux types de formes (la ligne et le cercle) ainsi qu'entre deux types de mouvements (le jaillissement et l'éclosion) exemplifiant l'éclatement du printemps.

---

[13] To make a prairie it takes a clover and one bee –
One clover and a bee,
And revery.
The revery alone will do
If bees are few.
(Emily Dickinson, *The Complete Poems*; ce poème date de 1755)

[14] Pour une analyse complète du poème, cf. Noëlle Batt, « Du signe linguistique au signe littéraire : lire le complexe », dans *Du corps présent au sujet énonçant,* textes réunis par M. Costantini et I. Darrault-Harris en hommage à Jean-Claude Coquet, Paris, L'Harmattan, 1996.

[15] That time of year thou mayst in me behold
When yellow leaves, or none, or few, do hang
Upon those boughs which shake against the cold,
Bare ruined choirs, where late the sweet birds sang.
In me thou see'st the twilight of such day
As after sunset fadeth in the west,
Which by and by black night doth take away,
Death's second self, that seals up all in rest.
In me thou see'st the glowing of such fire
That on the ashes of his youth doth lie,
As the death-bed whereon it must expire,
Consumed with that which it was nourished by.
Thus thou perceiv'st, which makes thy love more strong,
To love that well which thou must leave ere long.
(William Shakespeare, sonnet LXXIII)

[16] Nothing is so beautiful as Spring –
When weeds, in wheels, shoot long and lovely and lush ;
Thrush's eggs look little low heavens, and thrush
Through the echoing timber does so rinse and wring
The ear, it strikes like lightnings to hear him sing ;
The glassy peartree leaves and blooms, they brush
The descending blue ; that blue is all in a rush
With richness ; the racing lambs too have fair their fling.
(Gerald Manley Hopkins, « Spring », 1877)

Il s'agit donc à chaque fois de déterminer quelles opérations de placement ou de substitution dans l'espace-temps du texte (addition, juxtaposition, répétition, transformation, substitution totale ou partielle, suppression) induisent quelles opérations logiques (ressemblance ou analogie, opposition, coexistence paradoxale, co-oppositions…) entre des affects, des percepts, et des blocs de sensation créés par le texte artistique, et comment celles-ci déstabilisent les relations logiques qui règlent affections, perceptions, opinions et idéologies du monde social. C'est en opérant sur le plan de composition esthétique ce décalage, ce « décadrage », dit Deleuze, que l'art exerce sa fonction critique souvent radicale. Pour saisir ce décadrage, il faut définir l'orientation, la vectorisation du parcours dynamique des couplages notés plus haut, en sachant que le parcours a toutes les chances d'être irrégulier, instable et paradoxal.

Au terme de cette réflexion, je voudrais ajouter un *afterthought*, une *coda* introduite par Christiane Chauviré. Alors que Peirce semble valoriser sans réserve l'iconicité, attribuant à la ressemblance un pouvoir de conviction intrinsèque, Wittgenstein, pour sa part, avance une réserve et défend l'idée que la ressemblance ne convainc que parce que anthropologiquement l'homme a décidé de se laisser convaincre par elle. La force de l'iconicité ne serait donc pas à attribuer à un caractère logé dans les choses, mais à l'*anthropos* qui donne son assentiment au fait qu'il peut y avoir là une force agissante et accepte de s'y soumettre. La nuance mérite, je crois, d'être méditée, et la modalité du croire soigneusement réévaluée.

Il me reste encore une précision à apporter. Le lecteur n'a sans doute pas été sans remarquer que lorsque j'ai commencé à parler de l'effet cognitif et esthétique, j'ai changé de point de vue, troquant celui du créateur pour celui du récepteur. Car la pensée diagrammatique du texte littéraire est toujours une pensée portée par des diagrammes intermédiaires qui restent virtuels tant qu'une lecture particulière ne les a pas actualisés, et qui restent isolés tant qu'un lecteur particulier ne les a pas synthétisés en un diagramme final orienté qui pose les multiples enjeux du texte, ceux qui ont consciemment ou inconsciemment décidé de sa mise en chantier.

Comment se fait l'actualisation des diagrammes ? À supposer que les différents lecteurs se mettent d'accord sur les mêmes saillances (ce qui n'est pas certain), ils peuvent différer quant au parcours syntagmatique qui relie les saillances d'un même niveau, quant au couplage des saillances infra-sémantiques et des rapports logiques sémantiques ou thématiques, quant à la coopération des diagrammes intermédiaires obtenus, quant à la vectorisation de leur synthèse finale. Et c'est ainsi que le conflit des interprétations se poursuit depuis des siècles et des siècles, entretenu dans l'intérêt de la littérature par la polysémie de la langue et le polysystémisme du langage littéraire.

Quel est le sens anthropologique de tout cela ? On se risquera à avancer une hypothèse. Etant donné la proximité entre les opérations qui permettent d'actualiser et de synthétiser les différents diagrammes et les mécanismes neuronaux qui accompagnent l'émergence de la conscience primaire et plus encore la conscience supérieure – lesquels sont de mieux en mieux connus grâce aux travaux des neurobiogistes et neurophysiologistes qui travaillent à les expliciter (G. Edelman aux Etats-Unis, J-P. Changeux et S. Dehaene en France, Singer en Allemagne)[17] –, une hypothèse serait que l'art soit ce lieu que l'anthropos s'est inventé, en marge des discours sociaux, pour y tester, en l'exerçant librement, cette faculté d'élaborer des dispositifs iconiques intégratifs qui maintient fécondes sa créativité et sa faculté d'innovation, toutes qualités indispensables à la survie de l'espèce.

Mais en l'état actuel des connaissances et compte tenu de la complexité des interactions des différents plans qui composent le texte littéraire, nous serions bien en peine de proposer, pour les processus dynamiques à l'œuvre dans la diagrammatisation de ce type de texte, une représentation visuelle satisfaisante. On peut toutefois imaginer que dans un futur proche, un réseau connexionniste de neurones formels, produit de la recherche actuelle sur les systèmes de modélisation, permettra de s'en approcher.

[17] Noëlle Batt, « A Comparative Epistemology for Literary Theory and Neurosciences », in *Science and American Literature in the XXth and XXIst centuries*, Cambridge Scholars Publishing, 2012.

Generazione e visualizzazione delle forme nello spazio : proprietà topologiche e percezione di superfici geometriche

Luciano BOI
Ecole des Hautes en Sciences Sociales,
Centre de Mathématiques, Paris

> The knot or link as an embedding in three-dimensional space is a whole topological form, and it has long been the aim of topology to treat this form all at once.
>
> L. H. Kauffman, *Knots and Physics*, 1992.

> I believe there is a similarity between the concept of learning and the concept of land as something to be inherited from those who come before us: something that can be handed down from generation to generation as a precious and irreplaceable object; I think we have lost sight of a very important philosophy that education is an invaluable gift.
>
> Koji Shiga, *A Mathematical Gift*, 1995.

Résumé. Dans cet article, nous étudions quelques aspects de la visualisation topologique en tant que méthode pour appréhender des propriétés mathématiques et phénoménologiques de l'espace ambiant, dans lequel se constituent nos perceptions et se construit notre rapport au monde. Nous montrons que des opérations apparemment « élémentaires » comme *couper* et *coller* peuvent être composées de sorte à donner lieu à des constructions plus complexes, telles que *somme connexe* et *surface à bord*, faisant apparaître de nouvelles propriétés. Celles-ci sont de deux types : *objectal* et *holiste* ; alors que les premières sont relatives à la *structure in se* d'un objet géométrique (surface, variété), les secondes concernent surtout *les relations* entre ce même objet et l'espace dans lequel il est plongé ou immergé. Le premier type de propriétés est mis en évidence par la classe des déformations (ou transformations) appelée *homéomorphismes*, tandis que le second type de propriétés apparaît clairement grâce à la classe des *isotopies*. Le point essentiel est que topologiquement deux objets peuvent avoir la même « forme » même si leurs images graphiques nous apparaissent très différentes. Ce qui montre que l'équivalence des formes a un sens topologique beaucoup plus important que l'équivalence entre images. En effet, deux objets peuvent nous apparaître très différents quant à leur présentation graphique et

pourtant appartenir à la même famille de formes. Prenons le cas de deux objets dont l'un est noué et l'autre ne l'est pas, alors qu'ils ont une apparence très similaire. Le fait d'être noué ou dénoué est ainsi une propriété de nature topologique qui concerne moins les objets *in se*, que l'espace tridimensionnel dans lequel ils sont *plongés*. Etudier les objets et leurs environnements spatiaux revient à essayer de comprendre les dynamiques de transformation et l'émergence de nouvelles propriétés et qualités de ces mêmes objets.

1. Omeomorfismi e isotopie di nodi, manici e buchi

Il concetto di *omeomorfismo* è alla base dell'intera topologia e in particolare della topologia algebrica e differenziale. Esso permette di definire in termini profondi quando due superfici, spazi o varietà sono topologicamente equivalenti, cioè trasformabili l'una nell'altra tramite una famiglia di deformazioni continue senza strappi e rotture. Si può così mostrare, ad esempio, che (a) la sfera con un manico è omeomorfa al toro con un buco ; (b) il toro con due buchi è omeomorfa alla sfera con due manici ; (c) il toro con un buco e un disco è omeomorfa alla sfera con un manico e un disco.
L'idea intuitiva di deformazione/trasformazione continua, sui cui si fonda la topologia, è ben radicata nelle nostre strutture mentali, più del concetto di isometria o similitudine, perché legata alla percezione della nostra identità e integrità corporea in continua evoluzione. Purtroppo però non è possibile trattare le trasformazioni continue dal punto di vista matematico in modo altrettanto elementare (non bastano le trasformazioni lineari).

Nello spirito di Klein e Poincaré, fare della topologia in R^n significa studiare questo spazio e i suoi sottospazi a meno del gruppo delle *trasformazioni topologiche* (o *omeomorfismi*), cioè delle applicazioni biunivoche $g : R^n \to R^n$ tali che g e g^{-1} sono continue. In particolare, consideriamo i seguenti sottospazi del piano/spazio euclideo : la circonferenza $S^1 = \{x \in R^2 \mid \|x\| = 1\} \subset R^2$, la sfera $S^2 = \{x \in R^3 \mid \|x\| = 1\} \subset R^3$ e il toro $T = S^1 \subset R^2 \times R^2 \cong R^4$. La sfera e il toro sono superfici (connesse e compatte) e possono essere entrambe pensate come ampliamenti (compattificazioni) del piano euclideo con l'aggiunta di "punti all'infinito". Per questo è spesso interessante adottare la sfera e il toro come ambienti di lavoro alternativi al piano. La sfera si può ottenere dal piano euclideo con l'aggiunta di un solo punto all'infinito, cioè $S^2 \cong \widehat{R^2} = R^2 \cup \{\infty\}$ (compattificazione di Alexandroff). Ponendo $\infty = (0,0,1) \in S^2$ (polo nord della sfera), la *proiezione stereografica* $\varphi : S^2 - \{\infty\} \to R^2$ da ∞ su $R^2 \subset R^3$ dà un'equivalenza topologica $S^2 - \{\infty\} \cong R^2$. Poiché tutti i punti della sfera sono equivalenti a meno di rotazioni, un'analoga equivalenza topologica $S^2 - \{p\} \cong R^2$ si ha per ogni punto $p \in S^2$.
Il toro è costruito nello spazio euclideo quadridimensionale, ma può in effetti essere anche realizzato come superficie di rotazione nello spazio tridimensionale, e quindi pensato come sottospazio di R^3. Questa rappresentazione consente anche di visualizzare T come ampliamento di R^2 : possiamo pensare come insieme di punti all'infinito l'unione del meridiano e del parallelo tracciati nella figura di un toro di rotazione in R^3. La superficie

ottenuta ruotando il meridiano $M \subset R^3$ (di equazioni $x^2 + z^2 + 4x + 3 = 0$ e $y = 0$) intorno all'asse z è topologicamente equivalente al toro T. Inoltre, se P è il parallelo (di equazioni $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 1$), allora $T \backslash (M \cup P)$ è topologicamente equivalente a un quadrato (aperto) nel piano euclideo, quindi si ha $T \backslash (M \cup P) \cong R^2$.

1.1. Trasformazioni topologiche e deformazioni continue : isotopie ambientali

Abbiamo già accennato al nesso profondo che esiste tra le trasformazioni topologiche dello spazio e l'idea intuitiva di "deformazione continua". Tale nesso può essere chiarito in termini formali tramite la nozione di *isotopia*.

Definizione 1. *Due applicazioni continue*, $f, g : X \to Y$ *tra spazi topologici sono omotope se esiste una famiglia di applicazioni* $h_t : X \to Y$ *che dipendono in modo continuo dal parametro* $t \in [0, 1]$, *tale che* $h_0 = f$ *e* $h_1 = g$. *Più precisamente si richiede che sia continua l'applicazione* $H : X \times [0, 1] \to Y$ *definita da* $H(x, t) = h_t(x)$ *per ogni* $(x, t) \in X \times [0, 1]$. *$H$ è detta omotopia tra f e g.*

Definizione 2. *Due trasformazioni topologiche* (*cioè omeomorfismi*) $f, g : S \to S$ *di uno spazio topologico S sono isotope se esiste un'omotopia H fra f e g come nella definizione precedente*, *tale che* $h : S \to S$ *è una trasformazione topologica per ogni* $t \in [0, 1]$. *In tal caso H è detta isotopia fra f e g. Inoltre, se f è l'identità di S, allora diciamo che* $g : S \to S$ *è realizzabile mediante isotopia*.

Se in quest'ultima definizione si interpreta t come parametro temporale, si può dire che le trasformazioni topologiche realizzabili mediante isotopia sono quelle che si possono ottenere con deformazioni continue dello spazio S.

1.2. Equivalenze topologiche

Il concetto di *omeomorfismo* è essenziale per capire il problema delle *equivalenze topologiche* tra spazi. Formalmente, diremmo che due spazi topologici X e Y sono topologicamente equivalenti (omeomorfi) se esiste un omeomorfismo $h : X \to Y$, cioè un'applicazione biunivoca tale che h e h^{-1} sono entrambe continue. In tal caso scriviamo $X \cong Y$ e gli spazi X e Y hanno le stesse proprietà topologiche. Per esempio X e Y hanno lo stesso numero di *componenti connesse* (cioè, in termini intuitivi, sono costituiti dallo stesso numero di "pezzi").

Definizione 3. *Sia S uno spazio topologico e siano* $X, Y \subset S$ *due sottoinsiemi* ("*oggetti*" *in S*). *Allora diciamo che X e Y sono topologicamente equivalenti in S e scriviamo* $X \cong_S Y$, *se esiste una trasformazione topologica* $g : S \to S$ *tale che* $g(X) = Y$. *Inoltre, diciamo che X e Y sono isotopicamente equivalenti in S* (*o isotopi in S*) *e scriviamo* $X \equiv_S Y$, *se g è realizzabile mediante isotopia.*

Ad esempio, il quadrato $Q = [-1, 1]^2 \subset R^2$ e il disco unitario $D = \{x \in R^2 \mid \|x\| \leq 1\} \subset R^2$ sono isotopicamente equivalenti in R^2; abbiamo così, mediante una serie di deformazioni continue, un'equivalenza isotopica $Q \equiv_{R^2} D$. È facile verificare che $\cong_S$ e $\equiv_S$ sono relazioni di equivalenza tra sottoinsiemi di S

(ciò equivale a dire che le trasformazioni che le definiscono formano dei gruppi). Inoltre, vale ovviamente l'implicazione $X \equiv_S Y \Rightarrow X \cong_S Y$ per ogni X, $Y \subset S$, mentre non vale l'implicazione inversa.
D'altra parte, se X e Y si pensano come spazi topologici con la topologia indotta da S, allora vale anche l'implicazione $X \cong_S Y \Rightarrow X \cong Y$, mentre non vale l'implicazione inversa. In particolare, se X e Y sono topologicamente equivalenti in S, allora devono avere lo stesso numero di componenti connesse, così come i loro complementari $S \setminus X$ e $S \setminus Y$ (infatti si ha anche $S \setminus X \cong_S S \setminus Y$).

1.3. Superfici, bordi e anse

Entriamo adesso nel mondo infinito e ancora in gran parte misterioso delle superfici, e cerchiamo di rivolgere il nostro guardo al loro interno, cioè al mondo, anzi ai mondi che esse possono racchiudere; lo sguardo non deve essere di quelli (fondati sul mero senso della vista) che cercano una conferma ai nostri schemi e pensieri, ma bensì un'esplorazione che ci mette sulle tracce del nuovo e dell'inatteso, e che, in quanto tale, può suscitare la nostra più profonda meraviglia. Naturalmente, per poter penetrare una superficie e coglierne le sue trasformazioni interne dobbiamo "vederla" non come semplice oggetto inerte e amorfo, ma piuttosto come un mondo stratificato spazialmente e sedimentato nel (e dal) tempo, che può inoltre cambiare di aspetto e di forma sotto l'effetto di fenomeni, eventi, situazioni accidentali e condizioni necessarie in quello che (seguendo René Thom[1]) si potrebbe chiamare un flusso continuo e discontinuo di azioni e retroazioni fra pregnanze e salienze. Sono le diverse combinazioni e configurazioni di questo flusso che nel corso dell'esperienza, dell'osservazione e dell'introspezione incontrano il mondo della nostra percezione e cognizione. Si costituisce così, a partire da questo nuovo materiale composito che rappresenta un nuovo livello di realtà, il mondo delle tessiture (altrettanti motivi ed eventi emergenti nelle cose), delle qualità sensibili e delle forme estetiche. Qui non parleremmo di questi aspetti importanti[2], ma solo di alcune proprietà matematiche salienti delle superfici.
Una *superficie topologica* è uno spazio topologico X localmente equivalente al piano euclideo, cioè intorno ad ogni suo punto X ammette un sistema di coordinate costituito da due parametri reali. X è *orientabile* se è possibile scegliere questi sistemi di coordinate locali orientati coerentemente ; ciò equivale a dire che X non contiene nessun ciclo che inverte l'orientazione, o in altre parole X non contiene nessun *nastro di Möbius*.
Il *genere* $g(X)$ di una superficie orientabile connessa X è definito come il massimo numero m per cui esistono $C_1, \dots, C_m \subset X$ curve chiuse semplici (cioè omeomorfe a S^1) tali che $X \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_m)$ è ancora connesso. Si dimostra che tale massimo esiste (finito) se X è compatta. Ragionando per

---

[1] Cfr. R. Thom, *Esquisse d'une Sémiophysique*, InterEditions, Parigi, 1988.
[2] Si veda L. Boi, *Morphologie de l'Invisible*, Presses Universitaires de Limoges, Limoges, 2011.

induzione su $g \geq 0$, si dimostra che la superficie T_g rappresentata in figura 1 è una *superficie orientabile di genere g*. Per $g = 0$ ciò segue dal teorema di Jordan in quanto $T_0 = S^2$; per $g = 1$ si ha $T_1 = T$.

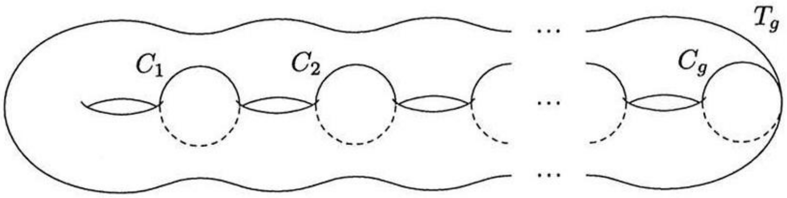


Figura 1. Superficie orientabile di genere *g*.

D'altra parte, il genere è un invariante topologico (superfici omeomorfe hanno lo stesso genere) che consente di classificare completamente le superfici orientabili connesse e compatte. Infatti vale il seguente teorema.
Teorema 1. *Due superfici topologiche orientabili connesse e compatte sono omeomorfe se e solo se hanno lo stesso genere. In particolare, per ogni superficie topologica orientabile connessa e compatta X si ha* $X \cong T_g$ con $g = g(X)$.
Nel seguito considereremmo *superfici topologiche con bordo*, cioè porzioni chiuse di superfici delimitate da curve topologiche che ne costituiscono il bordo. Per una superficie topologica orientabile connessa X con bordo definiamo il genere $g(X)$ come sopra, vincolando le curve C_i a non incontrare il bordo, e denotiamo con $b(X)$ il numero delle componenti connesse del bordo ($b(X) = 0$ nel caso in cui X sia senza bordo, cioè il caso trattato sopra). Se X è compatta $g(X)$ e $b(X)$ sono entrambi finiti e tutte le componenti connesse del bordo sono omeomorfe a S^1. Per ogni g, $b \geq 0$, la superficie $T_{g,b}$ che si ottiene togliendo b dischi aperti da T_g è una superficie orientabile connessa compatta di genere g con b componenti di bordo. Il teorema 1 si può estendere alle superfici con bordi come segue.
Teorema 2. *Due superfici topologiche orientabili connesse e compatte con bordo sono omeomorfe se e solo se hanno lo stesso genere e lo stesso numero di componenti di bordo. In particolare, per ogni superficie topologica orientabile connessa e compatta X con bordo si ha* $X \cong T_{g,b}$ *con* $g = g(X)$ *e* $b = b(X)$.
Ogni superficie topologica orientabile connessa e compatta X con bordo non vuoto, si può ottenere incollando $2g(X) + b(X) - 1$ bande (o anse) al bordo di un disco (fig. 2).

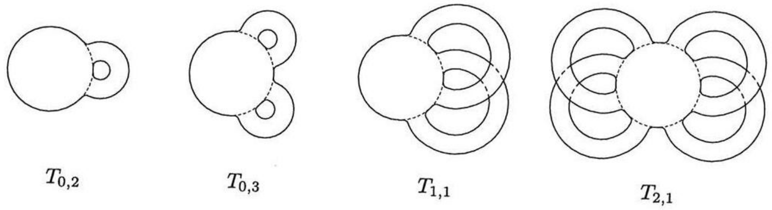


Figura 2. Superfici orientabili con bordo ottenute incollando bande (anse) a un disco.

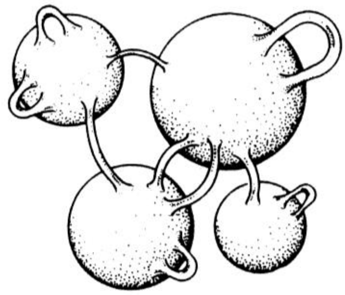


Figura 2.1. Le anse diventano dei cunicoli che possono collegare diversi universi tra di loro.

Ogni superficie topologica compatta X con bordo (eventualmente vuoto) ammette una *poligonazione*, cioè una decomposizione $X = P_1 \cup \ldots \cup P_n$ come unione di *poligoni topologici* (copie omeomorfe di poligoni euclidei), con la proprietà che due poligoni possono incontrarsi solo in vertici e/o lati comuni. Per esempio, le superfici che delimitano i poligoni platonici inscritti in $S^2 \subset R^3$ sono topologicamente equivalenti a S^2 (mediante proiezione dal centro) e inducono poligonazioni di S^2.

Teorema 3. *Sia X una superficie topologica compatta con bordo (eventualmente vuoto). Se P è une poligonazione di X, denotiamo con v(P), s(P) e p(P) rispettivamente il numero di vertici, degli spigoli e dei poligoni di P. Il numero intero* $\chi(X) = v(P) - s(P) + p(P)$ *è un invariante topologico di X, la caratteristica di Eulero di X, che non dipende dalla particolare poligonazione P.*

La dimostrazione di questo teorema si basa sul fatto che, a meno di omeomorfismi, due poligonazioni di X possiedono una suddivisione comune in poligoni più piccoli. Allora, l'indipendenza di $\chi(X)$ da P si riduce sostanzialmente al caso delle triangolazioni lineari di poligoni euclidei. Se X è un poligono euclideo e P è una sua *triangolazione* lineare (cioè, poligonazione in triangoli euclidei), allora si ha $v(P) - s(P) + p(P) = 1$. Alla luce del teorema 3 è facile verificare la relazione tra $\chi(X)$, $g(X)$ e $b(X)$ data da quanto segue. Questo mostra che due qualunque di tali invarianti topologici bastano a classificare le superfici orientabili connesse e compatte con bordo. Infatti, per ogni X superficie topologica orientabile, connessa e compatta, con bordo (eventualmente vuoto), si ha : $\chi(X) = 2 - 2g(X) - b(X)$.

2. Somme connesse di spazi 3-dimensionali e di nodi

Un altro concetto fondamentale della topologia è quello di *somma connessa* di due varietà (siano esse superfici o spazi a tre o più dimensioni). Questo concetto ha un ruolo particolarmente importante nella teoria topologica dei nodi. Infatti, molti nodi si possono ottenere come somma connessa di due nodi più semplici. Per esempio, il nodo composto in figura 3 si ottiene come somma connessa del nodo a trifoglio (a sinistra) e il nodo a otto (a destra). Questo nodo non è *primo*. (Un nodo è *primo* se non è ottenibile come somma connessa di due nodi distinti). Esiste una semplice operazione che permette di "unire" due nodi per costruirne un terzo : questa operazione di chiama *somma connessa*.

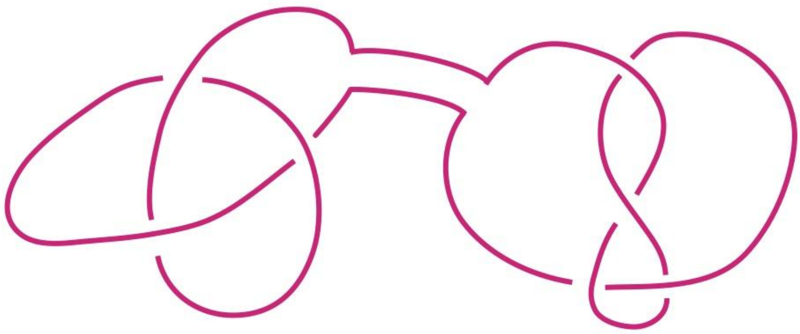


Figura 3. Somma connessa di nodi.

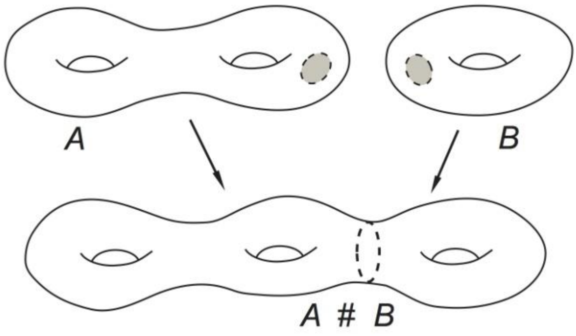


Figura 3.1. Somma connessa di superfici.

Esiste un importante teorema, enunciato e dimostrato dal matematico tedesco Horst Schubert nel 1949, il quale asserisce che ogni nodo si ottiene in modo unico come somma connessa di una successione di nodi elementari denominati, similarmente alla nomenclatura dei numeri, *nodi primi*. Il teorema è in effetti l'analogo del teorema fondamentale dell'aritmetica nel contesto dei nodi, dove l'operazione di moltiplicazione è sostituita con la somma connessa fra nodi. La somma connessa fra nodi è un'operazione che presenta alcune analogie con la somma connessa fra varietà. Come per le varietà, questa operazione non dipende dal tipo di diagramma scelto per rappresentare i nodi, né dal "nastro" scelto su cui operare la somma connessa. La somma connessa di due nodi K e H si indica con $K \# H$. L'operazione di somma connessa è commutativa e associativa. Il nodo banale O è l'elemento neutro dell'operazione, ovvero $O \# K = K \# O = K$ per ogni altro nodo K. Come per le 2- e 3-varietà, esiste un *Teorema di fattorizzazione* in nodi primi (vedasi sopra per l'enunciato).

Ricordiamo brevemente la definizione di somma connessa per varietà differenziabili. Cominciamo dalle superfici (varietà a due dimensioni). Per ottenere la somma connessa di due superfici si rimuovono le parti interne di due dischi, e si incollano le due circonferenze rimanenti. Il risultato di questa operazione è una nuova figura (si veda la figura 3.1). Passiamo ora alla definizione formale più generale. Siano M e N due varietà topologiche della stessa dimensione n. Siano B_M e B_N due aperti rispettivamente in M e N, le cui chiusure sono entrambe omeomorfe al disco chiuso n-dimensionale $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$. Quindi B_M e B_N sono entrambe omeomorfe alla palla aperta $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ ed il bordo è omeomorfo alla sfera $(n–1)$-dimensionale $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$. Sia quindi ψ un fissato omeomorfismo $\psi : \partial B_N \to \partial B_M$. La somma connessa di M e N è quindi definita come lo spazio che si ottiene rimuovendo le due palle aperte da M e N ed incollando successivamente i nuovi bordi sferici tramite la mappa (funzione) ψ. Questo spazio viene indicato con $M \# N$ ed è anch'esso una varietà n-dimensionale. Formalmente : $M \# N = (M \setminus B_M) \cup (N \setminus B_N)/\sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica ogni x in ∂B_M con l'immagine $\psi(x)$ in B_N. La varietà ottenuta $M \# N$ dipende dalla scelta degli aperti B_M, B_N e dall'omeomorfismo ψ. Se però le varietà M, N sono differenziabili, e ogni omeomorfismo nella definizione è in verità un diffeomorfismo, la scelta degli aperti non influisce sul risultato. D'altro canto, se l'omeomorfismo ψ è sostituito con un altro omeomorfismo ψ' omotopo a ψ il risultato non cambia. A meno di omotopia, vi sono solo due omeomorfismi di S^{n-1} in sé : quello che mantiene l'orientazione della sfera e quello che la inverte. Quindi ci sono due possibili risultati. Di conseguenza, se le varietà sono differenziabili la somma connessa $M \# N$ dipende soltanto dall'orientazione della mappa d'incollamento ψ. In dimensioni 2 e 3, una varietà differenziabile M è *prima* se non è ottenibile come somma connessa $M = N \# N'$, dove entrambi i fattori N e N' sono diversi dalla sfera a n dimensioni S^n.

La classificazione delle superfici e il teorema di Kneser-Milnor sostengono rispettivamente che ogni 2- o 3-varietà M orientabile compatta è ottenibile in modo unico come prodotto di varietà prime : $M = N_1 \# N_2 \# \dots. \# M_k$. In dimensione 2, le varietà prime orientabili e compatte sono la sfera ed il toro. In dimensione 3, le 3-varietà prime sono infinite e non sono ancora state classificate in modo soddisfacente. Non esiste un teorema analogo per le varietà di dimensione 4 o superiore.
In altri termini, il teorema di Kneser-Milnor asserisce che ogni 3-varietà compatta orientabile M diversa dalla sfera S^3 può essere ottenuta come somma connessa di 3-varietà prime $N_1, \dots, N_k$ diverse da S^3 : $M = N_1 \# \dots \# N_k$. Le k varietà prime N_i sono inoltre univocamente determinate da M. L'enunciato ha la stessa forma del teorema fondamentale dell'aritmetica. La sfera S^3 gioca il ruolo del numero 1 per gli interi, cioè dell'elemento neutro rispetto all'operazione di somma connessa.

2.1. Spazi irriducibili e spazi riducibili

Le 3-varietà non ottenibili mediante il procedimento menzionato sopra sono dette *irriducibili* ; in altri termini, si può mostrare che una varietà irriducibile M è effettivamente prima. Esse sono studiate dalla topologia della dimensione bassa. Una *3-varietà irriducibile* è una 3-varietà in cui ogni sfera borda una palla. Più rigorosamente, una 3-varietà differenziabile connessa M è irriducibile se ogni sottovarietà differenziabile S omeomorfa ad una sfera è bordo $S = \partial D$ di un sottoinsieme D omeomorfo alla palla chiusa : $D^3 = \{x \in R^3 \mid |x| \leq 1\}$. L'ipotesi di differenziabilità per M non è importante, perché ogni 3-varietà topologica ha un'unica struttura differenziabile. L'ipotesi che la sfera sia *liscia* (cioè che sia una sottovarietà differenziabile) è invece importante : la sfera deve avere infatti un intorno tubolare. Una 3-varietà che contiene una sfera non bordante una palla è invece detta *riducibile* : questa può essere effettivamente "ridotta" ad una varietà più semplice tramite l'operazione inversa della somma connessa. Una 3-varietà è *prima* se non è ottenuta come somma connessa non banale di due varietà. I concetti di *irriducibile* e *prima* sono equivalenti per tutte le 3-varietà, con due sole eccezioni : il prodotto $S^2 \times S^1$ ed il fibrato non orientabile di sfere su S^1 sono entrambe prime ma non irriducibili. Una 3-varietà connessa M è *prima* se non è ottenibile come somma connessa $M = N_1 \# N_2$ di due varietà entrambe distinte da S^3 (o, analogamente, entrambe distinte da M).

Diamo alcuni esempi di *spazi irriducibili* e di *spazi riducibili*. Lo spazio euclideo tridimensionale R^3 è irriducibile : ogni sfera liscia nello spazio borda effettivamente una palla. D'altra parte, la sfera di Alexander (detta anche *sfera cornuta*) è una sfera in R^3 non liscia, che non borda una palla : l'ipotesi sulla "liscezza" della sfera è quindi necessaria. La sfera S^3 è irriducibile. Lo spazio prodotto $S^2 \times S^1$ non è irriducibile : infatti la sfera $S^2 \times \{pt\}$ (dove "*pt*" è un qualsiasi punto di S^1) ha complementare connesso, e quindi non può essere bordo di una palla. Uno spazio lenticolare $L(p, q)$ con $p \neq 0$ (distinto quindi da $S^2 \times S^1$) è irriducibile.

2.2. La sfera cornuta: un esempio di oggetto topologico con proprietà patologiche

Ricordiamo che la sfera di Alexander è un oggetto topologico, ossia una superficie nello spazio omeomorfa ad una sfera, ma con proprietà molto diverse (esotiche) dalla sfera usuale (da qui il nome di "mostro" matematico). La sfera di Alexander è costruita come bordo di un oggetto tridimensionale, definito iterando infinite volte la costruzione mostrata nella figura 3.2. La costruzione parte da un "arco solido" di toro solido, avente due estremità. Il procedimento iterativo consiste nell'aggiungere ad ogni estremità un altro arco solido analogo, più piccolo (le "corna") : così, il numero di estremità raddoppia. Il risultato di questo procedimento è un oggetto omeomorfo ad un albero con rami che si diramano infinitamente. Se i rami non si diramassero infinitamente, ma fossero finiti, questo oggetto sarebbe omeomorfo al disco tridimensionale : $D = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1\}$. Poiché i rami sono infiniti in tutte le direzioni, l'oggetto descritto è invece omeomorfo al disco a cui è stato rimosso un insieme di Cantor contenuto nel bordo. Ogni punto di questo insieme di Cantor corrisponde ad un percorso infinito lungo i rami, definito da una sequenza infinita di lettere "*s*" e "*d*", corrispondenti alla svolta (a "sinistra" o "destra") effettuata ad ogni diramazione. La chiusura di questo oggetto in $\mathbb{R}^3$ è omeomorfa al disco : ogni percorso infatti ha come limite un punto dello spazio, e percorsi diversi hanno limiti diversi. Il bordo della chiusura è quindi omeomorfo ad una sfera : questa è la sfera di Alexander. Pur essendo omeomorfa alla sfera standard : $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$, essa è contenuta nello spazio in modo molto differente. Come la sfera standard, separa lo spazio in due zone : quella interna e quella esterna ; quella interna è una palla. Quella esterna è però notevolmente differente : non è semplicemente connessa (mentre la parte esterna della sfera lo è) ; infatti una curva semplice chiusa che allaccia un qualsiasi ramo non è contraibile tramite una omotopia. Ne consegue che non esiste nessun omeomorfismo dello spazio che porti S^2 nella sfera di Alexander. La sfera di Alexander non è una superficie differenziabile dello spazio $\mathbb{R}^3$: non è infatti differenziabile nei punti dell'insieme di Cantor aggiunto al limite. In questi punti non è ad esempio definito un piano tangente.

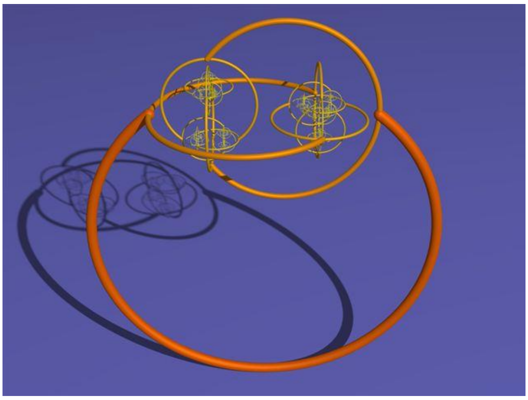


Figura 3.2. La sfera di Alexander. Si tratta di un oggetto topologico che presenta certe proprietà topologiche non comuni.

2.2. Nodi come contorni di superfici

Ci sono delle superfici che sono isotope tra di loro. Una isotopia la si definisce come una deformazione continua dello spazio-ambiente che porta a far coincidere due superfici che vi sono immerse. Per esempio, è possibile realizzare una isotopia tra queste tre superfici (fig. 4).

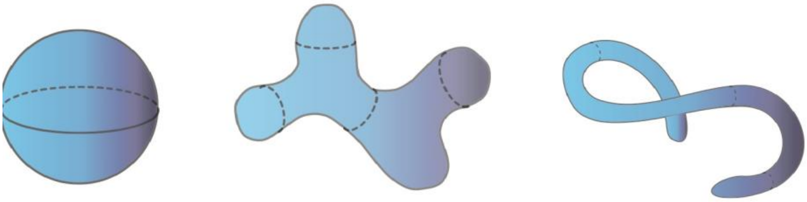


Figura 4. Queste superfici sono isotope.

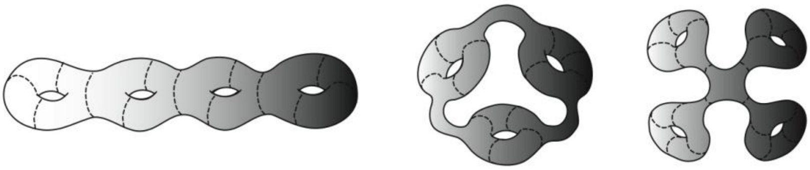


Figura 4.1. Queste superfici sono isotope e hanno lo stesso genere (lo stesso numero di buchi).

Figura 4.2. Queste superfici non sono isotope e differiscono nel loro genere.

La superficie S_g di genere g si può ottenere deformando la superficie S qui sotto in modo continuo. Tuttavia la deformazione continua mostrata nella figura 5 ha un significato più ampio ; infatti, essa consente alla superficie di torcersi e attorcigliarsi intorno ai buchi della superficie S, in modo tale che la nuova superficie risulti alla fine annodata. Si può inoltre mostrare come sia possibile costruire una superficie perforata di un determinato numero di buchi, in modo tale che ci si possa iscrivere un nodo senza che i suoi cappi si rompano (fig. 5).

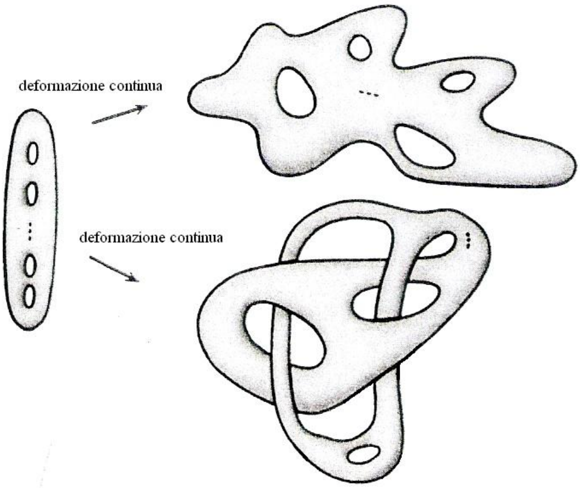


Figura 5. Qui sono mostrate due deformazioni continue. Naturalmente ne esiste una terza tra le due superfici a destra nell'immagine (da sopra verso sotto). Si tratta, in tutti e tre i casi, di omeomorfismi.

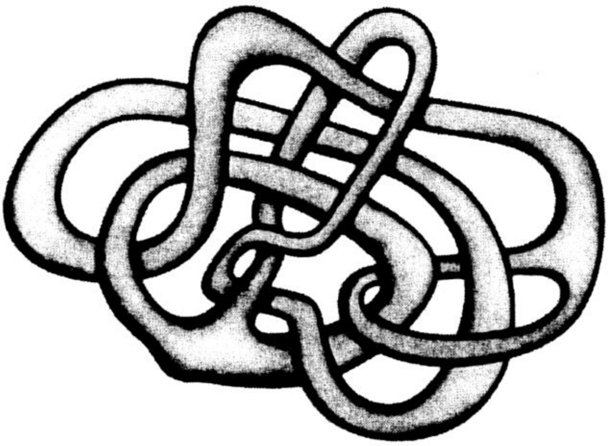


Figura 6. Superficie multiannodata di genere *g*. La superficie passa attraverso i suoi buchi generando un intreccio complesso. Quanti buchi ci sono in questa superficie? E come possiamo contarli? La *caratteristica di Eulero* permette di dare una risposta. Si tratta di identificare e contare il numero di face, lati e vertici dei triangoli "incollati" a questa scultura. In questo modo otteniamo la *caratteristica di Eulero* della superficie usando il *metodo di triangolazione*. La caratteristica di Eulero di questa superficie è –2. Infatti, dal punto di vista topologico essa è equivalente alla sfera S^2, ma non lo è dal punto di vista differenziabile: in effetti, è impossibile ottenere questa superficie da una palla con due buchi per deformazione continua, a meno di ammettere auto-intersezioni. Tuttavia, si può ottenere questa superficie senza auto-intersezioni se la deformazione della palla avviene in uno spazio a quattro dimensioni invece che nello spazio tridimensionale usuale.

Molti nodi, è il caso del nodo a trifoglio e del nodo a otto, formano il contorno di una superficie. Questi contorni separano ciascuna delle superfici corrispondenti in due parti. Questi due nodi hanno lo stesso *genere*, che è uguale a 1. Lo si può infatti disegnare sulla superficie di una sfera con due manici : si ottengono due parti separate della superficie quando la si taglia lungo la curva del nodo.

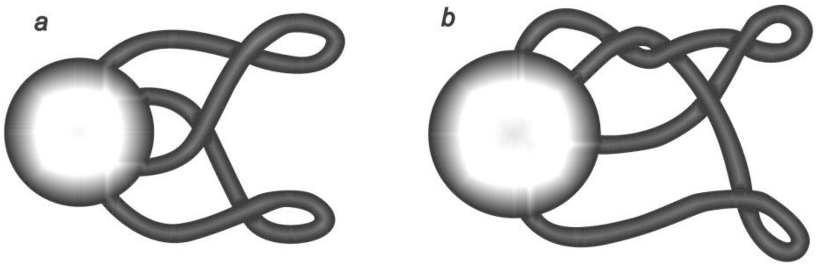


Figura 7. Il nodo a trifoglio (a) e il nodo a otto (b) formano il contorno di una superficie.

È possibile "iscrivere" un nodo su una superficie in modo tale che il nodo appaia sul contorno di questa superficie che la separa dunque in due parti quando la si taglia seguendo il suo contorno. Il numero di manici di questa superficie determina il *genere* del nodo. Per costruire tale superficie (fig. 8), per esempio quella che corrisponde al nodo a trifoglio, si parte dal disegno del nodo (*a*) e si riempie "l'interno" del nodo con una superficie di cui i contorni sono costituiti dal disegno del nodo (*b*). Possiamo immaginare che questa superficie è quella realizzata da una bolla di sapone che si appoggia sulla curva chiusa che forma il nodo ; si deforma questa superficie rendendo ovali i buchi per ottenere la superficie (*c*). Si passa poi a intagliare la superficie, così come è rappresentata sulla parte superiore della superficie (*d*). Quando questa scanalatura attraversa il tortiglione (la treccia) centrale, si ottiene la figura (*e*). Ci si può convincere, per mezzo di una linguetta di carta, che questi due tortiglioni (trecce) si combinano per dare luogo a un laccio (ansa, *looping*) e, di conseguenza, si ottiene la superficie (*f*). Infondendo dell'aria tra i due lati di questa superficie, si trova un volume il cui contorno è il nodo a trifoglio, e il cui genere è uguale a 1, poiché la sfera generalizzata che si ottiene ha due manici (quindi quattro buchi).

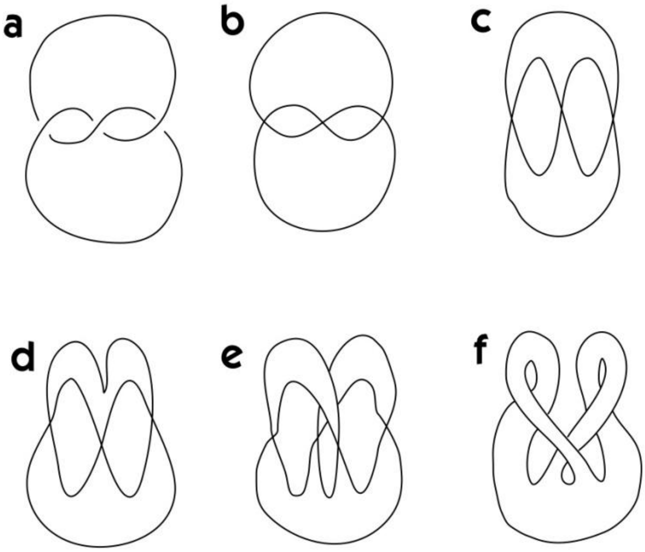


Figura 8. "Iscrizione" di un nodo su una superficie.

Ricordiamo infine che il genere di un nodo composto prodotto di due nodi è superiore o uguale al genere di ogni singolo nodo. La prova sperimentale consiste nel distendere il nodo in maniera tale che un piano tagli soltanto due fili o cappi del nodo composto A # B ; in tal modo i nodi A e B risultano separati. Appare chiaramente che la somma del numero di manici di A e B è uguale al numero di manici della sfera iniziale e, di conseguenza, che il genere del nodo composto è superiore o uguale alla somma dei generi rispettivi di A e B.

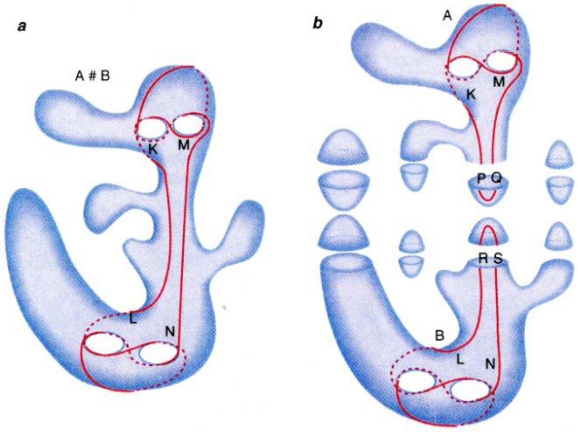


Figura 9.

3. Alcuni concetti "elementari" della teoria topologica dei nodi

I nodi, cioè i pezzi di spago variamente ingarbugliati, sono tra gli oggetti di interesse primario della topologia. La nozione di equivalenza è fondamentale per capire e decidere che due nodi sono uguali (oppure non lo sono). Esiste una differenza sostanziale tra l'osservazione di un nodo *dall'esterno* e quella *dall'interno*. Su un nodo è sempre possibile "appoggiare" (in molti modi) una superficie ; in altre parole, a partire da un nodo si può creare uno spazio, e nodi diversi possono dar luogo a spazi diversi. Secondo il punto di vista di un topologo, si può considerare che due oggetti sono uguali quando li si può deformare, senza strappi, l'uno nell'altro. Per un topologo, un nodo è un oggetto nello spazio ottenuto da una corda sottilissima (idealmente senza spessore), perfettamente flessibile ed elastica, con la quale viene formato un garbuglio e della quale alla fine vengono saldati insieme i due estremi. Dunque, due nodi sono tra loro equivalenti quando si possono deformare l'uno nell'altro senza strappi o rotture. Tuttavia, per stabilire che due nodi non sono equivalenti non basta un numero anche molto grande di tentativi falliti di deformarli l'uno nell'altro : serve un argomento generale capace di mostrare che *nessuna* deformazione potrà mai trasformare un nodo nell'altro.

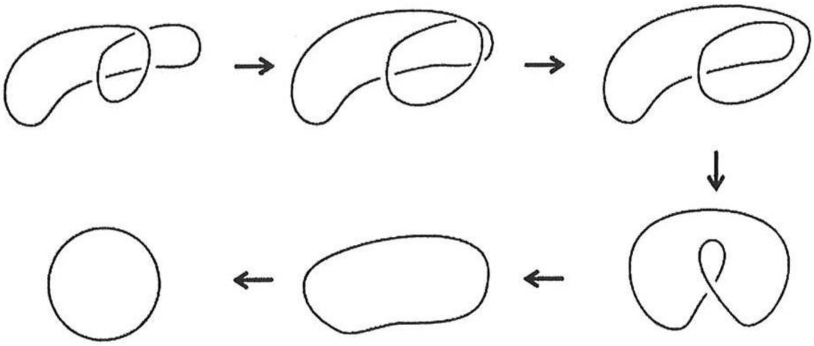


Figura 10. Una deformazione del nodo banale.

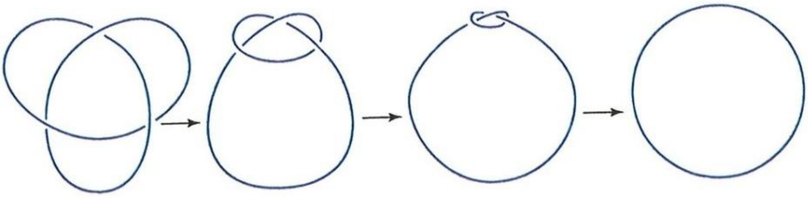


Figura 11. Deformazione planare di un diagramma di nodo. Un nodo trifoglio può essere deformato in un nodo banale (cioè una circonferenza), senza strappi e rotture.

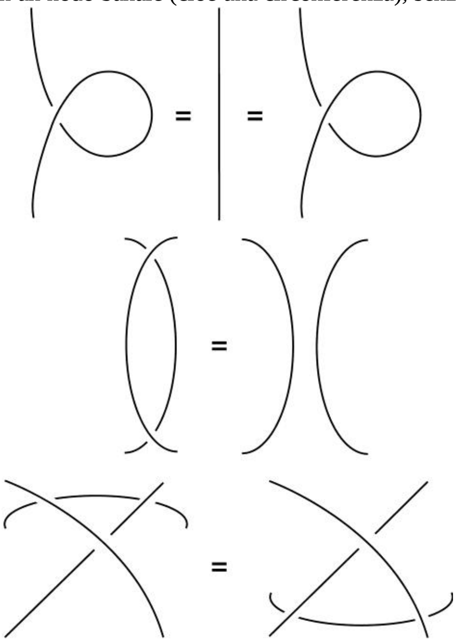


Figura 12. Le mosse I, II e III di Reidemeister. Si tratta di movimenti applicati a diagrammi planari di nodi che consentono di effettuare o sciogliere un nodo nello spazio.

Una nozione molto importante è quella di *diagramma di un nodo*. In matematica si chiama proiezione ortogonale di un oggetto su un piano la figura piatta che si ottiene riportando sul piano tutti i punti dell'oggetto lungo la direzione perpendicolare al piano (questa definizione è analoga a quella usata nella geometria proiettiva e nella prospettiva per proiettare le caratteristiche di un oggetto tridimensionale o di un volume sulla sua immagine planare, bidimensionale ; si veda sotto). Si chiama diagramma di un nodo una sua proiezione ortogonale con interruzione ad ogni incrocio del ramo più lontano dal piano di proiezione. (Bisogna stare attenti al fatto che possono presentarsi delle proiezioni "non valide" di un nodo : un punto in cui la curva è liscia (cuspide) ; un punto in cui due rami della curva si toccano.) L'uso di tali diagrammi traduce l'idea di deformazione. Esiste infatti una sequenza di (tre) mosse che permette di cambiare l'immagine di un nodo in un'immagine differente dello stesso nodo. Questo processo si chiama *deformazione planare di un diagramma di nodo*, nel corso del quale cambia il diagramma o la presentazione del nodo nel piano, sebbene la sua struttura topologica interna si conservi. Le trasformazioni menzionate si chiamano *mosse di Reidemeister* e vanno intese nel modo seguente : dato un diagramma di nodo, si seleziona una porzione del diagramma che appaia come uno qualsiasi dei frammenti nella figura 12, quindi, lasciando inalterato il resto del diagramma, si sostituisce la porzione prescelta con il frammento nella figura 14 collegato con una doppia freccia a quello precedente. Si ha così il seguente teorema.

Teorema. *Ogni diagramma rappresenta un nodo. Ogni nodo può essere rappresentato da diagrammi. Due diagrammi rappresentano nodi equivalenti precisamente quando si possono ottenere l'uno dall'altro tramite deformazione piana ed esecuzione (ripetuta) di mosse di Reidemeister*.

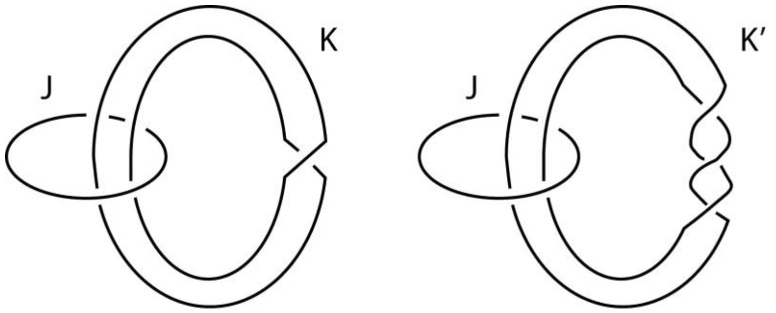


Fig. 13. Due link distinti con complementari uguali.

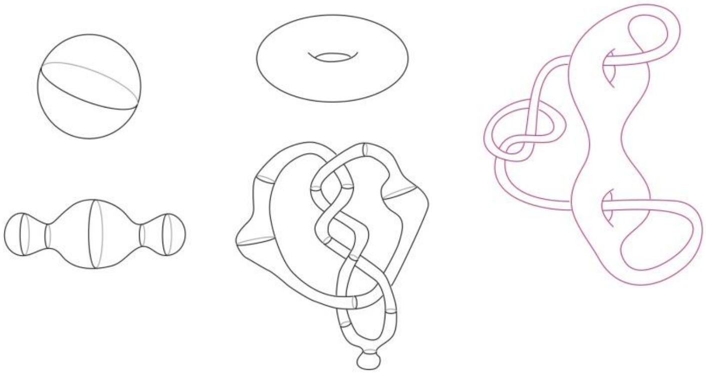


Fig. 14. Alcune superfici senza bordo.

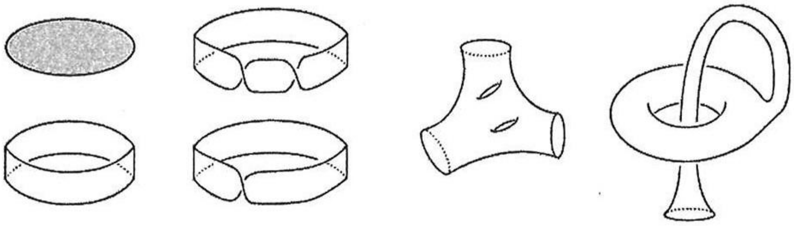


Figura 14.1. Alcune superfici con bordo.

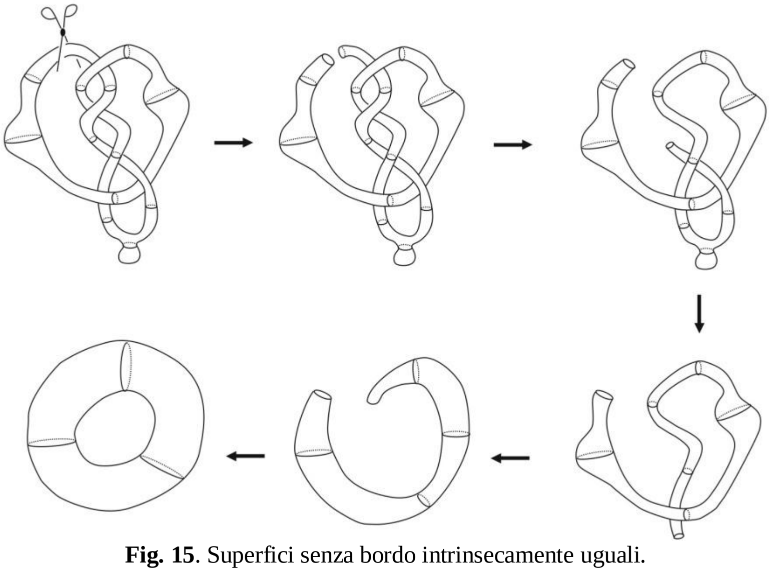


Fig. 15. Superfici senza bordo intrinsecamente uguali.

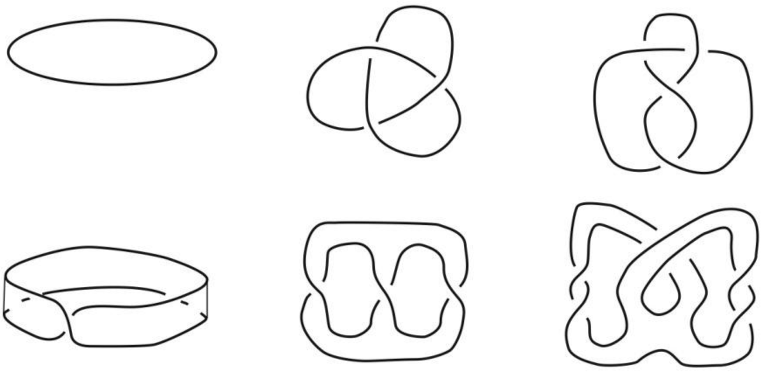


Fig. 16. Due superfici *knot-spanning* per il nodo banale, due per il nodo a trifoglio e due per il nodo a otto.

Introduciamo ora il concetto importante di *complementare del nodo*. Esso si ottiene quando si considera, piuttosto che il nodo, ciò che resta dello spazio tridimensionale una volta che il nodo é stato rimosso. Una definizione più formale si può enunciare come segue : *il complementare di un nodo è lo spazio tridimensionale escluso il nodo medesimo, cioè il campo di osservazione ed esperienza di qualcuno cui si dia licenza di spostarsi come gli pare purché non tocchi (né arrivi mai a vedere) il nodo*.
Si può parlare di un punto di vista intrinseco e di uno estrinseco nell'osservare un nodo. Il concetto del complementare di un nodo suggerisce l'idea che un oggetto di interesse topologico si possa guardare "dal di dentro". In quel caso, l'oggetto da esaminare *dall'interno* è proprio *l'esterno* del nodo, cioè quello che resta del nostro mondo spaziale tridimensionale una volta immaginato di aver rimosso il nodo. Ma la stessa operazione di restrizione di visuale la si può fare (e anzi è molto più semplice) per il nodo stesso piuttosto che per il suo complementare. L'idea consiste a immedesimarsi in un abitante del nodo, cioè in qualcuno per il quale il nodo rappresenta l'unico orizzonte, senza alcuna possibilità di contemplarne l'esterno. Se ci si piazza sul nodo stesso e si effettuano un certo tipo di operazioni (ad esempio, tagliando un nodo a trifoglio in un punto, deformando e poi riattaccando, si ottiene il nodo banale), allora, dal punto di vista intrinseco, ogni nodo è equivalente al nodo banale. Invece, dal punto di vista estrinseco, cioè delle deformazioni spaziali, il nodo a trifoglio non è equivalente a quello banale. In realtà si può dire molto di più : *esistono infiniti nodi estrinsecamente distinti, ovvero due a due non equivalenti tra loro tramite deformazioni*.
Per chiarire maggiormente questo punto, esaminiamo un fenomeno che potrà sembrare sorprendente. Consideriamo due *link* (un link è un oggetto formato da due o più nodi che non si toccano a vicenda ma che possono intrecciarsi fra loro), entrambi aventi due componenti nodo, dunque intrinsecamente uguali. Invece non è difficile vedere che estrinsecamente sono diversi : nel link a sinistra (nella figura 13) ciascuna delle due componenti presa come

nodo è un nodo banale, mentre nel link a destra (nella stessa figura) le due componenti sono un nodo banale e un nodo a trifoglio. È possibile verificare che i complementari dei due link sono intrinsecamente uguali. Questo esempio mostra che link non equivalenti possono avere complementari uguali. Con questo in mente si potrà apprezzare il seguente risultato di eccezionale difficoltà, che ha richiesto ai matematici decenni di sforzi : *se due nodi hanno complementari intrinsecamente uguali allora sono equivalenti per deformazione*[3].

Ritorniamo alla visione "estrinseca" e "intrinseca" di un nodo. Dicendo che un nodo è una corda ingarbugliata di spessore nullo indubbiamente sto pensando di vedere il nodo dall'esterno (anche se altre rappresentazioni possono venirmi in mente, come quella, ad esempio, di un insieme di orbite caotiche o quella di un campo elettromagnetico con indice di torsione estremamente elevato, ecc.). Ma se invece adotto il punto di vista intrinseco, posso dire che un nodo è un mondo nel quale un abitante ritiene di vivere su un filo, cioè dove può guardare solo avanti e indietro. Una superficie si può allora definire come un mondo nel quale un abitante ritiene di vivere al centro di un foglio di carta ; può guardare avanti, a sinistra, dietro, a destra e in tutte le direzioni intermedie, ma non in alto e in basso (cioè non potrà percepire la profondità dello spazio).

La teoria dei nodi conta una variante della definizione di superficie, quella di superficie con bordo : è un mondo nel quale un abitante ritiene di vivere al centro di un foglio di carta oppure su un lato di esso ; ci sono posizioni dalle quali può guardare avanti, a sinistra, dietro, a destra e in tutte le direzioni intermedie, altre in cui può guardare avanti, a sinistra, dietro e in tutte le direzioni intermedie (ma non a destra). Il bordo di una superficie è costituito dalle posizioni nelle quali la visuale è più limitata. In base alla definizione data, è evidente che *il bordo di una superficie è un insieme di nodi, cioè un link*. Come per i nodi, anche per le superfici posso scegliere di considerarne due (o più) equivalenti se sono deformabili l'una nell'altra, come accade per quelle a sinistra nella figura 14. Questo è il punto di vista estrinseco, ma posso anche adottare quello opposto, tornando ancora una volta ai nodi per introdurre l'idea.

Per descrivere completamente i mondi dei nodi, non basta dire che in ogni punto si può solo andare avanti e indietro : è necessario compiere un'esplorazione completa. E lo stesso vale per il caso in esame : due superfici sono intrinsecamente uguali se un abitante dell'una e uno dell'altra possono percorrerle per intero, possono stare sempre in contatto comparando i loro spostamenti tramite dei sistemi di riferimento traducibili l'uno nell'altro, e verificando che in ogni momento le loro osservazioni siano le stesse. Intuitivamente questo significa che se applico una "chirurgia" a una superficie (per esempio tagliandola lungo un cerchio), poi la deformo e alla

[3] Questo risultato fondamentale della teoria topologica dei nodi si trova enunciato e dimostrato in C. M. Gordon e J. Luecke, "Knots are determined by their complements", *J. Amer. Math. Soc.*, 2 (1989), 371-415.

fine riattacco esattamente come avevo tagliato (ovviamente bisogna riattaccare lungo due circonferenze e seguendo un'orientazione[4] fissata che indico con una freccia[5] ; la superficie che ottengo alla fine è intrinsecamente uguale a quella che avevo all'inizio. Scopro così che le due superfici in basso e in alto nella figura 15 sono intrinsecamente uguali.
Un ultimo concetto importante che vogliamo introdurre è quello di *nodi come bordi di superfici*. Assegnato un nodo, chiamiamo *knot-spanning*[6] una superficie il cui bordo sia costituito unicamente da tale nodo. Alcuni esempi sono mostrati nella figura 16. Si chiama *superficie di Seifert* un nodo che presenti le proprietà di essere *knot-spanning* e orientabile. A questo proposito, un risultato importante è il seguente : per ogni nodo ci sono infinite superfici *knot-spanning,* sia di Seifert che non orientabili ; tutte le infinite superfici di Seifert per un fissato nodo, determinano su di esso il medesimo (a meno di deformazione, naturalmente) riferimento, che dunque può essere chiamato *riferimento caratteristico* del nodo.

4. Fenomenologia, storia e cultura dei nodi

4.1. Nodi, intuizione dello spazio e percezione del mondo sensibile

Quanti sono a sapere che esistono dei termini del nostro linguaggio ordinario il cui significato spesso non coincide e può andare ben oltre l'uso che se ne fa nella vita di tutti i giorni ? È il caso dei due vocaboli correnti "nodo" e "buco", che i bambini imparano a conoscere sin da quando muovono i primi passi. "Annodati i lacci delle scarpe", "annodati il fiocchetto", "fai un nodo stretto alla fune", "attento ai buchi del cammino", "non fare buchi sul quaderno su cui scrivi", "infila bene lo spago nel buco", ecc., sono tutte espressioni che ognuno di noi si è fatto ripetere come minimo due volte al giorno durante la sua infanzia e adolescenza. Anche se con un numero più o meno grande di varianti, si può nondimeno affermare con certezza che le stesse espressioni, con lo stesso significato o quantomeno con significati simili, siano esistite e ancora esistano in tutte le culture. Notiamo che tutte le espressioni precedenti traducono o invitano a eseguire un determinato movimento, il quale presuppone sia una certa attenzione sia una determinata azione, e in certi casi entrambe le cose. Notiamo ancora che

---

[4] Precisiamo che un *cilindro* (un nastro al quale non viene impressa alcuna torsione) è una superficie orientabile, mentre il *nastro di Möbius* (ottenuto incollando tra loro, dopo una torsione, le estremità di una striscia di carta) è una superficie non orientabile. Un nastro di Möbius è una superficie *monolatere,* cioè composta di un solo lato. Detto diversamente, esso non si può colorare con due colori diversi. Si ha così la definizione : *si chiamano orientabili le superfici di cui è possibile colorare i due lati opposti con due colori diversi*. Le altre superfici (ne esistono di tantissimi tipi !) si chiamano non orientabili.

[5] In altre parole, riattacco ciò che ho tagliato lungo i bordi dei due sottospazi che trovo applicando questo tipo di "chirurgia".

[6] La traduzione è difficile in italiano. L'idea è che esistono molti tipi di nodi il cui dispiegamento o svolgimento dà luogo a una superficie, o crea uno spazio il cui bordo è costituito dal nodo.

l'azione inclusa in alcune delle espressioni precedenti richiede un'intuizione, seppur inconscia, dello spazio circostante e l'attitudine a saper eseguire uno o più gesti coordinati tra loro. All'inizio il bambino si fa un'idea dello spazio che lo circonda tramite l'intuizione di cui deve far prova per compiere dei gesti (delle mosse), come appunto "allacciarsi le scarpe", "annodare la fune", "ritagliare delle figure senza lasciare dei vuoti", ecc. In altre parole, egli impara pian piano a conoscere lo spazio, non in modo astratto o applicando dei principi innati, ma piuttosto esplorando con il corpo e in particolare con le mani le possibilità inerenti allo spazio di eseguire determinati gesti in modo coerente ed effettivo, cioè in un modo che "fa senso". Ciò significa che il senso è una costruzione plastica, un processo che si iscrive nell'esercizio dell'intuizione e nell'azione. In altre parole, esso emerge dalla nostra interazione con gli oggetti e gli esseri che "vivono" nello spazio ambiente, dalla presa di coscienza dei suoi limiti e delle sue impossibilità, e dalla conseguente scoperta delle sue proprietà e del suo modo di funzionamento.

L'intuizione dello spazio non è molto probabilmente una facoltà innata, o data *a priori* nell'intelletto (anche se si può, d'altra parte, pensare che l'intuizione, in quanto funzione fisiologica, conosca un certo sviluppo ontogenetico e filogenetico), ma è essenzialmente una capacità che si forma con e grazie all'azione, che si plasma man mano che esploriamo, mediante i nostri sistemi sensoriali (che formano un "tutto" che funge quando da "integratore" quando da "differenziatore"), l'interfaccia con lo spazio ambiente, più precisamente con gli oggetti e gli altri esseri che lo abitano. Tant'è vero che nelle prime fasi di questa interazione, e del nostro "essere al mondo", la nostra intuizione dello spazio circostante (il "nostro spazio vitale") è incerta, instabile e procede a tentoni : infatti, allacciamo male le scarpe, il nodo che abbiamo fatto allo spago si disfa subito dopo (ciò vuol dire che non era un "vero" nodo), non riusciamo a fare il salto o il passo giusto per evitare i buchi, ecc. Ciò significa che essa deve ancora crescere, autoregolarsi, trovare quelle proprietà e modalità giuste dei nostri movimenti e dei gesti con i quali manipoliamo gli oggetti, che consentono di capire come è fatto lo spazio, internamente ed esternamente, e quindi anche di capire come noi siamo costituiti rispetto allo spazio. É un'interazione reciproca : noi (il nostro corpo, i nostri movimenti, le nostre percezioni, il nostro « essere ») siamo ecologicamente e fenomenologicamente immersi nello spazio, con tutte le sue propretà e valenze, e nello stesso tempo ci plasma e forma la nostra specificità, la singolarità biologica e cognitiva di ognuno.

I nodi e i buchi hanno un significato "vitale" preminente. Con questo si intende che hanno un legame fondamentale con la vita, con il suo svilupparsi e riprodursi. Anche se la complessità segreta (uso qui l'aggettivo "segreto" per indicare l'altra faccia della complessità spontanea, non meccanica, auto-organizzata : ovvero la sua semplicità essenziale) di tale legame ci è sconosciuta, non ci può tuttavia sfuggire il fatto che i nodi e i buchi presentano una necessità evidente a più livelli della vita. L'anatomia del corpo umano deve molto del suo metabolismo e funzionamento globali al ruolo essenziale di certi orifizi e di certe cavità (l'orifizio rettale e quello dell'organo copulatore maschile, la cavità nasale e quella dell'orecchio), nonché a più strutture attorcigliate, ripiegate, annodate (si pensi agli avvolgimenti dell'intestino nello stomaco, o ai ripiegamenti della corteccia cerebrale nella scatola cranica; di questi ultimi si comincia a capire il ruolo funzionale fondamentale che svolgono per lo sviluppo delle facoltà cognitive della nostra specie). Queste strutture anatomiche essenziali per il metabolismo cominciano a formarsi durante i primi stadi dell'embriogenesi e si stabilizzano poi nel corso dell'ontogenesi, cioè del processo che conduce all'individuazione degli esseri adulti. Ma nella filogenesi ritroviamo altri tipi di buchi e nodi, realizzati dalle diverse specie animali e vegetali a scopi diversi : nutrirsi, riprodursi, camuffarsi o accoppiarsi. I buchi e gli annodamenti sono utilizzati da svariate specie animali come altrettante strategie evolutive per affermarsi in seno a una comunità o sopravvivere di fronte al più forte, ma anche come elemento ludico e strumento di comunicazione.

4.2. I nodi: modello di un linguaggio polisemico non verbale

Il nodo ha rivestito sempre una grande rilevanza nelle varie culture e nelle pratiche antropologiche e simboliche di ogni epoca, tanto da immortalarlo nelle incisioni rupestri, da inserirlo in contesti rituali, da adottarlo come caratteristica specifica di taluni ordini monastici, da evidenziarlo in molte opere d'arte, in cui non è mai posto in modo casuale o decorativo. Per gli Egizi, il nodo era segno di vita. Buddha insegna che "disfare i nodi del cuore"[7] è il processo che porta alla liberazione, all'elevazione dell'essere, il passaggio ad uno stato superiore, e i nodi fatti in un certo ordine possono essere sciolti solo nell'ordine inverso, con un metodo rigoroso che è une regola del Tantrismo. Il nodo di bambù cinese è una successione verticale che segna una gerarchia di stati lungo l'asse Cielo-Terra, e ha similitudini con il concetto dei *chakra tantrici*, la "gerarchia" di stati lungo il nostro asse corpo-mente, materiale-spirituale, terrestre-celeste : sciogliere questi "nodi" è vitale per far fluire l'energia vitale nell'uomo e portarlo alla sua libertà. I nove nodi dei taoisti hanno il potere di captare la realtà, di far condensare stati ed elementi. Notiamo, a questo proposito, che le ricerche recenti sulla dinamica dei fluidi hanno evidenziato l'importanza dei nodi e di certi invarianti ad esse associati per stabilizzare svariate strutture fisiche macroscopiche e minimizzare la dissipazione di energia.[8]

---

[7] Nell'accezione di legami assolutamente vincolanti, contraria al senso proprio dell'oggetto nodo che è quello di avvicinare cose lontane, stabilire connessioni, formare intrecci creativi.

[8] Cfr. L. Boi, "Topological knot theory and macroscopic physics", in *Encyclopedia of Mathematical Physics,* J.-P. Françoise, G. Naber, T. S. Tsun (eds.), Elsevier, Oxford, 2006, pp. 271-277.

Famoso è il *Nodo di Gordio*, un misero contadino che divenne re di Frigia, il cui timone del proprio carro fu legato da suo figlio Mida con un nodo talmente complicato che nessuno era in grado di scioglierlo e, secondo l'*oracolo* di Telmisso (antica capitale della Frigia), l'impero d'Assia sarebbe andato nelle mani di colui che ci sarebbe riuscito. Dopo che molti ebbero tentato e fallito, Alessandro Magno giunse a Frigia nel palazzo di Gordio (nel IV secolo a.C.) e dopo aver tentato di sciogliere il nodo lo tagliò a metà con un colpo della sua spada ed ebbe il regno ma in modo effimero poiché lo perse poco dopo. La "soluzione alessandrina" fa riferimento nella mitologia a una falsa soluzione: il nodo si scioglie ma non si taglia ; tagliandolo se ne distruggono la complessità e realtà invisibili che esso racchiude. Il *Nodo di Salomone* è uno dei simboli più antichi e riprodotti in ogni tempo dall'uomo : basti pensare che se ne conoscono esemplari tracciati in maniera approssimativa in epoca preistorica, in incisioni rupestri. Tuttavia la sua diffusione si sviluppa soprattutto con le culture euro-asiatiche, africane e amerindie, e raggiunge il suo apice nella cultura celtica, fortemente basata sui temi dei nodi, degli intrecci e delle figure ondulate. Il Nodo di Salomone era costituito da complicati intrecci geometrici che disperdevano stregonerie e malefici.

Presso l'*impero Inca*, i nodi (nella loro lingua *quipu* o *Khipu*) erano parte integrante della vita quotidiana e rappresentavano un vero e proprio sistema di scrittura e contabilità. Con questo sistema, gli Inca detenevano archivi, creavano calendari, effettuavano censimenti, campionamenti : i nodi erano mezzi di trasmissione di messaggi, quindi strumenti importantissimi di comunicazione. Un sistema "tridimensionale", oltre le due dimensioni della nostra scrittura. Il *marchingegno* era costituito da una cordicella orizzontale, di cotone, raramente di lana, alla quale venivano attaccate altre cordicelle annodate di diverso colore, che a loro volta potevano avere ulteriori funicelle annodate. La contabilità dell'impero era affidata ai *quipu-kamaya,* o *quipucamayoc* (contador), "*i maestri delle cordicelle a nodi*". E si pensa che solo loro conoscessero il significato di ogni singolo quipu, che è unico.

Secondo alcuni studiosi, il quipu era basato sul sistema decimale, in cui il tipo di realizzazione fisica del nodo assumeva una valenza ben precisa : un nodo semplice corrispondeva all'unità, un doppio alle decine e un triplo alle centinaia. Per scrivere la cifra 1705, ad esempio, si registrava un nodo nella posizione delle migliaia, 7 nodi in quelle delle centinaia, nessuna tra quelle delle decine e 1 nodo riannodato cinque volte, nella posizione delle unità. Quest'ultimo era un caso speciale, che serviva da punto di riferimento : lo spazio delle unità non conteneva mai più di un singolo nodo, a forma di 8 per indicare 1 e con un cappio in più per ogni somma da 2 a 9. Un'altra caratteristica appare chiara. Le cordicelle supplementari attaccate alla stringa annodata indicavano probabilmente una serie di informazioni secondarie, come ad esempio il numero di uomini in un dato gruppo di contraenti. Il colore della cordicella era fondamentale, poiché contraddistingueva il soggetto o il tipo di prodotto cui si riferiva il conteggio (ad esempio la cordicella gialla era riservata al mais). Le stringhe o cordicelle annodate avevano diversa lunghezza, raggruppate in diversi modi, e i nodi potevano presentare una varietà di posizioni strabiliante : da qui la difficoltà nella decifrazione dei quipu.

Recentemente, lo studioso Gary Urton ha studiato oltre seicento khipu conservati nei vari musei (molti sono dispersi, altri in collezioni private), e ha asserito che in realtà il quipu è da intendersi come un sistema di comunicazione a base binaria[9]. Tale sistema sarebbe una sorta di linguaggio (un codice complesso) basato su sette possibilità, che combinate in un determinato numero di modi fornirebbero 1536 informazioni diverse, un sistema tutt'altro che elementare. È lecito supporre che i quipu dovevano celare anche un significato non solo "numerico" ma artistico e letterario, nel quadro di una certa visione cosmogonica dell'universo di natura ciclica e pertanto illimitata. Probabilmente esistono anche "traduzioni", trascritte in lingua comprensibile, di quei "libri annodati". Molti elementi risalenti a quell'epoca lasciano intendere che la posizione di nodi e la direzione dell'annodatura possano fornire preziosi indizi per la decodifica del significato. Si può infatti notare, ad esempio, che alcune stringhe assumono forme spiraliformi, altre sono annodate in senso antiorario, altre in senso orario.

È probabile che i Khipu avessero una doppia valenza : quella per le attività quotidiane, di uso comune, e quella riservata alle caste sacerdotali, poiché pare che il gesuita Joan Anello Olivia abbia scritto nel "*Monumenta Piruana*" codeste parole : "I quipu che serba i segreti della religione e delle caste ha una chiave di compilazione e composizione differente. (…) Grazie alla dimestichezza che essi hanno con i fili, questi, li riavvolgono in nodi di differenti colori sino a formare il concetto desiderato". Pare che nel racconto, Oliva descrivesse anche l'aspetto sillabico di un quipu che gli era stato mostrato e che raffigurava il Creatore *Pachacamac*, specificando che ad ogni sillaba corrispondeva uno specifico nodo, in una data posizione, ecc. Un messaggio cifrato, praticamente ! Questa "arte combinatoria" dei nodi venne ritenuta (pur non comprendendola) idolatria e la stragrande maggioranza dei nodi venne data al rogo dai conquistatori e evangelizzatori cristiani.

Nel Rinascimento e poi nell'epoca moderna saranno molti gli artisti, matematici e naturalisti che dedicheranno un'attenzione e una ricerca particolari alle qualità e ai significati dei nodi, trasformandoli, in certi casi, in un vero linguaggio necessario per conoscere e spiegare le proprietà delle cose e le strutture del mondo (Albrecht Dürer, Leonardo da Vinci).

5. Geometria proiettiva e prospettiva : l'invenzione dello spazio pittorico

La geometria proiettiva è la parte della geometria che dà forma ai concetti intuitivi di *prospettiva* e di *orizzonte*. Definisce e studia gli enti geometrici usuali (punti, rette, …) senza utilizzare misure o confronto di lunghezze. La geometria proiettiva può essere pensata informalmente come la geometria

[9] Cfr. G. Urton, *Signs of the Inka Khipu: Binary Coding in the Andean Knotted-String Records*, University of Texas Press, Austin, 2003.

che nasce dal collocare il proprio occhio in un punto dello spazio, così che ogni linea che intersechi l'"occhio" appaia solo come un punto. Le grandezze degli oggetti non sono direttamente quantificabili (perché guardando il mondo con un occhio soltanto non abbiamo informazioni sulla profondità) e l'orizzonte è considerato parte integrante dello spazio. Come conseguenza, nella geometria piana proiettiva due rette si intersecano sempre (non sono mai parallele). L'origine della geometria proiettiva si può far risalire ai lavori dell'artista e matematico francese Girard Desargues (1591-1666), che cercava una via alternativa per il disegno in prospettiva, che generalizzasse l'uso dei "punti di fuga" ed includesse il caso in cui questi sono infinitamente lontani. Egli concepiva la geometria proiettiva come un sistema geometrico più generale rispetto alla geometria euclidea che la includeva al suo interno. Il passaggio dalla geometria analitica (di Cartesio) a quella proiettiva (sviluppata nella prima metà del XIX secolo da Gaspard Monge, Jean-Victor Poncelet, Jakob Steiner et Jules Plücker, poi nella seconda metà dell'Ottocento dalla scuola italiana di geometria algebrica) si effettuò sostituendo le usuali coordinate cartesiane con delle nuove coordinate, dette *coordinate omogenee*. Una coppia di punti antipodali sulla sfera S^2 individua univocamente una retta nello spazio tridimensionale passante per l'origine. Tale retta può essere individuata da equazioni parametriche della forma : $x = at$, $y = bt$, $z = ct$, $t \in \mathbb{R}$ (dove i coefficienti a, b e c non sono tutti nulli) e dalla famiglia di infinite equazioni che si ottengono moltiplicando tutti i coefficienti par uno stesso fattore non nullo. Questo significa che il piano proiettivo può essere rappresentato da terne di coefficienti (a, b, c) non nulle identificando tra loro le terne che differiscono per una costante di proporzionalità. Questo equivale a considerare l'insieme quoziente di $\mathbf{R}^3\backslash\{0\}$ rispetto alla relazione di equivalenza $(a, b, c) \sim (a', b', c') \Leftrightarrow a/a' = b/b' = c/c'$. Tramite queste coordinate, lo spazio (ad esempio, il piano) si arricchì di alcuni "punti all'infinito" che la geometria proiettiva considerava punti a tutti gli effetti, indistinguibili dai punti "finiti" (da cui il carattere omogeneo del nuovo spazio, in cui tutti i punti hanno lo stesso ruolo).

La geometria proiettiva includeva come una sua proprietà basilare quella dell'*incidenza* tra due rette qualunque nel piano : due rette distinte L e M nel piano proiettivo si intersecano *sempre* in esattamente un punto P. Contrariamente alla geometria euclidea o analitica, in quella proiettiva non esistono rette parallele. Il caso "eccezionale" delle rette parallele viene eliminato aggiungendo al piano i "punti all'infinito". Questi nuovi punti formano anch'essi una retta, detta "retta all'infinito" o "impropria", o anche "orizzonte". La teoria considera quindi la "retta all'infinito" come una retta qualsiasi, indistinta dalle altre. Grazie all'aggiunta dei punti all'infinito, e all'eliminazione dei fenomeni di parallelismo, molti teoremi classici assumono nella geometria proiettiva una forma più semplice, più essenziale. Ad esempio, la geometria proiettiva fornisce una descrizione breve ed elegante delle sezioni coniche : iperbole, parabola ed ellisse altro non sono che la "stessa conica" nel piano proiettivo, e le differenze fra questi tre enti dipendono soltanto da come questo oggetto interseca la retta all'infinito :

l'iperbole la interseca in due punti, la parabola in uno solo, l'ellisse in nessuno.

La geometria proiettiva ha profondamente rinnovato il linguaggio della geometria euclidea, in particolare allargando e pluralizzando il significato dei suoi enti e stabilendo delle nuove relazioni essenziali tra i suoi oggetti. Limitiamoci a citare qualche esempio. Il *piano proiettivo* è un'estensione del piano euclideo a cui viene aggiunta una "retta impropria" posizionata idealmente all'infinito e atta a circoscriverlo. Esteso in questo modo il piano diventa uno spazio *compatto* in cui anche le rette parallele si incontrano in un unico punto e tale punto di intersezione è idealmente collocato sulla "retta impropria" (o *immaginaria*). La retta impropria può essere visualizzata come la retta che si vede all'orizzonte quando un piano euclideo viene rappresentato in prospettiva oppure può essere pensata come una circonferenza infinitamente lontana che delimita tutto il piano euclideo e i cui punti antipodali sono identificati in maniera tale che le rette parallele ad una stessa direzione abbiano un *unico* punto di intersezione su di essa. Il piano proiettivo reale, $\mathbb{P}^2$, è lo spazio di linee in $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine. È una varietà differenziabile non orientabile 2-dimensionale, vale a dire una superficie che non può essere immersa senza auto-intersecarsi nel nostro spazio 3-dimensionale. Essa ha caratteristica di Eulero pari a 1 e quindi genere unitario.

Un modello di *piano proiettivo* può essere definito matematicamente in vari modi che forniscono strutture isomorfe. Un modello di piano proiettivo si ha considerando la sfera S^2 immersa nello spazio euclideo tridimensionale in cui : (a) definiamo *punti proiettivi* del piano proiettivo le coppie di punti antipodali sulla sfera ; (b) definiamo *rette proiettive* del piano proiettivo tutti i cerchi massimi che giacciono sulla sfera. Questo equivale a considerare sulla sfera la relazione di equivalenza ~ che identifica i punti $x \sim y :\Leftrightarrow x = y$ oppure $x = -y$, e definire il piano proiettivo come lo spazio topologico quoziente $\mathbb{P}^2 := S^2 / \sim$. È possibile definire una applicazione che manda il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ privato di una retta nel piano euclideo in modo tale da mandare rette proiettive in rette euclidee. A tale scopo consideriamo nello spazio tridimensionale il piano P tangente alla sfera S^2 nel "polo sud". Possiamo associare alle copie di punti antipodali sulla sfera (che sono punti del piano proiettivo) un punto del piano P individuato dall'intersezione del piano con la retta congiungente i due punti antipodali. Intuitivamente è come se stessimo guardando l'ombra prodotta sul piano da questa coppia di punti quando una sorgente di luce è disposta nel centro della sfera. I cerchi massimi sulla sfera (corrispondenti a *rette proiettive*) vengono mandate tutte in rette sul piano P. Questa applicazione manda tutti i punti del piano proiettivo sul piano P fatta eccezione per i punti appartenenti al cerchio massimo parallelo al piano (che in qualche senso vengono mandati all'infinito). Se omettiamo tale cerchio dal dominio, l'applicazione così definita è una corrispondenza biunivoca che fa corrispondere rette del piano a *rette proiettive* sul piano proiettivo. Questa costruzione mostra in che modo il piano proiettivo possa essere visto come un'estensione del piano euclideo. La topologia naturale per il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ definito come una sfera quozientata si ha considerando la topologia quoziente della sfera rispetto alla relazione di equivalenza in essa definita. Lo stesso spazio topologico (a meno di omeomorfismi) può essere ottenuto considerando un quadrato ed incollando i lati opposti nei versi contrari (ovvero identificando tra loro i punti antipodali rispetto al centro del quadrato). Topologicamente, il piano proiettivo è uno spazio compatto, connesso, localmente omeomorfo al piano euclideo $\mathbf{R}^2$, e non orientabile, ciò significa che non può essere ottenuto come superficie immersa nello spazio euclideo tridimensionale senza autointersezioni. Il *rivestimento universale* del piano proiettivo è la mappa $S^2 \to \mathbb{P}^2$ indotta dalla relazione d'equivalenza antipodale. Il *gruppo fondamentale* del piano proiettivo è dato dal gruppo di due elementi $\mathbf{Z}_2$. La sua caratteristica di Eulero è 2, e il suo genere è 1.

Le stesse proprietà geometriche e topologiche sopra indicate valgono, *mutatis mutandis*, per lo spazio proiettivo. Si può definire lo *spazio proiettivo* n-dimensionale come l'unione di $\mathbb{R}^n$ e di tutti i suoi "punti all'infinito", oppure, in modo più naturale, come l'insieme delle rette in $\mathbb{R}^{n+1}$ passanti per l'origine. Intuitivamente, lo spazio proiettivo a n dimensioni è lo spazio che vede un occhio posizionato nell'origine. Questa definizione esprime chiaramente le relazioni con la prospettiva.

5.1. La complessità pittorica del reale nell'opera di Piero della Francesca

La prospettiva è un insieme di proposizioni e di procedimenti di carattere geometrico che consentono di costruire l'immagine di una figura dello spazio su un piano, proiettando la stessa da un centro di proiezione posto a distanza finita. Si tratta quindi di una proiezione centrale, o conica. La specificazione è utile per distinguerla dalla *prospettiva parallela*, modo alternativo, anche se non di uso corrente, di chiamare le assonometrie. Gli elementi fondamentali necessari alla costruzione della prospettiva di una figura obiettiva, che si suppone data nello spazio, sono, come per ogni metodo di rappresentazione, il piano di proiezione, a cui si dà in genere il nome specifico di "quadro", e il centro di proiezione, chiamato normalmente "punto di vista" o "centro di vista". Per procedere operativamente nel disegno occorre anche fissare la posizione di alcuni elementi di riferimento, di seguito elencati. Un piano orizzontale, detto "piano geometrale" che, intersecando il quadro, fornisce la "linea di terra", luogo delle tracce di tutte le rette appartenenti allo stesso piano geometrale. La proiezione ortogonale del punto di vista sul piano geometrale individua il cosiddetto "punto di stazione", mentre la proiezione ortogonale dello stesso punto di vista sul quadro determina il "punto principale". L'intersezione del quadro con un piano orizzontale passante per il centro di vista è una retta denominata "linea d'orizzonte", parallela alla linea di terra e luogo delle fughe di tutte le rette orizzontali, ovvero retta di fuga di tutti i piani paralleli a quello geometrale. In alcuni casi può essere utile tracciare il "cerchio di distanza", che ha il centro nel punto principale, raggio uguale alla distanza del centro di vista dal quadro, ed è il luogo geometrico delle fughe di tutte le rette inclinate di 45° rispetto al quadro. È inoltre necessario disporre delle proiezioni ortogonali della figura obiettiva, la cui vista dall'alto, o pianta, viene di solito riportata sul piano di terra.

Dal punto di vista linguistico, il vocabolo "prospettiva" è la forma femminile di "prospettivo", derivante a sua volta dal latino tardo "prospectivus", che assicura la vista. Nel campo degli studi ottici medievali la *perspectiva* indicava l'ottica stessa (*perspectiva naturalis*), intesa come percezione visiva. In particolare indicava la pratica per misurare le distanze e le lunghezze tramite un rilevamento indiretto. Nel tardo Rinascimento, al problema della prospettiva e della percezione visiva furono interessati in modo particolare gli artisti, che a volte erano delle personalità provviste di solide cognizioni matematiche. E nel caso di Piero della Francesca (1416-1417 circa – 1492) si ha un vero cultore della materia, tanto da poter essere definito un valente geometra. Le sue opere sono mirabilmente sospese tra arte, geometria e un complesso sistema di lettura a più livelli, dove confluiscono complesse questioni teologiche, filosofiche e politiche. Riuscì ad armonizzare, nella vita quanto nelle opere, i valori intellettuali e spirituali del suo tempo, congiungendo molteplici influssi e dialogando tra tradizione e modernità, tra razionalità ed estetica. La sua opera fece da cerniera tra la prospettiva geometrica di Brunelleschi, la plasticità di Masaccio e l'arte della luce di Fra Angelico. Altre caratteristiche fondamentali della sua espressione poetica sono l'essenzialismo geometrico sia delle composizioni che dei volumi, l'altissima spiritualità dei gesti, l'attenzione alla verità umana. Piero della Francesca parlerà di prospettiva come di vera *scientia*. La riscoperta della cultura classica, e in particolare di quella scientifica, e l'importanza conoscitiva, estetica e persino etica attribuita alla geometria, considerata allo stesso tempo una scienza e un'arte, ha avuto un ruolo centrale nella svolta culturale che ha caratterizzato l'epoca rinascimentale. Euclide e i suoi *Elementi*, variamente tradotti e commentati, diventarono un modello a cui riferirsi. Gli affreschi posteri della *Flagellazione di Cristo* e della *Sacra conversazione* portano fortemente i caratteri della visione geometrica di Piero della Francesca.

Piero della Francesca è riconosciuto tra i più grandi geometri e artisti del Rinascimento. La sua opera, *Flagellazione di Cristo*, rappresenta l'esempio più interessante dell'applicazione delle regole prospettiche moderne da parte di Piero. La lettura del modello prospettico utilizzato, tuttavia, risulta difficile e controversa per la singolarità dell'impostazione. L'interpretazione del dipinto è necessariamente complessa, poiché in esso le dimensioni spaziale e temporale sono profondamente legate : l'organizzazione spaziale multipla e allo stesso tempo convergente della scena evoca una certa memoria storica di eventi connessi anche se forse non simultanei ; e questa memoria storica che si dispiega nel tempo conferisce agli eventi immersi nello spazio del dipinto una contiguità e una connessione fondamentali.

In termini più descrittivi, se infatti è facile riconoscere la scena della flagellazione di Cristo sotto la loggia a sinistra, non è affatto semplice conciliare con essa la presenza dei tre personaggi in primo piano a destra, che la loro posizione spaziale prominente suggerisce presenti con funzione significante all'interno della rappresentazione. Nella Flagellazione la rievocazione « storica » della vicenda di Cristo è rappresentata all'interno di una loggia terrena, aperta frontalmente e con i personaggi in costume « all'antica », mentre un abito inconfondibilmente moderno riveste i tre uomini in primo piano, che occupano la porzione destra del riquadro, fuori dal contesto spaziale della flagellazione, anche se visivamente in continuità con esso. E tale unità è sottolineata nella gabbia architettonica prospettica, che struttura in maniera organica l'intero spazio. Nel portico le figure sono piccole, ma ben commisurate alla struttura architettonica e si collegano proporzionalmente fra loro anche grazie al disegno quadrettato del pavimento in forma di tassellazione regolare. L'uso della luce, poi, è sapiente e sofisticato, tanto da aver suggerito la presenza di una sorgente luminosa sulla destra del portico e a fianco del Cristo alla colonna, che ne viene investito direttamente insieme al soffitto sovrastante, acquistando così una salienza marcata nel contesto del dipinto.

Piero non affronta esplicitamente il problema della luce (e del colore) nel suo trattato *De prospectiva pingendi*, ma la prova del suo interesse per l'argomento è rintracciabile nelle opere pittoriche ; inoltre può avere ricevuto uno stimolo ulteriore della conoscenza delle teorie ottiche di Alhazen[10], che trattano della trasmissione rettilinea della luce. Come accertato dallo schema ricostruttivo dell'impianto prospettico elaborato da Carter e Wittkover[11], l'insieme spaziale è stato accuratamente calcolato fin nella posizione dei particolari e il punto di fuga risulta centrico e collocato verso il basso, fra lo stipite destro della porta posta dietro la figura di Cristo e l'infilata delle colonne che delimitano il loggiato sulla destra. Di conseguenza alcuni studiosi hanno voluto vedere in questa opera un punto di arrivo nell'elaborazione prospettica di Piero, quasi una dimostrazione pratica della riflessione teorica sul problema della resa spaziale, con conseguenti riflessi sia sulla datazione del dipinto che del *De prospectiva pingendi*. Se la soluzione di collocare due scene distinte in contiguità spaziale può derivare dalla distribuzione dei *loci* deputati alla scenografia del teatro medievale, Piero non si limita ad applicare tale tradizione acriticamente. I due luoghi, infatti, sono volutamente differenziati anche nella resa prospettica. Nella *Flagellazione* la gabbia grafica della loggia è lucidamente offerta alla vista con le linee convergenti dell'architettura e della scacchiera pavimentale, che guidano l'occhio dell'osservatore ad una comprensione razionalmente calcolabile dello spazio, tanto che è risultato possibile ricostruire la

[10] Alhazen, o Abu Ali al-Hasan Ibn al-Hasan Ibn al-Haytham (Bassora, 965-Il Cairo, 1038), è stato un medico, filosofo, matematico, fisico ed astronomo arabo. Considerato uno dei più importanti e geniali scienziati del mondo islamico. Da taluni è considerato l'iniziatore dell'ottica moderna.

[11] Cfr. R. Wittkower, B.A.R. Carter, "The Perspective of Piero della Francesca's Flagellation", in *Journal of the Warburg and Coutauld Institutes*, XVI (1953), pp. 292-302. Sull'argomento si veda altresì J. V. Field, *Piero della Francesca. A Matematician's Art*, Yale University Press, New Haven, 2005 (in particolare le pp. 174-181).

planimetria dell'ambiente raffigurato. Se dal punto di vista geometrico la proiezione può essere definita frontale, l'effetto ottico tende invece a spostare il centro dell'attenzione visiva verso destra a causa dell'incombere dei tre personaggi in primo piano, collocati contro uno spazio definito da strutture architettoniche in deciso scorcio verso la profondità. In questa parte della raffigurazione la lettura spaziale appare più difficoltosa, perché Piero ha volutamente coperto molti punti di riferimento geometrico, cosicché la reale distanza fra i tre personaggi in primo piano e la parete a rombi bicolori del fondo è più intuibile che misurabile.

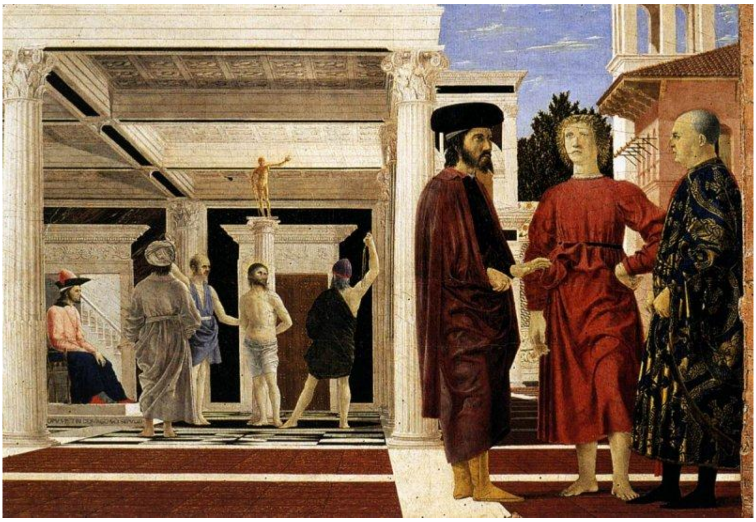


Fig. 17. Piero della Francesca, *Flagellazione di Cristo*, ca. 1459, Urbino, Galleria Nazionale.

Tra i trattati scientifici di questo importante pittore, ci sono ben tre opere di matematica : il *De corporibus regularibus*, il *Trattato d'abaco* e il *De prospectiva pingendi*. Il *De Prospectiva pingendi* è stato il primo vero organico trattato compilato sulla scienza prospettica del Rinascimento e tanta è la sua validità che, per un lungo arco di tempo, sarebbe rimasto come esempio e fonte per successivi autori di opere di prospettiva. Fu scritto verso il 1475. Articolato in tre libri, questo trattato sviluppa in senso nettamente matematico i problemi della rappresentazione prospettica offrendo esempi operativi non solo riferiti a complesse forme geometriche e architettoniche, ma a qualsiasi forma naturale. Il primo libro, di geometria piana, ha propositi didattici dimostrati da nitidi e precisi disegni. Il secondo, di geometria solida, verte sulla rappresentazione prospettica dei solidi. Il terzo libro determina obiettivamente l'immagine prospettica di oggetti complessi. Con la prospettiva elaborata da Piero della Francesca nelle sue opere, i nuovi criteri di rappresentazione del reale sostituiscono le immagini statiche della pittura duecentesca e ricercano nella geometria delle forme e dei rapporti prospettici il rapporto con le cose. Le figure astratte e metafisiche di Piero della Francesca dimostrano che la prospettiva non è necessaria soltanto a quelle culture che, tendendo al realismo, affidano all'immagine il compito di riprodurre la realtà.

Le opere artistiche del pittore di Borgo San Sepolcro evidenziano la tendenza dell'uomo del Quattrocento a indagare, a studiare la realtà in cui vive, che lo porta a definire le leggi della prospettiva, a considerare le immagini nel loro volume, nelle loro proporzioni e relazioni. Nell'antichità classica il ruolo della simmetria come principio ispiratore nella concezione del mondo fisico veniva accentuato dalla rarità di figure solide analoghe ai poligoni regolari. Mentre infatti nel piano abbiamo un'infinità numerabile di poligoni regolari corrispondenti ai gruppi finiti di rotazioni, nello spazio tridimensionale si possono realizzare soltanto cinque poliedri regolari : il *cubo*, il *tetraedro*, l'*ottaedro*, il *dodecaedro* e l'*icosaedro*. Questi poliedri regolari sono tradizionalmente chiamati *solidi platonici* per il ruolo fondamentale che giocano nella cosmogonia elaborata da Platone. Costui, nel suo dialogo, *Timeo*, associa il tetraedro, l'ottaedro, il cubo, e l'icosaedro rispettivamente a quelli che erano allora ritenuti i quattro elementi fondamentali : *fuoco, aria, terra* e *acqua*. Il dodecaedro, non realizzabile unendo opportunamente triangoli (come invece avviene per gli altri poliedri citati), veniva invece associato all'immagine del cosmo intero, realizzando la cosiddetta *quinta essenza*. Questa identificazione suggerisce un'immagine di perfezione che indubbiamente nasce dal fatto che il dodecaedro approssima più degli altri poliedri regolari la sfera.

Oggi però sappiamo, grazie innanzitutto all'intuizione di Poincaré e ad altre ingegnose costruzioni suggerite da diversi matematici (Max Dehn, James Waddell Alexander, Helmut Kneser), che lo spazio dodecaedrico di Poincaré, detto anche "sfera di omologia", non può essere trasformata topologicamente (cioè per deformazione elastica) in una sfera, e ciò nonostante esso possegga gli stessi "numeri di Betti"[12] e gli stessi "coefficienti di torsione"[13] di una sfera (lo spazio dodecaedrico 3-

---

[12] I numeri di Betti consentono di descrivere la connettività delle superfici e degli spazi a un numero qualsiasi di dimensioni. Essi permettono di capire le caratteristiche di un qualsiasi oggetto geometrico, in particolare il numero di componenti (o regioni) che lo compongono, o il numero di buchi che possiede, i quali specificano il suo grado di disconnettività. Un oggetto geometrico ha un numero di Betti superiore di 1 rispetto al suo numero di dimensioni ; si tratta di una proprietà fondamentale, intrinseca. Così, gli oggetti a 1 dimensione come il cerchio hanno numero di Betti 2, b_2, gli oggetti bidimensionali come le superfici delle palle, le ciambelle con due buchi e i *bretzels* hanno numero di Betti 3, b_3. Intuitivamente, l'ennesimo numero di Betti determina la connettività n-dimensionale o il numero di buchi di un oggetto geometrico a n dimensioni (superficie, spazio, …)

[13] I coefficienti di torsione misurano il tipo e il grado di torsione di un oggetto geometrico. Una banda circolare la si può torcere fino a che diventi un nastro di Möbius, che è un oggetto geometrico provvisto di torsione. Per convincersene, basta percorrere tutto il bordo del nastro, e alla fine ci si renderà conto che ci sono voluti

dimensionale di Poincaré è uno spazio senza buchi e privo di torsione). Si tratta di un problema topologico profondo e complesso che non esporremo qui.

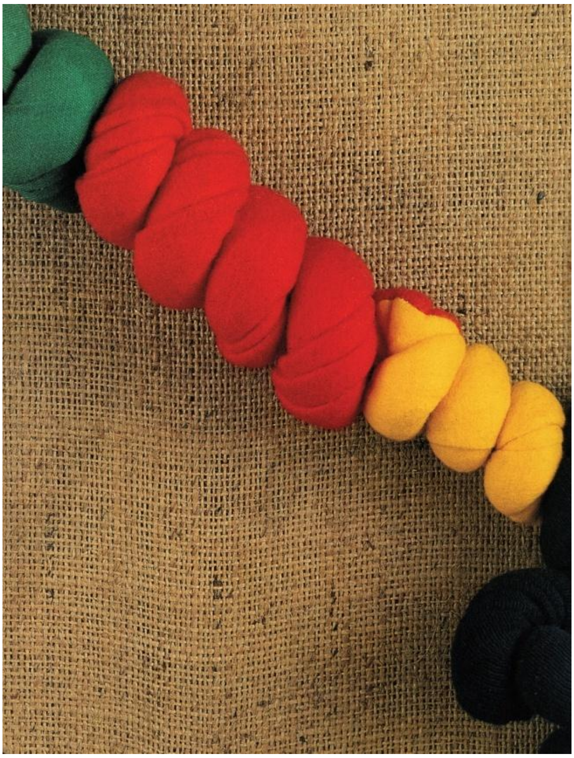


Figura 18. Illustrazione artistica di un tipo di torsione (Jorge E. Eielson, Torsione, 1994). Si tratta di una corda colorata avvolta su se stessa. Una corda avvolta mediante torsione acquista energia e perde massa. Il torcere un oggetto malleabile ha come effetto di trasformarlo in qualcosa d'altro, e la forza con la quale si effettua tale

due giri per percorrere l'intero bordo. Molti oggetti materiali così come molti spazi che hanno un legame non casuale con il mondo fisico sono provvisti di torsione. Anche un cilindro avvitato su sé stesso o una treccia sono degli oggetti geometrici dotati di torsione. In certe forme di danza e di ginnastica o in certi sport come il tuffo, il movimento rotatorio del corpo sul suo asse longitudinale è un esempio particolarmente interessante di torsione. La geometria e la dinamica della torsione è fondamentale per spiegare una grande varietà di fenomeni fisici, biologici e psichici. Esiste una classe molto importante di spazi, detti "spazi con torsione" (o anche "spazi di Cartan" dal nome del suo inventore), che giocano un ruolo fondamentale nella modellazione dei fenomeni fisici, sia gravitazionali che quantistici. La torsione di certe strutture macromolecolari nella cellula ha un importante significato funzionale. Ai gradi di torsione di un oggetto fisico (per esempio di un corpo) è possibile anche associare delle valenze di senso (o delle variazioni semantiche) che ne indicano i tassi di trasformazione rispetto a una finalità o a un'intenzione.

operazione, gli conferisce una certa quantità di energia che si conserva come risultato della deformazione. Questa semplice esperienza mostra che massa e energia non sono equivalenti, come tutta la fisica relativista ci ha insegnato. La torsione è fondamentale per la vita, a cominciare dal suo livello molecolare. Il DNA è avvolto in forma di doppia elica, nella quale entrambe ruotano attorno ad un asse. Un ulteriore ripiegamento o una torsione di tale asse su se stesso producono un superavvolgimento del DNA. Il superavvolgimento del DNA è, in genere, una manifestazione della tensione strutturale, mentre se non esiste alcun ripiegamento si dice che il DNA si trova in uno stato rilassato. Una modesta torsione provoca un grosso avvolgimento; una grossa torsione non modifica l'avvolgimento della catena di DNA. Il superavvolgimento può prendere forme differenti. L'immagine della figura illustra il *superavvolgimento a solenoide*, cha ha la forma di stretti avvolgimenti levogiri attorno ad una struttura immaginaria a forma di tubo. Come si intuisce, questa tensione, che agisce come una forza dinamica, può produrre un cambiamento di forma della doppia elica, e questa nuova forma modifica la funzionalità delle strutture macromolecolari. La torsione presenta degli aspetti straordinari anche nel mondo vegetale, dove essa è da ricollegarsi al fenomeno dell'*aptotropismo* (dal greco *apto*, tocco e *trepo*, volgo). Se per esempio con un bastoncino tocchiamo il viticcio di una zucca, osserviamo poco dopo che il viticcio si curva e tende ad avvolgersi dalla parte dalla quale è stato toccato. Questo avviene per la capacità che hanno molte piante di percepire un contatto e reagire. Molto evidente è la sensibilità al tatto delle piante rampicanti che sono munite di viticci i quali sono in grado si avvolgersi a dei sostegni. La torsione è tra i gesti primordiali dell'immaginazione matematica, e infatti essa consente di generare nuove curve, superfici e varietà contenenti diversi tipi di singolarità e nuove proprietà geometriche e topologiche.

La fortuna dei solidi platonici nell'immaginario scientifico della cultura occidentale è stata enorme, ed è forse connessa ad un punto di vista filosofico che riteneva di poter penetrare profondamente nei segreti della creazione guardando a questi simulacri euclidei delle idee di Platone. Arte e scienza si intrecciano in maniera profonda nel *Libellus de corporibus regularibus* di Piero della Francesca. L'idea che ispira un tale progetto è di una profonda originalità e singolare modernità nel senso che si vuole sostenere (siamo alla fine del XV secolo), contro i pregiudizi di certi teologi, scienziati e umanisti, come la scienza non sia mera astrazione o pura tecnica, ma anche e soprattutto forma di conoscenza e arte di creazione.

Ci pare interessante citare qualche passaggio di Yves Bonnefoy sul significato della prospettiva e dell'opera di Piero della Francesca :

> Urbin, ce n'est seulement le musée où la surprenante prédelle de Paolo Uccello attire dans son abîme, c'est le palais dont l'architecture savante est l'émanation même de l'art de Piero della Francesca. Et réfléchir à celui qui, s'il en fut un, a bien été le maître des nombres conduit à mieux comprendre pourquoi il chercha, et si bien, à produire de l'harmonie dans les formes ; et comment le nombre qui n'est qu'un rêve, l'incessant rêve du platonisme à travers l'histoire, peut tout de même aider à se dégager du rêve, sans rien oublier pourtant, dans cette expérience nouvelle et soudain lucide, des aspirations qui avaient donné vie à ce grand mirage. Ce qui lui vaut d'être maintenant un miroir de l'existence comme elle est, non comme on la veut : un moyen pour la vérité. Comment la beauté des formes peut-elle échapper

> aux pièges de l'imagination désirante ? Ce fut, au cours du XVe siècle, à l'aide de la « prospectiva pingendi » ou, plus précisément, de la façon dont elle fut employée par certains artistes dans les premiers temps de son invention. La perspective comme de grands Toscans l'ont élaborée au Quattrocento, Dieu sait si on peut la mettre au service du fantastique, de l'irréel, du rêve : et ce fut vite le cas… (…) La perspective et son projet d'origine se soucie moins de la maîtrise abstraite de l'espace que de rétablir un rapport de la personne à son lieu naturel – et à son corps – qu'avait étouffé depuis trop longtemps la pensée purement verbale des théologiens médiévaux. Elle est une incitation à sortir de cette nuit-là, et un moyen pour le faire : son apport, son vrai apport, n'étant pas l'étendue mais la lumière du jour comme il se lèvera plus limpide dans des lieux de plus de raison. La lumière de ces matins d'été où le monde semble s'offrir.[14]

Per finire, va evidenziato che il filo conduttore dell'opera di Piero della Francesca consisteva nel collegare lo studio teorico della matematica all'attività pittorica. La sua figura non può essere pienamente colta se non si comprendono i rapporti tra le riflessioni sulla prospettiva e i suoi dipinti. Appare chiaro, anche ad una lettura di solo alcuni dei suoi scritti più importanti, in particolare del testo *De prospectiva pingendi*[15], che per Piero la prospettiva non fosse un codice da applicare rigidamente, ma una possibilità creativa e che raffigurare lo spazio per mezzo di essa equivalesse a conoscerlo, dapprima in forma oggettiva, mediante la regola matematica e poi a comprenderlo in forma soggettiva attraverso le relazioni fra l'individuo e le cose. Compito del pittore era trascrivere questa comprensione in modo che l'osservatore potesse immedesimarsi con naturalezza nella realtà mostrata dalla pittura, senza che vi fossero elementi capaci di sovvertire le aspettative visive, ma piuttosto confermandole con l'evidenza del riscontro matematico. Per Piero, infatti, il mondo naturale era regolato da leggi « divine » e la matematica era la loro metafora.

Va osservato che lo stretto intreccio di interessi artistici e scientifici è caratteristica comune tra gli artisti rinascimentali, uomini poliedrici e culturalmente pervasi dall'idea di universalità del sapere ; in tale unitarietà dell'attività spirituale, la stessa differenziazione tra scienza e arte sfuma in un interesse totalmente finalizzato alla comprensione del mondo e della natura, delle leggi che li regolano e della loro bellezza. In questo contesto vanno

---

[14] Yves Bonnefoy, *L'arrière-pays*, Gallimard, 2005, pp. 167-169.

[15] Piero nel *De prospectiva pingendi* tratta sostanzialmente soltanto della prospettiva geometrica, e cioè della rappresentazione spaziale configurata attraverso il disegno e in cui gli scorci delle forme verso la profondità sono razionalmente calcolabili. Nell'attività pittorica, tuttavia, egli usa almeno altri due modelli di rappresentazione prospettica : l'uno procede attraverso la riduzione proporzionale degli oggetti, ottenuta senza l'uso di una gabbia geometrica che inquadri le forme ; l'altro utilizza invece l'illusione ottica. Non si tratta di semplice « flessibilità nell'approccio pratico alle tecniche della prospettiva », come si è affermato, ma di scelte operative che offrono una soluzione adeguata e coerente alle diverse esigenze figurative, non previste nel trattato di Alberti *De Pictura* (1436).

interpretate sia la tanto citata affermazione di Leonardo, « non mi legga chi non è matematico » nel suo *Trattato della Pittura*, sia la definizione che Piero della Francesca pone all'inizio del Libro Terzo del *De Prospectiva Pingendi* a sostegno della « necessità » della conoscenza della Prospettiva[16] nelle arti visive : « la pictura non è se non dimostrazioni de superficie e de corpi degradati o accresciuti nel termine ».

Nel cercare regole, metodi e modelli per cogliere il reale, gli artisti del Quattrocento italiano diventarono artefici di scoperte scientifiche, grazie alla loro capacità di comprendere la realtà senza prescindere dall'aspetto pratico del sapere, tipico dell'artigiano. In questo contesto umanistico, tendente ad armonizzare in un sistema razionale i molteplici aspetti della realtà, l'arte, attraverso il rigore matematico della prospettiva, mira ad attribuire alla rappresentazione spaziale un carattere di universalità, eliminando casualità e contraddizioni. Lo spazio tridimensionale è di conseguenza necessariamente omogeneo, geometricamente organizzato secondo le leggi della proporzione e dell'armonia (in accordo con il rigore del metodo logico-deduttivo inaugurato da Euclide), e la matematica fornisce al nostro intelletto gli strumenti necessari per la comprensione della bellezza del creato.

6. Tassellazioni piane, modelli di spazio e paradossi percettivi

Il legame tra matematica e arti figurative si è intensificato ogni volta che, da Leonardo ai cubisti, si è cercato di rappresentare figure geometriche, in particolare solidi di varia forma. Nel secolo scorso, l'artista M. C. Escher

[16] Si intende col termine *prospettiva* un insieme di metodologie che consentono di rappresentare su un piano (o un'altra superficie bidimensionale) oggetti dello spazio tridimensionale, in modo che il disegno rappresenti, il più fedelmente possibile l'oggetto reale, creando quindi l'illusione della visione diretta. Per esigenze di schematizzazione geometrica, la prospettiva generalmente considerata in matematica è la cosiddetta *prospettiva lineare* o *geometrica*, contrapposta alla *prospettiva aerea* che tiene conto anche delle norme da seguire relative alle molteplici variazioni di colore, luce e forma derivanti dalla presenza dell'atmosfera. Il principio di base sul quale si fonda quest'ultima è che gli oggetti della stessa forza di tono impallidiscono nell'allontanarsi in funzione della distanza, a causa dell'aumento della quantità di atmosfera interposta fra essi e l'occhio. Si tratta di fenomeni di luce assai complessi che, con la eccezione della *teoria delle ombre*, si presta con difficoltà ad una trattazione puramente geometrica. La prospettica lineare, considerata come l'insieme delle regole e delle proprietà geometriche che consentono di risolvere il problema della rappresentazione prospettica, creando l'illusione della visione tridimensionale dell'oggetto, risponde, in un certo senso, a una esigenza più artistica che scientifica. Si osservi a questo riguardo che, assegnata la figura obiettiva, la sua immagine prospettica su un dato quadro e da un dato punto di vista risulta univocamente determinata, ma non altrettanto può dirsi invece per il problema inverso. La prospettiva lineare non ci permette infatti di passare senza ambiguità dalla rappresentazione sul quadro alla figura obiettiva ; l'esigenza di costruire metodi di rappresentazione bidimensionali che consentano la ricostruzione dell'oggetto in forma, posizione e grandezza ha dato luogo ad un importante ramo della matematica, noto come *Geometria descrittiva*.

occupa un ruolo di spicco nello sviluppo del dialogo tra arte e matematica. Escher è stato particolarmente attratto dai poliedri regolari (o *solidi platonici*) perché questi "simboleggiano in maniera impareggiabile l'umana ricerca di armonia e ordine". Essi hanno per facce uno stesso poligono regolare, con lo stesso numero di facce ad ogni vertice, e il matematico greco Teeteto scoprì che sono solo cinque: tetraedro, ottaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro. Cubo e ottaedro sono detti *reciproci*, perché uno ha tre facce quadrate in ogni vertice, l'altro quattro facce triangolari. Il tetraedro è reciproco di se stesso, perché ha tre facce triangolari in ogni vertice. L'intersezione di due tetraedri uguali si chiama *stella ottangula* e ha interessanti proprietà : guardando al suo interno, essa è costituita da un ottaedro sulle cui facce sono state poste piramidi triangolari ; guardando al suo esterno, i vertici della stella sono i vertici di un cubo, le cui facce hanno per diagonali i lati della stella. Questo straordinario poliedro è stato raffigurato da Escher in varie opere, e appare in particolare nell'angolo nord-est di *Stelle*, disegnato nello stile di Leonardo. Il processo di stellazione (aggiunta di piramidi sulle facce) si può applicare anche al dodecaedro, ottenendo un poliedro di "perfettamente ordinata bellezza" (detto piccolo *dodecaedro stellato*), che si può vedere come l'intersezione di dodici facce a stella regolare. In *Stelle* il poliedro principale è l'intersezione di tre ottaedri, disegnati nello stile di Leonardo, e le "stelle" sono in realtà una fantasmagoria di poliedri più o meno regolari.

Un uso particolarmente interessante dei poliedri regolari riguarda la possibilità di riempirne l'intero spazio (la cosiddetta *tassellazione dello spazio*). L'unico dei cinque solidi platonici che riempia da solo lo spazio è il cubo, ma tetraedri e ottaedri alternati (i primi in quantità doppia dei secondi) raggiungono lo stesso scopo. Escher ha rappresentato entrambe queste tassellazioni dello spazio. L'altro problema da lui affrontato riguarda la *tassellazione del piano* : esso consiste nel ricoprire l'intero piano mediante tasselli, come in un gigantesco puzzle (il problema fu studiato dal punto di vista matematico per la prima volta da Keplero nell'*Harmonice mundi*, 1619). La grande varietà di possibili tassellazioni può essere circoscritta imponendo opportune limitazioni, di cui le più ovvie sono le seguenti : (i) una tassellazione viene detta *monoedrica* se usa un solo tipo di tassello, e *biedrica* se ne usa due ; (ii) una tassellazione viene detta *isoedrica* se tutti i tasselli hanno la stessa relazione con il resto della tassellazione : in particolare, non solo sono tutti uguali, ma svolgono anche tutti lo stesso ruolo. In termini più matematici, una tassellazione è isoedrica se, dati due tasselli di qualunque tipo, esiste una isometria[17] che sposta localmente uno

[17] Formalmente, dato uno spazio X su cui sia definita una distanza d, una funzione $f : X \to X$ è una *isometria* se e solo se $\forall\, x, y \in X$ si ha che $d(x, y) = d(f(x), f(y))$. L'insieme delle isometrie che agiscono su un piano euclideo è un gruppo non commutativo. Esso contiene trasformazioni molto intuitive e utilizzate, ad esempio, nella teoria delle tassellazioni del piano. Le traslazioni formano un gruppo commutativo. Le rotazioni, invece, non formano un tale gruppo, perché la composizione di due rotazioni è una rotazione o una traslazione. Inoltre, la composizione di una riflessione e di una rotazione, o di una rotazione e una riflessione

dei due tasselli nell'altro, ma lascia globalmente invariata la tassellazione. (iii) Una tassellazione viene detta *monomorfa* se è l'unico modo possibile di combinare i tasselli per ricoprire il piano. Ad esempio, gli unici poligoni regolari che riempiano da soli il piano sono il triangolo, il quadrato e l'esagono : la tassellazione mediante esagoni è *monomorfa*, ma non è così per le tassellazioni realizzate con triangoli o quadrati. Il solo esempio tra le opere di Escher di tassellazione monoedrica ma non isoedrica è *Fantasmi* : il tassello è unico, ma è usato in maniere diverse (alcuni fantasmi sono raggruppati, altri sono isolati). L'esempio è interessante perché non isoedrico in modo essenziale : ogni tassellazione del piano che usi quel tipo di tassello deve essere non isoedrica (questo deriva dal fatto, non ovvio, che la tassellazione della figura è monomorfa).

Nel passato, molte culture come quella araba o anche nell'arte precolombiana o in quella africana, hanno sviluppato un grande interesse per le figure piane con motivi ripartiti regolarmente in modo tale da ricoprire l'intero piano. Questi motivi ammettono un infinito numero di variazioni, ma esiste solamente un numero finito di modi di riprodurli, esattamente 17. Escher non è certo dunque stato il primo artista ad usare tassellazioni del piano : l'esempio delle decorazioni moresche dell'Alhambra di Granada è ben noto, e fu da lui stesso studiato in maniera approfondita. A causa della proibizione della tradizione islamica (ma non esplicita nel Corano) di rappresentare esseri viventi, i Mori non poterono però usare altro che motivi geometrici astratti, mentre Escher trovò più significative rappresentazioni di figure animate, specialmente pesci e uccelli. Sia i Mori che Escher furono interessati ad una esplorazione sistematica della tassellazione isoedrica, ed usarono quasi tutte le 17 possibili isometrie descritte dal cristallografo russo E. S. Fedorov nel 1891 (più precisamente : 11 i Mori, e 16 Escher). Mentre i Mori dovettero ovviamente scoprire da soli le varie possibilità, Escher conobbe fin dal 1937 un famoso articolo del matematico G. Pólya apparso nel 1924, in cui le 17 possibilità erano state riscoperte e illustrate, e le ricopiò accuratamente. Per esempio, l'opera *Cavalieri* (una Xilografia realizzata da

---

è equivalente ad una riflessione. Si osservi che la composizione di una rotazione e di una riflessione non è commutativa. In formule : $Rot(\theta)\ Ref(\phi) = Ref(\phi + \theta/2)$, $Ref(\phi)\ Rot(\theta) = Ref(\phi - \theta/2)$. Le isometrie possono essere classificate in isometrie *invertenti* (o inverse) e isometrie *non invertenti* (o dirette) ; le prime comprendono le simmetrie assiali e le antitraslazioni, mentre le seconde sono le rotazioni e le traslazioni. Per capire questa distinzione, si consideri un poligono G con n lati i cui vertici siano numerati da 1 a n in senso orario, la sua immagine tramite una isometria invertente avrà i vertici numerati in senso antiorario ; se invece l'isometria è non invertente, l'ordine dei vertici non cambia. È facile osservare che la composizione di un numero qualsiasi di isometrie non invertenti è un'isometria non invertente; in altre parole, le isometrie non invertenti formano un gruppo con l'operazione di composizione. Le isometrie invertenti invece non formano un gruppo ; infatti la composizione di un qualsiasi numero pari di isometrie invertenti dà un'isometria non invertente. Inoltre è ovvio che la composizione di una qualunque isometria invertente con una qualunque isometria non invertente dà un'isometria invertente.

Escher nel 1946), insieme ai *Cigni* (1956), è una stampa in cui ricorre esplicitamente la riflessione ; i cavalieri chiari sono l'immagine riflessa di quelli scuri, e si può passare esattamente dall'uno all'altro applicando una *glissoriflessione*. L'asse di questa trasformazione è ovviamente verticale ed è posizionato o tra le schiene o tra i polsi dei cavalieri ; qui viene comunque dimostrato che i cavalieri chiari e quelli scuri insieme riempiono un'intera superficie. L'originalità matematica di Escher fu ancora più evidente nell'uso delle tassellazioni cromatiche, in cui ogni isometria che lascia invariata la tassellazione permuta i colori in modo non ambiguo. In particolare, Escher ritrovò indipendentemente 14 delle 46 possibili isometrie bicromatiche classificate da J. H. Woods nel 1936, in un lavoro che però rimase ignoto fino agli anni 50, quando i suoi risultati furono riscoperti da A. V. Shubnikov, che in seguito fu entusiasmato dai disegni di Escher.

Il problema della tassellazione si può estendere dal piano euclideo a superfici più complicate. Gli esempi più semplici di tali superfici sono la sfera e il cilindro. La *sfera* è limitata nello spazio, e può dunque essere internamente tassellata con un numero finito di tasselli. Questo fatto è, secondo Escher, "un meraviglioso simbolo dell'infinito in forma chiusa", ed egli l'ha illustrato intagliando varie sfere di legno (in particolare la *Sfera con angeli e diavoli*, 1921). Si noti che il procedimento dell'intagliatura fu usato più tardi da L. Fontana per creare la serie *Concetti spaziali, Nature* (1959-1960), raffiguranti delle grandi sfere bucate e intagliate in terracotta e in bronzo, che fornivano la rappresentazione della profondità dello spazio e di una possibile articolazione tra nuove dimensioni spaziali e dinamiche temporali. Il *cilindro* si ottiene incollando fra loro gli estremi di una striscia (infinita in una direzione). Ogni tassellazione del cilindro ne genera una del piano, perché basta ripetere all'infinito la striscia che genera il cilindro. Ma non tutte le 17 tassellazioni isoedriche del piano generano tassellazioni isoedriche del cilindro, perché alcune isometrie si possono perdere. Escher ha illustrato la tassellazione del cilindro piastrellando varie colonne. La *striscia di Möbius* si ottiene incollando fra loro gli estremi di una striscia (infinita in una direzione), dopo averle fatto compiere un mezzo giro (o, più in generale, un numero dispari di mezzi giri). Essa gode di due interessanti proprietà : ha una sola faccia, invece di due come le solite superfici ; e se la si taglia lungo la linea centrale della striscia non la si separa in due, come per il cilindro, bensì se ne raddoppia la lunghezza (ottenendo una striscia che non è più di Möbius, e che ha due facce). Queste proprietà sono così strane che hanno distratto Escher dal problema della tassellazione, facendogli produrre invece le due efficaci *Striscie di Möbius,* la prima con un solo giro, la seconda con tre.

Le *tassellazioni iperboliche* sono soltanto l'ultimo stadio di una serie di sperimentazioni che Escher effettuò con tassellazioni le cui figure rimpiccioliscono quando si avvicinano a un limite, e che si possono classificare in tre tipi : (i) usando come limite un punto, la tassellazione richiede ancora l'intero piano : infatti le figure si ingrandiscono senza limite a mano a mano che si allontanano dal punto ; (ii) usando come limite una retta, la tassellazione richiede ancora (o solo più) metà del piano. Escher ritenne che il guadagno non fosse molto, e non seppe mai che in tal modo avrebbe invece potuto tassellare secondo il *modello di Poincaré* ; (iii) usando come limite una circonferenza, come nel *Limite del cerchio IV* (1960)[18], la tassellazione richiede solo più di una zona limitata, pur rimanendo infinita. Questa era proprio la soluzione che Escher aveva invano cercato, senza riuscire a trovarla da solo.

Questa rappresentazione dell'infinito anticipa di qualche decennio la formulazione matematica del concetto di "frattale" ad opera di Benoît Mandelbrot. I frattali sono la descrizione visiva di particolari equazioni matematiche e si presentano come figure autosomiglianti : ingrandendone una parte ci si ritrova alla struttura di partenza, in un processo che può estendersi all'infinito.

Ricordiamo che nel modello di Poincaré valgono le seguenti proprietà : (a) il piano è la regione delimitata da una circonferenza, con l'esclusione della stessa ; (b) il punto è un qualsiasi punto interno alla circonferenza ; di conseguenza, i punti appartenenti al bordo della circonferenza non sono inclusi nel modello ; (c) la retta è ogni diametro della circonferenza e ogni arco di circonferenza ortogonale e interno a questa figura. Si dimostra inoltre che per due punti del piano di Poincaré passa una e una sola retta, e per un punto qualsiasi interno alla circonferenza passano una infinità di rette (cioè archi di cerchio ortogonali alla circonferenza). Un altro modello simile, per il quale valgono le stesse regole e definizioni del precedente, è il *semipiano di Poincaré* ; in esso il centro della circonferenza è all'infinito e la circonferenza diventa una retta. I diametri diventano una retta perpendicolare alla retta, e gli archi ortonormali, circonferenze aventi il centro sulla retta.

L'interesse di Escher per le tassellazioni non era fine a se stesso, ma ad una loro trasfigurazione artistica. Frammenti di tassellazioni appaiono così in una sessantina di suoi lavori, in cui egli sfruttò a fondo il fatto che in una tassellazione biedrica ciascuno dei due tipi di tasselli svolge due ruoli complementari, di figura e sfondo, secondo un principio basato sul cosiddetto *vaso di Rubin* (in cui due profili di facce possono essere visti come il contorno di un vaso). Poiché non è però possibile percepire una figura in assenza di sfondo, il risultato è un'alternanza instabile di due figure, ciascuna delle quali viene percepita per un breve periodo sullo sfondo dell'altra. In altre parole, "i profili di Rubin" consentono due soluzioni non percepibili simultaneamente (profili umani o vaso). Alcuni percepiscono per prima la figura antropomorfa, cioè i profili umani, mentre altri, invece, percepiscono

---

[18] Questo lavoro è stato analizzato in dettaglio dal punto di vista matematico da H.S.M. Donald Coxeter. Esso costituisce un ulteriore adattamento della tassellazione del piano euclideo con angeli e diavoli. In quest'opera, però, le ali si incontrano a 4 a 4, e i piedi a 3 a 3. Si può anche notare che tutti gli angeli, così come tutti i diavoli, hanno le stesse dimensioni iperboliche, nonostante l'apparente diminuzione euclidea, dovuta al fatto che le distanze si misurano diversamente nei due casi.

per primo il vaso[19]. Impiegando variazioni dinamiche nelle tassellazioni biedriche secondo principi e tecniche della psicologia della Gestalt, di cui era interessato conoscitore, Escher riuscì ad illustrare convincentemente il passaggio dal bidimensionale al tridimensionale e la morfogenesi, facendo evolvere indipendentemente e gradualmente i due tipi di tasselli in figure indipendenti e spaziali. Simmetricamente, le metamorfosi di Escher evidenziano la sintesi dialettica, fra positivo e negativo, che le tassellazioni biedriche contengono.

6.1. La relazione figura/sfondo e le variazioni del contenuto percettivo

Rubin ha mostrato che l'articolazione « figura-sfondo » obbedisce a determinate condizioni, conoscendo le quali è possibile prevedere quale zona del campo assumerà con maggiore probabilità ruolo di « figura » rispetto alle altre zone. Le più importanti di tali condizioni sono la *grandezza relativa delle parti*, i loro *rapporti topologici* e i *tipi dei loro bordi*. A parità di condizioni, tenderà cioè ad emergere come figura la zona *più piccola* e così sarà favorita nel ruolo di figura una zona *inclusa* e delimitata da altre aree, le quali assumeranno piuttosto carattere di sfondo. Un'altra condizione che influisce sulla ripartizione figura-sfondo è la convessità o la concavità dei bordi : in molte figure elementari viene infatti percepita come « figura » preferibilmente la zona verso la quale il bordo curvilineo od angolare volge la propria parte « interna » : a parità delle altre condizioni, tende cioè a diventare figura l'area con bordi convessi piuttosto che quella con bordi concavi. In generale, le figure a bordi convessi tendono a prevalere sulle zone delimitate da bordi concavi, i quali appaiono più facilmente come sfondo inarticolato (cioè privi di forma). Una certa influenza ha *l'orientamento spaziale* : tendono cioè ad essere « figura » le zone del corpo i cui assi coincidono con le direzioni principali dello spazio, la verticale e l'orizzontale. Naturalmente, quando nessuna delle condizioni menzionate privilegia una parte del campo sulle altre, si ha una situazione di ambiguità, nella quale domina l'instabilità e la continua *reversibilità* del rapporto figura-sfondo. In tal caso, esercita un certo ruolo anche *l'impostazione soggettiva* dell'osservatore, che mediante la direzione dell'attenzione può influire sulla ripartizione figura-sfondo risultante.

La percezione di certe figure "paradossali" (o certi oggetti "impossibili") è legata alla questione della relazione figura-sfondo. Dal punto di vista percettivo esistono notevoli differenze funzionali tra la regione del campo che assume carattere di figura e quella che svolge il ruolo di sfondo. La figura ha carattere *oggettuale*, è una « cosa », mentre per lo sfondo tale carattere è molto meno pronunciato, fino a mancare quasi del tutto quando lo

---

[19] Secondo Rubin, l'organizzarsi della situazione in un insieme figura-sfondo obbedisce a determinate condizioni in base alle quali è possibile prevedere quale zona del campo percettivo acquisterà il ruolo di figura rispetto ad altre zone. Tra le più importanti di tali condizioni ci sono la grandezza delle parti (si percepisce come figura l'area più piccola), i loro rapporti topologici e la tipologia dei loro bordi.

sfondo è vissuto come spazio vuoto. La figura ha un aspetto più solido, le sue superfici hanno un colore più compatto, anche se per caso riflettono fisicamente lo stesso tipo e la stessa quantità di luce dello sfondo. La figura possiede un maggiore *risalto*, attira lo sguardo, è ciò di cui normalmente ci occupiamo, a cui facciamo attenzione molto più che allo sfondo. Solo la figura ha un contorno, i bordi delimitano la figura ma non servono a delimitare lo sfondo che invece passa dietro alla figura. Anche per quanto riguarda la *localizzazione spaziale* vi è dunque una distinzione : in genere la figura sta davanti o sopra lo sfondo.

Alcune delle opere più famose di Escher sono perfette illustrazioni della validità logica dei cosiddetti « oggetti impossibili », oltre che di alcuni ben noti paradossi percettivi, basati sul contrasto tra percezione e interpretazione dei dati sensoriali, e sul condizionamento fisiologico e culturale che spinge a considerare figure bidimensionali come rappresentazioni di oggetti tridimensionali. La litografia *Belvedere* è ispirata al *cubo di Necker*, che si ottiene disegnando un cubo in prospettiva con tutti i lati in evidenza : così facendo si crea un'ambiguità su quale delle facce sia davanti e quale dietro, e due possibili cubi si alternano nella percezione. Il cubo di Necker è disegnato nel progetto che sta ai piedi del personaggio seduto sulla panca (con i due punti problematici evidenziati), ed egli tiene in mano un modello di *cubo impossibile*, in cui l'ambiguità viene risolta fondendo le due possibilità, e creando così un cubo localmente corretto (nella parte alta e in quella bassa), ma globalmente impossibile. L'edificio della figura realizza poi il cubo impossibile, congiungendo paradossalmente la parte alta e quella bassa, che sono separatamente consistenti. Altri casi di ambiguità percettive particolarmente significative risaltano nelle opere *Convesso e concavo*, nella *scala di Schröder*, e in *Relatività*, che combina la scala di Schröder con il triangolo impossibile. Un uso spettacolare del triangolo impossibile si ha in *Cascata*, dove esso appare tre volte consecutive nella rappresentazione di un canale che sembra localmente in piano, ma globalmente in salita. Escher crea così l'impressione doppiamente paradossale, da un punto di vista fisico, di un moto perpetuo generato dall'acqua che scorre all'insù. Si noti come l'intera figura sia in realtà la sovrapposizione di due figure separatamente consistenti : due torri (una a tre piani e l'altra a due), ed un canale orizzontale (con i lati due a due perpendicolari). In *Salire e scendere* si rappresenta infine la *scala di Penrose* (padre), in cui un moto perpetuo è generato in modo opposto a quello di *Cascata* : non mediante un percorso in salita che dovrebbe essere in piano, ma da un percorso in piano che dovrebbe essere in salita. Che la scala sia in piano lo si intuisce tenendo l'immagine non perpendicolarmente al campo visivo (come normalmente la si osserva), ma (quasi) parallelamente ad esso. Gli scalini sono in realtà posti uno sull'altro come tegole su un tetto piano, o libri su un tavolo, in modo da formare un quadrilatero : l'illusione deriva dal disegnare come verticali i prolungamenti delle altezze degli scalini, che sono in realtà linee oblique. Poiché però tali prolungamenti vanno in direzioni opposte su lati opposti del quadrilatero, l'edificio si può disegnare solo a metà, ed esso non potrebbe stare in piedi.

Paradosso a parte, Escher vide qui una metafora dell'assurdità della vita, non solo del "come è duro calle lo scendere e'l salir per l'altrui scale" (*Paradiso*, XVII, 59-60), ma anche di quanto tale affanno sia inutile, e non porti in realtà da nessuna parte.

In conclusione, possiamo dividere i sei paradossi percettivi usati da Escher in due classi. Tre di essi (il cubo di Necker, i cubi reversibili e la scala di Schröder) sono semplicemente *figure ambigue*, che rappresentano più di un oggetto allo stesso tempo, su cui la percezione è incerta e non riesce a decidere. I rimanenti tre (cubo impossibile, triangolo impossibile e scala di Penrose) sono invece *figure assurde*, che rappresentano un solo oggetto ben definito. L'assurdità delle figure del secondo gruppo è però di un tipo molto particolare : essa risiede soltanto nella loro interpretazione, e non nel fatto che esse siano rappresentazioni di percezioni impossibili. Si è infatti mostrato, per esempio, come una serie di sbarre perpendicolari due a due (ovviamente formanti non un triangolo chiuso, ma una figura aperta) possa sembrare un triangolo impossibile, se osservato da un particolare punto di vista. Analogamente, un modello di cubo con due lati discontinui può sembrare un cubo impossibile, se osservato da un particolare punto di vista (perché le discontinuità permettono di vedere lati che stanno in realtà sul retro).

Ringraziamenti. Sono grato a Maria Giulia Dondero per la rilettura attenta che ha fatto di questo lavoro e i miglioramenti che ha reso possibili.

Bibliografia

Adams, C. C., *The Knot Book. An Elementare Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, W. H. Freeman, New York, 2000.

Alexander, J.W., "Topological invariants of knots and links", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 30 (2), 1928, 273-306.

Arnheim, R., *Arte e percezione visiva*, Feltrinelli, Milano, 1962.

Bachelard, G., *La poétique de l'espace*, Presses Universitaires de France, Paris, 1957.

Benedetti, R. e M. Dedò, *Una introduzione alla geometria e topologia delle varietà di dimensione tre*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, 1984, pp. VIII-152.

Boi, L ., « La Géométrie : clef du réel ? Pensée de l'espace et philosophie des mathématiques », *Philosophiques*, 24 (1997), pp. 389-430.

Boi, L. Kerszberg, P. Patras, F. (a cura di), *Rediscovering Phenomenology. Phenomenological essays, mathematical beings, physical reality, perception and consciousness*, Springer-Verlag, Dordrecht, 2007.

Boi, L., « De la surface à la couleur, ou du rapport entre étendue spatiale et qualités sensibles », *Visio*, 2 (2), 1997, 9-26 (avec L. Verner).

Boi, L., « La realtà come creazione e trasformazione di nodi », in *Jorge Eielson – Arte come Nodo/Nodo come dono*, Gli Ori Editore, Pistoia, et Centro Studi Jorge Eielson, Firenze, 2008, pp. 38-55.

Boi, L., « Les géométries non euclidiennes, le problème philosophique de l'espace et la conception transcendantale ; Helmholtz et Kant, les néo-kantiens, Einstein, Poincaré et Mach », *Kant-Studien*, 87(3), 1996, pp. 257-289.

Boi, L., « Mathematical Knot Theory », in *Encyclopedia of Mathematical Physics*, J.-P. Françoise, G. Naber, T. S. Tsun (a cura di), Elsevier, Oxford, 2006, pp. 399-406.

Boi, L., « Mathématiques créatives, physiques significatives e le livre ouvert de la nature : quelques remarques sur la théorie des systèmes dynamiques et chaotiques, le déterminisme et la nature du temps », *Eikasia*, 27 (2009), pp. 215-247 (avec E. Bois).

Boi, L., « Nodi, buchi e spazi nell'arte e nella scienza. Le profonde analogie tra creazione artistica e immaginazione scientifica », *Intersezioni*, 30(3), 2010, pp. 439-462 (avec C. Luna).

Boi, L., « Phénoménologie et méréologie de la perception spatiale, de Husserl aux théories néo-gestaltistes », in *Rediscovering Phenomenology. Phenomenological essays concerning mathematical beings, physical reality, perception and consciousness*, op. cit., pp. 40-80.

Boi, L., « Sept variations fondamentales sur le thème de l'espace », in *La sémiotique visuelle: nouveaux paradigmes*, a cuira di M. Costantini, l'Harmattan, Paris, 2010, pp. 71-118.

Boi, L., « Sur quelques aspects phénoménologiques, géométriques et esthétiques de la perception et de la relation entre surface, forme et couleur », *Visio*, 6 (2-3), 2001, pp. 205-247 (avec L. Verner).

Boi, L., « The 'Revolution' in the Geometrical Vision of Space in the Nineteenth Century, and the Hermeneutical Epistemology of Mathematics », in *Revolutions in Mathematics*, D. Gillies (a cura di), Oxford, Oxford University Press, 1992, pp. 183-208.

Boi, L., « The *Aleph* of Space. On some extensions of geometrical and topological concepts in the twentieth-century mathematics : from surfaces and manifolds to knots and links », in *What is Geometry ?*, G. Sica (a cura di), Polimetrica, International Scientific Publisher, Milan, 2006, pp. 79-152.

Boi, L., « Symétries et formes en mathématiques et dans la nature », in *Le Dinamiche della Bellezza. Pensieri e percorsi estetici, scientifici e filosofici*, L. Boi et R. Barbanti (a cura di), Raffaelli Editore, Rimini (Italie), 2005, pp. 337-392.

Boi, L., *Espace e Perception : objets, formes et qualités*, Presses de l'Université d'Ottawa, Ottawa, 2012 (di prossima pubblicazione).

Boi, L., *Morphologie de l'Invisible. Transformations d'objets, formes de l'espace, singularités phénoménales et pensée diagrammatique*, Presses Universitaires de Limoges, Limoges, 2011.

Boi, L., *Pensare l'Impossibile. Dialogo infinito tra arte e scienza*, Springer-Italia, Milano, 2012.

Carter, J. S. e Saito, M. *Knotted Surfaces and Their Diagrams*, Mathematical Surveys and Monographs, 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

Calvino, I., *Cosmicomiche*, Einaudi, Torino, 1965.

Dehn, M., « Über die Rauminhalt », *Mathematische Annalen*, 55 (1901), pp. 465-478.

Farné, M. (a cura di), « Illusione e Realtà. Problemi della percezione visiva », *Le Scienze*, numero speciale Milano, 1978.

Francis, G. K., *A Topological Picturebook*, Springer-Verlag, New York, 1987.

Geymonat, G., Sanini, A. e Valabrega, P. « Geometria e topologia », *Enciclopedia Einaudi*, vol. 6, Torino, 1979, pp. 616-723.

Gibson, J. J., *Un approccio ecologico alla percezione visiva*, Il Mulino, Bologna, 1999.

Gombrich, E., *Art and Illusion*, Princeton University Press, Princeton, 1961 (ed. it. *Arte e illusione*, Einaudi, Torino, 1990).

Gromov, M., “Spaces and questions”, *Geom. Funct. Anal.*, Special Volume, Part I, 2000, 118-161.
Hilbert, D. e S. Cohn-Vossen, *Anschaulische Geometrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1932 (ed. it. *Geometria intuitiva*, Bollati Boringhieri, Torino, 2001).
Husserl, E., *Ding und Raum, Vorlesungen 1907*, a cura di U. Claesges, Martinus Nijhof, 1973.
Kanizsa, G., *Grammatica del vedere*. *Saggi su percezione e gestalt*, Il Mulino, Bologna, 1980.
Klein, F., *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Springer-Verlag, Berlin, 1909.
Kauffman, H.L., *Knots and Physics*, World Scientific, Singapore, 1989.
Laudenbach, F., *Topologie de la dimension trois, homotopie et isotopie*, *Astérisque*, Soc. Math. de France, 1975, 152 p.
Merleau-Ponty, M., *Phénoménologie de la perception*, Gallimard, Paris, 1964.
Milnor, J., « On the curvature of knots », *Acta Mathematica*, 56 (1964), 123-132.
Moise, E. E., *Geometric Topology in Dimension 2 and 3*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.
Panofsky, E., *La prospettiva come « forma simbolica »*, trad. di E. Filippini, con uno scritto di M. D. Emiliani, Abscondita, Milano, 2007.
Poincaré, H., « Pourquoi l’espace a trois dimensions ? », in *Dernières Pensées*, Flammarion, Paris, 1933.
Prasolov, V. V., *Intuitive Topology*. American Mathematical Society, Providence, 1995.
Rubin, E., *Experimenta Psychologica*, Munksgaard, Copenhagen, 1949.
Rushing, T.B., *Topological Embeddings*, Academic Press, New York, 1973.
Seifert, H., « Der Drei-Dimensionaler Raum », *Mathematische Annalen*, 65 (1928), 23-38.
Smale, S., « A classification of immersions of the two-sphere », *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90 (1958), 281-290.
Thom, R., « Topologie et signification », in *Modèles mathématiques de la morphogenèse*, C. Bourgois, Paris, 1980.
Thurston, W., *Three-Dimensional Geometry and Topology*, a cura di S. Levy, Princeton University Press, Princeton, 1997.
Weeks, J., *The Shape of Space*, Marcel Dekker, New York, 1985.
Zeeman, C., *An Introduction to Topology. The Classification Theorem for Surfaces*, Preprint, Mathematics Institute, University of Warwick, June 1966, 51 p.

L’image mathématique (suite)

Jean-François BORDRON
CeReS- Université de Limoges

Si l’on parle des images, prises en général, il nous semble nécessaire de distinguer différents niveaux d’analyse, que l’on peut présenter ainsi : en premier lieu, nous devons poser un principe général d’*iconicité* qui se réalise dans toute forme d’image et que l’on peut définir succinctement en disant que l’on qualifie d’iconique toute forme ayant acquis un certain degré de stabilité quant à ses composants internes (stabilité méréologique). Ainsi définie, l’iconicité n’assure pas à elle seule l’identité. Celle-ci relève d’un acte d’identification conçu *ordinairement* comme symbolique. Ce point est important car, comme nous le verrons dans cette étude, l’identité n’est pas toujours nécessaire ni souhaitable.

En deuxième lieu, l’iconicité peut se réaliser dans des *images* de natures très diverses. Le plus simple est de remarquer que les perceptions sonores, comme les perceptions gustatives, tactiles, et en un certain sens mentales, sont tout autant productrices d’images que la perception visuelle à laquelle on donne une certaine primauté. Par ailleurs, l’image mathématique pose le problème délicat des idéalités, auxquelles il est difficile de refuser un certain degré d’iconicité, mais dont on ne voit pas exactement la nature perceptive. Peirce accordait l’iconicité aux équations mathématiques qu’il comparait à des perceptions. Mais on peut penser aussi aux grands principes de symétrie qui semblent, selon certains auteurs[1], devoir se substituer aux lois de la nature elles-mêmes, comme de nouvelles idées platoniciennes.

En troisième lieu, il faut prendre en compte l’usage que l’on peut faire des images, quelle que soit la modalité perceptive à laquelle elles appartiennent. S’il y a, par exemple, des images visuelles, il existe aussi des usages esthétiques, mathématiques, physiques, etc. de ces images qui modifient sensiblement non seulement leur rhétorique, mais surtout les dispositifs

---

[1] Bas C. Van Frassen, *Lois et symétrie,* Trad. Française de Cath. Chevalley, Paris, Vrin, 1994 ; Francis Bailly, Giuseppe Longo *Mathématiques et sciences de la nature, la singularité physique du vivant,* Paris, Hermann, 2006.

perceptifs et mentaux selon lesquels on doit les considérer. L'usage, c'est-à-dire l'*expérience* qui nous fait éprouver l'efficace de telle ou telle image, est inséparable de l'image elle-même car elle est une partie de sa définition. C'est là un point qui, sans nous faire rompre avec le principe d'immanence, en élargit considérablement l'usage.

Retenons donc le cadre à partir duquel nous allons essayer de décrire quelques spécificités de l'image mathématique. Nous distinguons l'*iconicité* en tant que principe général d'organisation, l'*image*, en tant que réalisation de l'iconicité selon diverses modalités sensorielles, et enfin l'*expérience d'image* comme le moment spécifique pendant lequel telle ou telle image prend un sens à l'intérieur d'un usage particulier, plus ou moins dirigé par des institutions et des conventions.

1. Institution et expérience (stabilité structurelle et singularité)

Dans une étude antérieure[2], dont celle-ci peut être considérée comme la suite, nous avons essayé de distinguer l'image prise dans le cadre d'une expérience esthétique de celle destinée à un usage mathématique. Il est nécessaire de résumer brièvement les quelques conclusions auxquelles nous étions parvenu en insistant sur le niveau d'analyse auquel elles appartenaient. Il s'agissait du niveau de l'expérience tel que nous venons de le situer. Nous aurons besoin de définir cette notion d'« expérience » plus avant mais prenons-la, pour l'instant, au sens large où l'on peut parler d'une expérience esthétique ou d'une expérience de laboratoire.

Nous avons pris comme exemple la représentation d'un cube faite à des fins d'exercices de géométrie et nous avons comparé cette représentation au cube sculpté par Giacometti dans un contexte d'expérience esthétique. Il va de soi que les institutions présupposées par ces deux cubes sont de natures distinctes (le monde de l'art, théorisé par N. Goodman, et le monde scientifique avec ses multiples institutions et coutumes qui vont de l'école aux centres de recherches). Les institutions sont des conditions de possibilité dont le sens est précisément de permettre une certaine expérience. De ce point de vue, il est utile de comparer les institutions à des croyances d'arrière-plan qui dirigent nos expériences, en un sens les constituent, mais contre lesquelles aussi il est possible d'agir comme le montrent les multiples ruptures dont sont faites aussi bien l'histoire de l'art que l'histoire des sciences. Il faut cependant se méfier de l'idée trop simple selon laquelle il y aurait d'un côté les institutions et de l'autre des artistes ou des scientifiques qui pourraient, avec plus ou moins de difficulté et de bonheur, agir et penser contre elles. Il semble bien que les institutions sont aussi des machines à penser et peuvent donc, en un sens au moins, penser contre elles-mêmes.

---

[2] Jean-François Bordron, « Image esthétique, image mathématique », *Arts et sciences : une attirance,* A. Beyaert-Geslin et M.G. Dondero (dirs), Liège, Presses Universitaires de Liège, 2012.

Mary Douglas[3] a défendu l'idée selon laquelle ce sont les institutions qui définissent les rapports de ressemblance, les analogies entre les phénomènes et par conséquent les grandes catégories de base qui définissent l'identité des êtres, des usages, et en assurent la mémoire. De ce point de vue, il nous semble que l'institution est ce qui rend intelligible le fait culturel lui-même et sa transmission. C'est précisément en considérant le type de mémoire requise par l'expérience esthétique et par l'expérience mathématique qu'il nous a semblé possible de distinguer deux types d'image. Mais, avant de revenir sur ce point, il importe de redéfinir la notion d'expérience.

Une expérience est un fait singulier qui demande que tout soit, par ailleurs, considéré comme inchangé. C'est cette tension entre une singularité d'une part et une stabilité structurelle de l'autre qui caractérise l'expérience. Ainsi en va-t-il dans une expérience de laboratoire qui exige nécessairement que tout reste égal par ailleurs si l'on veut que l'hypothèse que l'on cherche à tester ne se dilue pas dans un réseau de causes sans contour. Il en est de même de l'expérience esthétique qui opère une focalisation sur une singularité (un tableau, une œuvre, une émotion) ou de l'expérience mathématique qui est une forme particulière d'expérience de pensée dont nous analyserons un exemple.

Nous pouvons résumer notre point de départ en disant qu'il y a d'un côté une énonciation institutionnelle qui accrédite une certaine analogie entre les phénomènes et assure donc leur appartenance à tel ou tel domaine (ou « monde » selon Goodman), et de l'autre des expériences singularisantes dont on peut certes attribuer l'énonciation à des individus, mais qui sont également pensables comme des faits institutionnels.

2. Les ordres de la mémoire

Du point de vue qui nous intéresse ici, il nous semble utile de distinguer trois ordres de mémoires, les deux derniers nous semblant fournir une distinction intéressante entre l'image esthétique et l'image mathématique.

Dans le premier ordre, nous inscrirons la mémoire par familiarité, c'est-à-dire celle qui assure le sentiment de réalité. L'expérience du monde est faite de données concordantes qui, au moins dans une certaine mesure, se perpétuent dans le temps, en vertu d'un principe général de symétrie, et qui font que la même action produit le même effet. Nous nous attendons à ce que la même expérience, faite plus tard et ailleurs, se renouvelle identiquement. Nous pensons aux expériences les plus élémentaires comme lever son bras, laisser tomber un objet, écouter le bruit d'une rivière. On peut dire que cette mémoire assure l'existence d'un paradigme de choses réelles.

On peut faire différentes hypothèses quant à la nature exacte de ce qui est ainsi mémorisé et, en particulier, sur l'origine institutionnelle du sentiment de réalité. C'est là un problème essentiel dans le cadre de toute réflexion sur les

[3] Mary Douglas *How Institutions Think,* New York, Syracuse University Press, 1986, Trad. française d'Anne Abeillé, *Comment pensent les institutions,* Paris, La Découverte et Syros, 1999.

images. Il nous semble que le problème du rapport de l'image à la réalité peut être considérablement clarifié si l'on admet que cette réalité est elle-même une image ou, plus précisément, qu'elle est institutionnalisée comme image par le seul fait que nous pouvons en faire un dessin, une photographie, un scanner ou toute autre forme de production iconique. Nous dirons pour cette raison que la vérité d'une image n'est rien d'autre que l'accord qu'elle peut manifester avec ce qui par elle est fait image[4]. On remarquera qu'il n'en va pas autrement pour ce qui est des énoncés linguistiques qui supposent, lorsqu'ils se disent vrais, que la réalité soit, d'une façon ou d'une autre instituée comme « dicible ».

À côté du paradigme des choses réelles existe également une mémoire syntagmatique qui porte sur l'enchaînement des actions familières que l'on peut rapprocher des jeux de langage ou des différents arts de l'action (les tours de main, les routines, les ritournelles de l'existence).

Retenons donc comme premier ordre de la mémoire, présupposé par toute image, le couple suivant :

A- <u>Mémoire par familiarité</u>

- •<u>Mémoire paradigmatique</u> (réalités concordantes)
- • <u>Mémoire syntagmatique</u> (jeux de langage, arts du faire)

Si nous regardons maintenant une image inscrite dans le domaine de l'art, ou dans tout autre domaine en principe étranger à la connaissance scientifique, nous constatons que la mémoire mise en jeu porte sur un ensemble indéfini de réminiscences, sans limites précises ni contenu expressément normatif. Certaines sont d'ordre collectif, d'autres personnelles. On peut même dire que ce type de mémoire, surtout lorsque la dimension esthétique est privilégiée, est propre à susciter des sentiments très individualisés, qu'il s'agisse d'une personne ou d'un groupe. Tout réside finalement dans la structure ramifiée de cette mémoire qui peut nous faire passer sans transition d'un moment de l'histoire de l'art à un souvenir personnel ou à une émotion oubliée. On pourrait pour cette raison l'appeler mémoire proustienne. Le propre de l'art, selon une expression de Didi-Huberman, est d'avoir des « efficacités multiples » qui se confondent parfois avec une herméneutique illimitée. Convenons d'appeler cette mémoire « esthésique » pour souligner son lien nécessaire avec le monde sensible et les attitudes, souvent involontaires, d'une subjectivité.

L'image mathématique suppose une mémoire de nature bien différente. Bien sûr un dessin de géométrie peut éveiller mille souvenirs, mais ce n'est

[4] Nous développons plus amplement cette conception dans « Image et vérité », Actes du colloque « La vérité en image » Université de Paris V, 2006, Publié sur le site des Nouveaux Actes Sémiotiques (NAS) en décembre 2007.

pas en cela qu'il appartient à la géométrie. La réminiscence qu'il suppose est plutôt d'ordre platonicienne en cela qu'elle concerne la possibilité de susciter des évidences renouvelables. Il est en principe toujours possible de réactiver l'évidence d'une démonstration. Cela est vrai pour chacun mais surtout pour quiconque, comme l'illustre l'esclave du Ménon découvrant peu à peu le principe de construction d'un carré de surface double de celle du carré initial.

Ajoutons donc deux autres types de mémoires mis en jeu dans les images, selon que ces dernières privilégient un usage esthétique ou un usage mathématique :

B- Mémoire esthésique (source de multiplicité)
C- Mémoire platonicienne (évidences renouvelables)

Cette réflexion sur la mémoire montre simplement que les types d'expérience qui se réalisent dans le monde des œuvres d'art et dans celui des images mathématiques produisent des évidences de natures différentes. Il nous faut donc distinguer l'évidence esthétique qui se produit lorsque la beauté d'une œuvre nous subjugue, de l'évidence mathématique qui impose une démonstration ou un théorème.

L'image mathématique serait en ce sens plus proche de ce que nous avons appelé la mémoire par familiarité que de la mémoire esthésique si elle n'impliquait certaines formes de constructions qui semblent l'excéder. C'est du moins ce que nous allons essayer de spécifier.

3. La question des constructions auxiliaires

On sait que Peirce incluait l'image mathématique dans sa théorie des diagrammes et qu'il les comparait, voire les assimilait, à une certaine forme de perception :

> Cette contrainte irrésistible du jugement de perception est précisément ce qui constitue la force contraignante de la démonstration mathématique. On peut s'étonner que je range la démonstration mathématique parmi les choses qui relèvent d'une contrainte non rationnelle. Mais la vérité est que le nœud de toute preuve mathématique consiste précisément dans un jugement à tout égard semblable au jugement de perception, à ceci près qu'au lieu de se référer au percept que nous impose la perception, il se réfère à une création de notre imagination (Peirce, *Collected Papers*, 7.659).

Il est d'autant plus tentant d'admettre la validité de cette comparaison qu'elle semble nous fournir un moyen pour spécifier le type d'évidence que peut produire une image. Mais comparer la contrainte irrésistible qu'exerce une perception sur notre jugement à la même contrainte, non moins irrésistible, imposée par un diagramme mathématique demande cependant que l'on puisse spécifier la différence entre ces contraintes. Peirce nous dit qu'elle réside en cela que la perception dépend des percepts et l'image mathématique de notre imagination. Pour ce qui est des mathématiques, il s'agit bien d'images ou, plus précisément d'iconicité : « Mais il y a une assurance que l'icône fournit au plus haut degré. À savoir que ce qui est déployé sous l'œil de l'esprit – la forme de l'icône, qui est aussi son objet – doit être logiquement possible. » (*Idem,* 4.532).

Si l'on suit l'opinion de Peirce, la perception, l'évidence logique et l'évidence mathématique possèdent au moins un lien de parenté qui s'apparente à l'épreuve d'un certain type d'évidence ou de certitude. Peirce l'associe à ce que nous appellerons le signifiant iconique. Essayons de comprendre comment ce signifiant peut produire un effet d'évidence et en quoi cet effet peut se rencontrer d'une façon toute particulière dans l'image mathématique. Pour cela nous nous appuierons en premier lieu sur un texte de J. Hintikka intitulé « Modèles mentaux, jeux sémantiques et formes d'intelligence »[5].

Hintikka rappelle tout d'abord une distinction fondamentale de Peirce que celui-ci considérait comme sa première grande découverte : « Ma première grande découverte sur la procédure mathématique fut qu'il y a deux sortes de raisonnements nécessaires, que j'appelle *corollariels* et *théorématiques…* »[6] La distinction entre ces deux sortes de raisonnements repose sur la notion de « pas théorique », les raisonnements théorématiques effectuant ce pas, les autres, les raisonnements corollariels, n'en ayant aucun besoin. Peirce s'exprime ainsi :

> J'appelle « pas théorique » le pas qui consiste à introduire une idée nouvelle non explicitement et directement contenue dans les prémisses du raisonnement ou dans les conditions de la proposition dont on obtient la preuve à l'aide de cette introduction. […] Aux propositions qui ne peuvent être prouvées qu'à l'aide de pas théoriques (ou qui du moins pourraient difficilement être prouvées autrement), je propose de restreindre l'application du mot « théorème » resté vague jusqu'ici, appelant toutes les autres, qui sont déductibles de leur prémisses par les principes généraux de la logique, du nom de corollaires (Peirce, *CP,* 4613)[7].

En d'autres termes, il existe des raisonnements qui demandent que soient introduits des êtres qui n'existaient pas dans les prémisses. Le théorématique est donc le domaine de l'invention qui excède la déduction selon les seules lois de la logique (déduction qui peut par ailleurs être fort complexe). Le corollariel n'est pas ce qui est simple mais ce qui ne demande pas un « pas ».

Hintikka propose un exemple géométrique très simple de la spécificité du raisonnement théorématique :

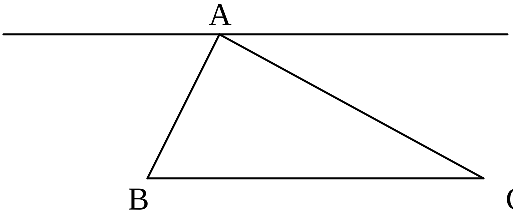
---

[5] « Mental Models, Semantical Games, and varieties of Intelligence » in Lucia Vaina (éd), *Matters of Intelligence*, Dortrecht, D. Reidel, 1987, pp. 197-215. Traduction française in J. Hintikka, *Fondements d'une théorie du langage,* Paris, P.U.F., 1994. Voir également J. Hintikka « Ch. S Peirce's "first real discovery" and its contemporary relevance », *The Monist,* 63, n°3, 1980.

[6] Citation empruntée à Hintikka, *op. cit.*

[7] Nous empruntons ces citations à Christiane Chauviré *L'Œil mathématique, Essai sur la philosophie mathématique de Peirce*, Paris, Kimé, 2008.

> L'exemple classique – à tous les sens du terme – d'inférence théorématique se rencontre dans la géométrie élémentaire, où il arrive que certains théorèmes ne puissent être prouvés sans des constructions dites auxiliaires, dont les résultats doivent être ajoutés à la figure avant que la preuve ne puisse être menée. Par exemple, de quelque façon que l'on traite le problème de la détermination de la somme des trois angles d'un triangle, on ne peut rien prouver sur la figure qui ne montre que le triangle ABC. Ce n'est qu'une fois que l'on a effectué une "construction auxiliaire" que l'on peut établir le théorème selon la démarche que j'ai expliquée. Par exemple si l'on tire une ligne parallèle à BC passant par C, la vérité du théorème devient virtuellement évidente. »[8]



Hintikka en propose l'interprétation très générale suivante :

> J'ai déjà eu à de nombreuses reprises l'occasion d'expliquer la différence entre des raisonnements logiques triviaux et non triviaux en évoquant le nombre maximum d'individus considérés dans une phrase Si. Le raisonnement qui nous conduit de So à Sk est théorématique (non trivial) si et seulement si ce nombre doit être plus grand qu'il n'est en So ou Sk en un point quelconque du cheminement allant de l'un à l'autre.[9]

Le raisonnement théorématique se reconnaît donc au fait qu'il suppose l'introduction, à quelque étape que ce soit, d'au moins un individu qui ne figurait pas dans les prémisses.

Ainsi compris, il semble bien que le raisonnement théorématique, ainsi que le montre l'exemple des constructions auxiliaires, soit à la base de l'image mathématique et également du type d'évidence que nous avons mentionné comme leur appartenant en propre. Essayons de déterminer plus précisément le sens exact de cette construction (ou de ce supplément d'individus selon Hintikka) avant de revenir à la question difficile de l'image comme lieu d'une évidence spécifique.

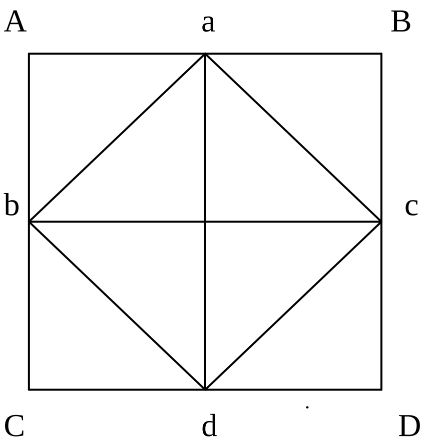
Ce qui est d'abord frappant dans une construction auxiliaire est l'impossibilité de raisonner sur la seule base de l'image initiale. Il ne sert à rien de contempler le triangle seul si l'on veut démontrer que la somme de ses angles est égale à deux droits. Il semble de ce fait que l'image mathématique soit un lieu de *construction*, cette construction n'ayant pas de terme déterminé car d'autres questions vont nécessairement surgir, une fois un théorème démontré. Dans ces conditions il paraît inexact, voir faux, de

[8] *Op. cit.*, p. 363.
[9] *Op. cit.*, p. 363.

dire qu'un triangle est une image mathématique. Il vaudrait mieux dire qu'il peut le devenir, qu'il l'est *en puissance*, pourvu qu'une opération supplémentaire vienne lui donner le statut de prémisse dans une démonstration. Ce point paraît parfaitement clair si l'on regarde les démonstrations purement géométriques comme celles du théorème de Pythagore, de Thalès ou même celles des premiers théorèmes de géométrie projective. Il s'ensuit que l'image mathématique prend non seulement la forme d'une sorte de laboratoire[10] mais en outre qu'elle n'existe véritablement qu'en acte, comme construction.

Il faut maintenant demander en quoi exactement consiste cette construction que l'on peut concevoir comme une étape dans l'immense générativité des mathématiques.

Dans l'exemple d'Hintikka, il s'agit de tracer une droite, parallèle à la base d'un triangle, et passant par le sommet opposé. Cette droite n'appartient pas au problème initial et peut donc être considérée comme un ajout, un adjuvant nécessaire pour que l'on puisse voir la solution du problème. De même, dans le Ménon, Socrate trace les lignes nécessaires pour que l'on puisse comprendre, c'est-à-dire voir, comment un carré (A,B,C,D), dont le côté est donné par la diagonale d'un carré initial (a,b,c,d), a une surface double de ce dernier :



Il s'agit toujours de construire pour « faire apparaître », rendre immédiatement visible, ce qui est en question.

D'où proviennent les droites que l'on ajoute au triangle initial, ou à tout autre figure, et quel est exactement leur effet ? Peirce y voit le résultat de notre imagination, ce qui est sans doute vrai, mais laisse le mystère entier.

[10] Sur l'image laboratoire et l'image « en train de se faire » nous renvoyons à Maria Giulia Dondero « Sémiotique de l'image scientifique », *Signata*, 1, Presses Universitaires de Liège, 2010, pp. 111-176.

Essayons de décrire le plus exactement possible la façon dont l'imagination procède.

La droite ajoutée ne pourrait être une ligne quelconque. Il faut une droite ou un cercle ou quelque autre figure appartenant à l'alphabet mathématique, c'est-à-dire à des figures non quelconques. La droite est en quelque façon une pièce d'un jeu, même s'il ne faut sans doute pas exagérer cette image.

Elle possède deux propriétés particulières qui sont en réalité des relations : elle est parallèle à la base du triangle et passe par le sommet opposé à cette base. Une fois cela admis, l'évidence du résultat doit se manifester. On notera cependant qu'un écolier (ou un mathématicien) ne pourrait pas se contenter de cette évidence. Il faudrait qu'il détaille les égalités entre les angles, rappelle l'axiome des parallèles et donc la nature de l'espace euclidien qui est ici présupposée.

Il y a une dialectique difficile à cerner entre l'évidence du résultat et le raisonnement qui en détaille certains moments. Il nous semble qu'il vaut mieux ici éviter d'introduire les termes de « synthèse » et d'« analyse » qui sont à la base des discussions sur la nature des mathématiques (sont-elles synthétiques *a priori* comme le voulait Kant, ou au contraire analytiques ?) et nous en tenir à une description la plus proche possible de l'image et de sa construction.

Il est clair que le raisonnement semble *déplier* ce qui se manifeste unitairement dans l'intuition que nous pouvons avoir de la figure. Le raisonnement *explique* ce qui ne veut pas dire nécessairement qu'il analyse. L'intuition au contraire *complique,* en ce sens qu'elle replie tous les éléments sur eux-mêmes, entre eux. Ceci n'est pas une synthèse mais plutôt un geste, comme une main ramassant plusieurs choses mises ensemble, leur conférant ainsi l'unité d'une donation unique. Lorsque l'on regarde une image celle-ci n'est pas la synthèse de ses parties mais possède précisément l'unité d'un geste (le regard est en ce sens une gestuelle). Lorsque l'on trace la ligne au sommet du triangle, il s'agit précisément d'un geste qui fait apparaître brusquement l'unité d'une scène et le théorème qui en résulte.

Comme toute scène, celle-ci possède son référentiel présupposé, ici l'espace euclidien, mais aussi le point de vue selon lequel on doit la voir.

Quelques remarques sont nécessaires pour enrichir notre inventaire des traits spécifiques à l'image mathématique.

On notera en premier lieu que le référentiel spatial, contrairement à ce qui se passe dans l'immense majorité des images, ne possède pas de dimension privilégiée, ni droite, ni gauche, ni haut ni bas et, dans le cas étudié, ni premier plan ni arrière-plan (mais ce n'est ici qu'un cas particulier). En fait, les dimensions de l'espace sont autonomes par rapport à tout observateur. Ceci revient à dire que l'observateur, pourtant présupposé, est dépourvu d'un corps organisé par une deixis, bien qu'il perçoive.

L'image mathématique, c'est là également une de ses propriétés, ne possède aucun éclairage, aucune source de lumière, aucune ombre. On sait que ces attributs peuvent être ajoutés dans certains livres de mathématiques, mais essentiellement pour des raisons esthétiques. Parfois cependant certains traits se trouvent soulignés pour rendre manifeste telle ou telle figure qui sinon serait délicate à distinguer dans un enchevêtrement de lignes. Ce cas se présente souvent dans les démonstrations de géométrie projective. D'autres opérations consistant à mettre en valeur une construction sont prévisibles. On peut en conclure que ces effets de matière possèdent essentiellement une fonction d'index. Ils montrent et en ce sens collaborent à l'évidence visuelle, sans que l'on puisse dire pour autant qu'ils participent à la démonstration telle qu'elle est formellement énonçable. Ils soulignent l'iconicité des figures, la mettent en scène mais ne la créent pas et surtout ne se confondent pas avec elle.

On observe finalement que l'image mathématique est habitée par un paradoxe. Elle montre des relations entre des figures dans l'espace et cela par l'inscription matérielle d'un signifiant iconique. En même temps, elle exige que l'on fasse abstraction de la matérialité de ces signifiants et par conséquent de toutes les traces visibles du fait qu'elle montre. Si notre rapport à elle est bien une perception, comme le dit Pierce, il faut aussi admettre qu'ultimement l'image n'a vraiment de sens mathématique que s'il s'agit d'une perception paradoxalement sans sujet (au sens d'un sujet d'énonciation compris simultanément comme acteur et comme récepteur). Pourtant, comme nous l'a montré l'observation de constructions auxiliaires, il y a bien une *action* constitutive de l'image mathématique et des traces manifestes d'un sujet doué d'imagination. Il semble que finalement nos observations convergent toutes vers cette seule question : qu'est-ce que l'énonciation mathématique et pourquoi semble-t-elle engendrer des paradoxes ?

4. Enonciation mathématique et évidence

Lorsqu'un mathématicien effectue une construction auxiliaire, il répond sans un doute à un questionnement portant sur la figure déjà inscrite et qui n'est pas à elle seule suffisante pour avancer sa démonstration. Il fait une demande qui, selon le schéma husserlien, va ou non être satisfaite par un « remplissement » de sens que doit lui fournir cette nouvelle construction. Mais ce remplissement est si particulier qu'on ne peut en aucune façon le confondre avec la simple satisfaction que pourrait fournir un objet désiré ou voulu (un objet valeur). Même si un grand plaisir peut accompagner la réussite d'une démonstration, ce n'est pas lui qui peut être le critère de l'évidence que nous cherchons à approcher. L'évidence n'a pas de rapport direct avec le plaisir, comme le montre l'évidence que Husserl, comme Peirce, reconnait à la perception. Elle possède cependant une certaine tonalité énergétique qui peut malgré tout lui donner quelque rapport avec le désir. On peut également faire valoir l'éclat, la vivacité de certaines évidences intellectuelles sans que cela nous semble véritablement concluant quant à leur nature. Les modulations subjectives qui accompagnent l'évidence, et qui sont soulignées par la plupart des auteurs[11], sont intéressantes mais cependant peu

[11] En particulier F. Gil, *Traité de l'évidence,* Grenoble, Jérôme Million, 1993.

concluantes pour le point qui nous occupe. Nous recherchons le lien qui peut tenir ensemble le tracé d'une figure (donc une image), un effet démonstratif (un effet de vérité), et un régime très particulier d'énonciation.

Nous avons vu que la construction auxiliaire ne peut en elle-même se trouver expliquée par la forme logique de la démonstration mais exige au contraire un ajout, en lui-même injustifiable autrement que comme un effet de l'imagination. Même si le théorème final peut, et en un certain sens doit, être mis en forme logique, il n'en demeure pas moins qu'il ne procède pas ainsi au moment précis où son évidence apparaît. Il vaut mieux ici ne pas parler d'intuition car cette faculté est encore plus mystérieuse que le problème qu'elle serait censée résoudre. Disons plutôt que le théorème se manifeste d'abord sous une forme iconique et non à la suite d'un développement symbolique.

Le point le plus important nous semble être le rapport entre la construction et l'énonciation. On pourrait penser que l'énonciation se présente sur un mode débrayé. Mais peut-on dire qu'un énoncé mathématique soit débrayé au même sens qu'un énoncé linguistique ? La ligne tracée au sommet d'un triangle, dans notre exemple, et le théorème qui apparaît à sa suite, appartiennent-ils au domaine du « il », entendu comme dans « il pleut » ou « il neige » ? Il nous semble que leur effet provient plutôt de ce qu'il ne suppose en aucune façon ni sujet ni objet. Même les verbes a-valents, comme « pleuvoir » ou « neiger », gardent la trace d'un univers mythique dans lequel les dieux agissent sur les éléments. Mais, dans notre exemple, quelque chose se manifeste qui n'est ni sujet, ni objet et n'appartient pas à ce qui est dicible sur la base de cette différence. Comment qualifier ce fait sans faire appel à des intuitions nécessairement vagues ? Il nous semble que la seule réponse possible est de rappeler que les mathématiques, comme la logique, appartiennent au domaine du « formel » qui est un registre sémiotique qui ne se laisse pas penser selon les catégories de la grammaire actantielle. Ce que montrent les constructions géométriques comme celles que nous avons citées, c'est qu'il existe une certaine formalité de l'iconique lors même que l'on accorde en général la formalité au seul ordre symbolique (logique et algébrique).

Quelle est la propriété sémiotique principale du « formel » et quel est son rapport avec la question de l'énonciation ?

Il est difficile d'assimiler purement et simplement le formel à un régime particulier des signes, ce qui n'exclut pas, comme nous venons de le voir, qu'il puisse y avoir des formalités iconiques et symboliques. Mais en quel sens une droite serait-elle un signe, que l'on entende ce terme au sens saussurien, comme la relation d'un signifiant et d'un signifié, ou au sens frégéen comme le support d'un sens et d'une dénotation ? La même question se pose d'ailleurs si l'on pense à une forme logique. Russell remarque : « Le logicien en tant que tel ne donne jamais d'exemple, parce que c'est au fait qu'on n'a besoin de rien connaître du monde réel pour la comprendre que se reconnaît une proposition logique »[12].

Il semble que l'on puisse dire la même chose d'un énoncé mathématique, ce qui n'invalide en rien la comparaison faite par Peirce entre une équation et une perception. Mais comment fonctionne un signe s'il n'y a rien à connaître du monde pour le comprendre et en quoi ressemblerait-il à une perception ?

Remarquons tout d'abord que la perception n'est pas évidente au sens où elle pourrait nous obliger à penser que ce qui est donné à nos sens est telle ou telle chose possédant telle ou telle propriété. Au contraire, c'est là ce dont on peut toujours douter puisque cela dépend essentiellement de certaines catégorisations qui ne s'imposent pas avec nécessité. L'évidence de la perception tient plutôt au sentiment d'existence au sens où Hegel, devant le spectacle des Alpes, a pu dire simplement : « Cela existe ». La reconnaissance d'un fait signale souvent un excès par rapport aux possibilités immédiates du langage. Il y a de même dans l'évidence d'un théorème un certain excès par rapport aux articulations nécessaires de la démonstration. Il nous semble que c'est sur ce point que l'évidence de la perception et l'évidence géométrique participent d'une expérience commune.

Nous avons déjà rencontré l'idée d'excès lorsque nous avons discuté des constructions auxiliaires qui nécessitent un acte particulier de l'imagination, acte irréductible à la simple déduction et excessif en ce sens. Il s'agit bien sûr de l'imagination productrice et non de la simple imagination reproductrice. L'imagination ainsi comprise est en quelque sorte la faculté ontologisante de notre esprit, la seule qui soit susceptible de faire surgir un existant, comme le fait le mathématicien traçant une droite pour voir si quelque évidence en résultera.

Ainsi se nouent peu à peu des thèmes qui auraient pu sembler trop éloignés pour former ensemble une certaine cohérence : l'évidence, l'existence, la perception, l'image mathématique. Tout se passe comme si l'acte de l'imagination mathématique, lorsqu'elle intervient dans l'image, faisait surgir un existant qui n'appartient pas à l'ordre ordinaire du monde sensible et possède pourtant la puissance contraignante de la perception. En un sens la ligne tracée fait surgir l'évidence d'un existant et sa place dans une configuration d'ensemble, en un autre, selon la formulation de Descartes, les mathématiciens ont « peu d'égard à l'existence ». Il s'agit bien d'un acte, et partant d'une énonciation, et cependant l'énonciation paraît non seulement s'effacer, ce qui serait banal, mais surtout perdre toute pertinence explicative. L'image apparaît simultanément comme un lieu d'expérience et en même temps comme récusant le sujet de l'expérience. L'imagination est créatrice et pourtant sa création semble plutôt être une découverte, ce qui est le sentiment le plus commun des mathématiciens.

[12] Bertrand Russell, *Écrits de logique philosophique.* Textes traduits et recueillis par J-M. Roy, Paris, P.U.F., 1989, p. 358.

Nous ne prétendons pas dire ce que peut être le statut des idéalités mathématiques mais essayons simplement de trouver quelle formulation sémiotique pourrait nous aider à comprendre l'aspect paradoxal de l'image mathématique. Il nous semble que cette image, en tant qu'elle recueille des contenus formels, peut être assimilée à un plan d'expression qui n'aurait pas de contenu. Sa capacité générative tiendrait alors au seul registre du signifiant, à sa formalité propre, qui se confondrait par là avec le fait d'être. Les mathématiques semblent bien être comme un monde en soi dont la force de conviction vient de ce que nous n'avons pas à l'évaluer mais plutôt à le percevoir. Le caractère d'évidence que l'on peut ressentir nous paraît être comparable avec ce que Lévi-Strauss a appelé l'efficacité symbolique[13]. Dans l'exemple analysé par Lévi-Strauss, une femme en vient à accoucher parce qu'elle vit les sensations de son propre corps en symbiose avec le récit que lui raconte le chaman. Nous sommes donc dans un cas de croyance extrême pour laquelle ce qui est raconté est aussi ce qui est. L'univers des signes se confond avec l'être. Le pouvoir du chaman est en un sens semblable à celui du mathématicien. Tous les deux créent de l'existant mais celui-ci ne pourrait pas apparaître comme leur création sans perdre son pouvoir de conviction. Le signifiant doit effacer l'énonciateur pour que sa formalité s'autonomise.

Si notre analyse a quelque validité, elle demande une réflexion supplémentaire sur le statut du signe mathématique. Nous avons essayé de mettre en valeur le cas extrême où le signifiant se confond avec l'être. C'est le moment propre de l'évidence. À l'autre extrémité, nous avons le signe arbitraire, le signe de convention et d'institution, qui tire sa force des règles et des usages. Entre ces deux extrêmes, il existe toute une gamme de signes plus ou moins motivés comme les empreintes, certains symboles, etc. Le signe mathématique paraît pouvoir occuper les deux pôles extrêmes du sémiotique, l'évidence géométrique et l'algèbre.

Il existe cependant des signes mathématiques possédant une certaine motivation comme le signe (l'intégrale, les quantificateurs, etc.). Nous voulons par cette remarque faire percevoir en quel sens l'ordre sémiotique se manifeste toujours dans un rapport avec l'être, soit qu'il se confonde avec lui comme le fait le pur signifiant porteur d'évidence, soit qu'il s'en distingue radicalement comme le signe arbitraire, soit – et c'est le cas le plus fréquent – qu'il entretienne avec lui un rapport mixte, fait de connivences et de ruptures. La particularité du signe mathématique serait alors d'occuper d'une façon privilégiée les valeurs extrêmes.

[13] Claude Lévi-Strauss, *Anthropologie structurale,* Paris, Plon, 1958.

Image, imagination et mathématique chez Descartes et Leibniz

Laurence BOUQUIAUX
Université de Liège

Une interprétation « classique »

L'argumentaire du colloque nous invitait à « réfléchir sur le fait que la mathématisation permet de rendre comparables différentes formes de collecte de données », à réfléchir sur la manière dont la mathématique peut homogénéiser les données observationnelles mais aussi, sans doute, à ce qui se joue dans le passage des phénomènes physiques à leur expression dans le langage mathématique. Le même texte affirmait que « le rapport entre visualisation (particularité) et mathématisation (généralité) est au centre du débat philosophique portant sur la relation entre intuition et logique et entre perception et généralité ». Voilà deux points pour lesquels nous sommes, très largement, les héritiers de l'âge classique, qui a inventé la mathématisation de la physique et jeté les bases de la logique formelle.

Mathématisation de la physique, en effet : Galilée affirme que le livre de la nature est écrit en langage mathématique, que ses caractères sont les triangles et les cercles, et qu'on ne peut rien y comprendre si on n'en apprend pas d'abord le langage. En un geste dont A. Koyré a souligné le caractère très platonicien, on ramènerait l'ensemble des données sensibles à leur essence, qui est idéale, mathématique. Les couleurs, les odeurs, les saveurs ne seraient que l'effet produit sur notre système sensoriel par les figures et les mouvements qui constituent les choses. Le morceau de cire, qui vient d'être tiré de la ruche, qui n'a pas encore perdu la douceur du miel, qui retient encore quelque chose de l'odeur des fleurs dont il a été recueilli, etc., ce morceau de cire devrait être reconduit à ce qu'il est essentiellement : une portion d'étendue. Le monde physique, sensible, ne pourrait être connu que si on le rapporte à des idéalités mathématiques, à des cas idéaux que nous n'observons jamais dans la nature. La parabole que décrit la boule qui quitte le plan incliné de Galilée n'est jamais parfaitement conforme à la parabole mathématique, mais c'est néanmoins la parabole mathématique qui constitue la vérité du phénomène physique. La physique classique, mathématique, se constituerait au moins partiellement contre nos perceptions, contre notre intuition immédiate (la physique d'Aristote y est bien davantage conforme).

D'autre part, au sein même des mathématiques, on assisterait à un mouvement d'éloignement par rapport à l'intuition visuelle. Grâce aux coordonnées qui portent son nom, Descartes parviendrait à passer des figures géométriques à leurs équations, à algébriser la géométrie et Leibniz ferait un pas de plus puisqu'il entrevoit la possibilité de ramener l'ensemble des mathématiques (et même l'ensemble du savoir) à un calcul formel, dont il s'efforcera d'ailleurs de jeter les bases. Cette interprétation logiciste de Leibniz a, on le sait, été notamment soutenue par B. Russel et L. Couturat (pour qui le schématisme kantien et le rôle central qu'il fait jouer à l'imagination ne serait, comme le dit David Rabouin, qu'une parenthèse malheureuse dans cette marche des mathématiques vers leur destin formaliste[1]).

Double prise de distance, donc, de la science classique par rapport au monde de la perception, double mouvement d'éloignement par rapport aux images et à l'imagination : on ramène l'ensemble du monde sensible aux cercles et aux triangles puis on ramène les cercles et les triangles à leurs équations, à une expression formelle, objet de « la pensée aveugle », pour reprendre une expression de Leibniz. Cette interprétation est, on le notera, en parfaite consonance avec le thème cartésien – mais aussi pascalien, spinoziste, leibnizien ou malebranchiste – du caractère douteux des données des sens. Et avec les multiples mises en garde de ces auteurs contre l'imagination, « folle du logis », « maîtresse d'erreur et de fausseté ». La seule vraie connaissance serait celle de l'entendement pur, qui est parvenu à s'arracher aux illusions des sens, réalisant ainsi l'objectif des *Méditations métaphysiques* : *Abducere mentem a sensibus*, détacher l'esprit des sens. Pour le dire trop vite, le XVII^{e} siècle annoncerait le passage de l'intuition à la logique qu'auraient accompli les grandes théories formalistes de la fin du XIX^{e}. C'est cette interprétation que je voudrais interroger, en mettant en partie mes pas dans ceux de Rabouin, qui explore depuis plusieurs années la question du rapport entre pensée et spatialité et qui, en particulier, s'est attaché à montrer l'importance de l'imagination mathématique à l'âge

[1] « Kant concevait […] les mathématiques comme les sciences du nombre et de la grandeur et même plus étroitement encore comme les sciences de l'espace et du temps, et non pas comme une science ou plutôt une méthode purement *formelle,* comme un ensemble de raisonnements déductifs et hypothétiquement nécessaires. Ici encore, on ne saurait lui reprocher de n'avoir pas prévu l'avenir, encore que, sur ce point aussi, Leibniz ait vu plus clair et plus loin que lui, et ait conçu fort nettement la mathématique universelle et plus spécialement l'algèbre universelle (qu'il appelait la caractéristique) comme applicable à toutes les formes possibles de déduction ». L. Couturat, *Les principes mathématiques*, Paris, Alcan, 1905. Cité par D. Rabouin, *Mathesis universalis. L'idée de « mathématique universelle » d'Aristote à Descartes*, PUF, 2009, p. 353.

classique[2]. Pour le dire très vite c'est, selon Rabouin, par une sorte d'erreur rétrospective que l'on verrait aujourd'hui dans le développement des mathématiques cartésiennes et leibniziennes un progrès du formalisme contre l'intuition et l'imagination. Je voudrais expliciter cette thèse en la confrontant à quelques textes de Descartes puis en ajoutant rapidement quelques mots à propos de Leibniz.

Le projet des *Regulae*

Le titre complet de cette œuvre de jeunesse de Descartes est, on le sait, *Regulae ad directionem ingenii.* Or l'*ingenium* dont il est question dans le titre n'est pas « l'entendement pur », mais l'entendement en tant qu'il est aidé par les autres facultés et, en particulier, par l'imagination. Descartes le dit tout à fait explicitement. L'idée que l'entendement perçoit mieux lorsqu'il est aidé par les sens ou l'imagination peut sembler étonnante. Il est en effet possible d'alléguer une multitude de textes dans lesquels Descartes affirme au contraire que les sens et l'imagination constituent des obstacles à la vraie connaissance, celle de l'entendement pur. Les *Méditations* reviennent sans cesse sur ce thème. Dans l'ordre métaphysique, bien sûr, mais peut-être aussi en mathématique. Par exemple, dans la *Sixième Méditation,* Descartes affirme que si nous pouvons concevoir un chiliogone aussi précisément qu'un triangle, nous ne pouvons en revanche l'imaginer que confusément. La preuve : notre imagination est incapable de distinguer le chiliogone, figure à mille côtés, du myriagone, figure à dix mille côtés[3]. Passage que l'on interprète volontiers, mais peut-être trop rapidement, comme une condamnation du recours à l'imagination en mathématique et l'affirmation d'une opposition entre entendement et imagination. Or, c'est très précisément de la collaboration, si je puis dire, qui doit s'instaurer entre entendement et imagination qu'il s'agit dans les *Regulae*. Ce texte me semble important pour notre propos parce que Descartes entreprend d'y développer un schématisme qui permet (ou devrait permettre) de rendre visible les opérations mathématiques et qui devrait même s'appliquer à toutes les opérations de

[2] Voir, outre l'ouvrage cité dans la note précédente, l'article « Logique, mathématique et imagination dans la philosophie de Leibniz », *Corpus,* 49, 2005, pp. 165-198.

[3] « Que si je veux penser à un chiliogone, je conçois bien à la vérité que c'est une figure composée de mille côtés, aussi facilement que je conçois qu'un triangle est une figure composée de trois côtés seulement ; mais je ne puis pas imaginer les mille côtés d'un chiliogone, comme je fais les trois d'un triangle, ni, pour ainsi dire, les regarder comme présents avec les yeux de mon esprit. Et quoique, suivant la coutume que j'ai de me servir toujours de mon imagination, lorsque je pense aux choses corporelles, il arrive qu'en concevant un chiliogone je me représente confusément quelque figure, toutefois il est très évident que cette figure n'est point un chiliogone, puisqu'elle ne diffère nullement de celle que je me représenterais, si je pensais à un myriagone, ou à quelque autre figure de beaucoup de côtés ; et qu'elle ne sert en aucune façon à découvrir les propriétés qui font la différence du chiliogone d'avec les autres polygones », *Méditation sixième,* édition Adam et Tannery (cité AT ci-dessous), IX, 57.

l'esprit en tant qu'elles portent sur des choses « qui ont quelque chose qui puisse se rapporter au corps ». Outre son intérêt intrinsèque, le texte des *Regulae* peut aussi, je pense, nous inciter à revoir notre jugement sur le projet que Descartes poursuit dans la *Géométrie*. On a souvent vu dans la *Géométrie* l'algébrisation de la géométrie, l'acte de naissance de la géométrie analytique, la mise en œuvre d'un projet consistant à remplacer les courbes par leur équation. C'est, bien sûr, en partie, de cela qu'il s'agit. Mais il n'est peut-être pas impossible de soutenir qu'il s'agit d'autre part, comme dans les *Regulae*, de rendre visible les opérations algébriques, de géométriser l'algèbre. Je voudrais préciser comment, selon les *Regulae*, l'imagination peut aider l'entendement, et tenter ensuite de monter ce que la *Géométrie* retient de ce projet.

Le Descartes des *Regulae* poursuit un projet particulièrement ambitieux : il entend nous donner les moyens d'ordonner toutes les questions qui peuvent être posées à propos des objets qui ont quelque chose de corporel – qu'il s'agisse d'astres, de sons, de lumière, d'aimant, de nombres ou de figures géométriques – puis, après avoir ordonné ces questions en fonction de la difficulté qu'elles présentent, il veut montrer comment il est possible de les traiter en les ramenant à la considération d'une série de rapports qui peuvent être figurés (codés, symbolisés) par des signes, des lettres ou des schémas. Pour Descartes, en effet, toute question qui ne porte pas sur de purs intelligibles peut être ramenée, par abstraction, à la comparaison de certaines grandeurs. Par exemple, on peut étudier comment la hauteur du son que rend une corde vibrante dépend de sa longueur, de son épaisseur et des poids qui la tendent, et il est clair que l'on peut exprimer ces relations par une série de rapports que l'on pourra ensuite représenter par des figures.

Précisons sa démarche en nous reportant aux règles 12 à 18 qui constituent, pour nous, la dernière partie du traité[4]. Le titre de la règle 12 affirme qu'« il faut user de tous les secours qu'apportent l'entendement, l'imagination, le sens et la mémoire, soit pour regarder distinctement les propositions simples, soit pour comparer convenablement les choses qu'on demande avec celles qu'on connaît afin de les reconnaître, soit pour trouver celles que l'on doit rapporter les unes aux autres »[5]. Il s'agit donc bien de faire jouer toutes les facultés à la fois pour regarder les « propositions simples » et pour considérer les rapports entre les choses (connues et inconnues). Pour comprendre ceci, il faut savoir que, dans tout ce traité, Descartes pense l'ensemble de la connaissance à partir de la considération des rapports qui existent entre les objets. Connaître, c'est ramener toutes les caractéristiques des choses à des rapports entre grandeurs. Ces rapports peuvent être directs, comme dans les « propositions simples » et ils sont alors

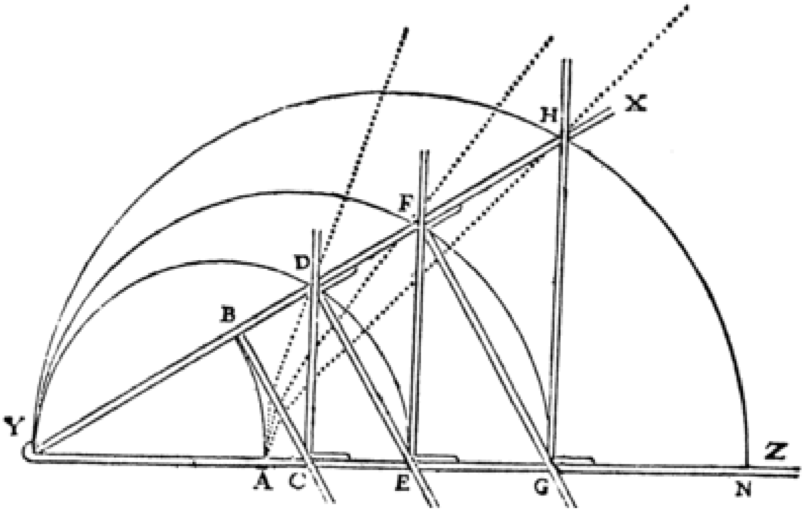
[4] Descartes a interrompu la rédaction de son ouvrage. Il prévoyait 36 règles. La règle 18 est la dernière à être rédigée. Nous possédons en outre les titres des règles 19 à 21.

[5] *Règles utiles et claires pour la direction de l'esprit et la recherche de la vérité*, traduction selon le lexique cartésien et annotation conceptuelle par Jean-Luc Marion avec des notes mathématiques de Pierre Costabel, Martinus Nijhoff, 1977, p. 40.

immédiatement saisis par l'intuition ou indirects, comme c'est le cas dans les raisonnements complexes, qui exigent le recours à la déduction. Intuition et déduction étant, affirme Descartes, les deux seules manières d'accéder à une connaissance certaine. Il y a donc des vérités dont nous pouvons prendre connaissance *uno intuitu*, d'un seul regard, et d'autres qui exigent que nous en passions par une série d'intermédiaires.

Dans la règle 6, Descartes illustrait ceci à l'aide d'un exemple, celui des proportions et de la recherche des moyennes proportionnelles. Je m'y arrête quelque peu parce qu'il ne s'agit pas seulement d'un exemple, mais aussi du modèle même qui permet à Descartes de penser la manière dont s'ordonnent les connaissances. (I) Descartes envisage d'abord le cas suivant : « Si l'on me donne les grandeurs 3 et 6, je trouverai aisément une troisième en proportion continue, savoir 12 » . Autrement dit, on résout sans difficulté $\frac{x}{6}=\frac{6}{3}=2$, ou encore $x=2.6=12$ parce que, dans ce cas, il suffit d' « appliquer son attention », comme dit Descartes, à un nombre (6) et à la proportion (2). C'est le cas immédiat, direct. (II) En revanche, continue Descartes, si on donne les deux extrêmes, 3 et 12, on ne peut trouver si aisément la moyenne (6). On a ici « un autre genre de difficulté, tout à fait différent du précédent » parce que, dans ce cas, il faut « appliquer son attention en même temps aux deux extrêmes et à la proportion qu'il y a entre ces deux ». On voit pourquoi les choses se compliquent : il faut à présent prendre en considération trois éléments. Il s'agit de résoudre l'équation suivante : $\frac{3}{x}=\frac{x}{12}$, c'est-à-dire $x^2=3.12$, $x=\sqrt{36}$. On a, dans ce cas, une équation à une inconnue du second degré. (III) On peut franchir une étape supplémentaire dans la complexité en considérant des données encore plus éloignées (3 et 24), qui supposent encore plus d'intermédiaires : $\frac{3}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{24}$. Ce problème donne lieu aux équations couplées suivantes : $x^2=3y$ et $y^2=24x$, que l'on peut transformer pour obtenir une équation à une inconnue de degré 3 : $x^4=9y^2=9.24.x$ donc $x^3=9.24$, d'où l'on peut tirer $x=6$ puis, à partir de $x^2=3y$, $y=12$. (IV) On pourrait penser que l'introduction d'un rapport supplémentaire va, à nouveau, compliquer le problème. Ce n'est en fait pas le cas car si l'on cherche les intermédiaires entre 3 et 48 (à savoir 6, 12, et 24) on peut commencer par chercher la moyenne proportionnelle entre 3 et 48, ce qui ramène le problème au cas (II), puis déterminer les deux autres moyennes de la même manière. Dans ce cas, le problème est donc plus simple que celui envisagé au cas précédent. Cette question de la recherche des moyennes proportionnelles est, on le voit, liée à celle de la recherche des solutions des équations de degré de plus en plus élevé. Question essentielle pour Descartes : son projet, lorsqu'il écrit la *Géométrie,* était de proposer une méthode générale pour résoudre les équations polynomiales de degré quelconque. Mais ce problème mathématique est aussi, je l'ai dit, intéressant en tant que modèle de la connaissance. D'une part, cet exemple manifeste que, s'il faut ordonner les problèmes en fonction de leur difficulté, cet ordre n'est pas toujours celui qui apparaît immédiatement : contrairement à ce que l'on pourrait d'abord penser, le cas IV est plus facile que le cas III. C'est précisément l'un des buts essentiels de la méthode proposée par Descartes que de nous donner les moyens de passer de l'ordre dans lequel les problèmes se présentent à celui selon lequel notre connaissance se construit. D'autre part, cet exemple montre que connaître, c'est essentiellement dégager ce que l'on cherche de l'ensemble des rapports où il est enveloppé. Comme l'écrit Descartes, « toute connaissance qu'on n'acquiert point par le regard (*intuitus*) simple et pur <pris> d'une chose unique est acquise par la comparaison de deux ou plusieurs termes entre eux. Et certes quasi toute l'industrie de la raison humaine consiste à préparer cette opération »[6].

Il n'est pas sans intérêt pour notre propos de noter avec P. Costabel[7] que Descartes avait trouvé un moyen tout à fait « visuel », et même mécanique pour déterminer les moyennes proportionnelles : son fameux compas. (Le schéma et l'explication qui suivent sont tirés du livre second de la *Géométrie*, AT VI, 391-392).



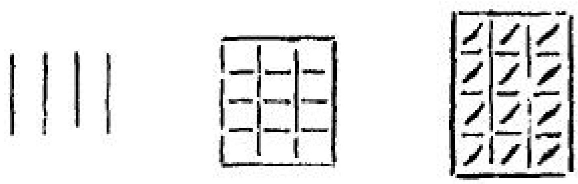
Les branches YX et YZ sont articulées en Y. YX est munie d'une tige perpendiculaire fixée en B. Le reste consiste en une série d'équerres qui peuvent glisser le long de YX et de YZ.

---

[6] *Ibid.*, p. 61 (Règle 13, AT X, 440). Voir aussi p. 52 (Règle 12, AT X, 427) : « toute la science de l'homme ne consiste qu'à voir distinctement comment ces natures simples concourent ensemble à composer d'autres choses ».
[7] *Ibid.*, pp. 309-313.

Quand le compas est complètement fermé, les points B, C, D, E, F, G, H coïncident tous avec le point A. À mesure qu'on l'ouvre, la tige fixée en B pousse vers Z la règle CD qui coule sur YZ en faisant toujours un angle droit avec elle ; et CD pousse DE, qui coule tout de même sur YX en demeurant parallèle à BC ; DE pousse EF, EF pousse FG, celle-ci pousse GH, et on en peut concevoir une infinité d'autres. Comme les triangles YBC, YCD, YDE, YEF, etc. sont semblables, on a immédiatement $\frac{YB}{YC}=\frac{YC}{YD}=\frac{YD}{YE}=\frac{YE}{YF}=etc.$ Le dispositif permet, par exemple, de trouver les deux moyennes proportionnelles entre deux grandeurs YB et YE données : il suffit de jouer sur l'ouverture du compas pour que l'équerre DCE viennent s'appuyer en C sur la tige fixée en B. Les deux moyennes cherchées seront YC et YD.

Revenons à la règle 12 et au jeu des différentes facultés. Descartes précise que « seul l'entendement est capable de percevoir la vérité » mais qu'il « doit néanmoins être assisté par l'imagination, le sens, et la mémoire ». Il fait ensuite du rôle de chacune de nos facultés une description très proche de celle qu'en faisait Aristote dans le *De anima* : l'objet que nous voyons (ou que nous sentons, ou que nous entendons) commence par imprimer sa figure dans le sens externe, comme le cachet dans la cire. Le « corps opaque que l'on rencontre le premier dans l'œil » (mais aussi la première membrane des oreilles, des narines et de la langue) reçoivent une figure nouvelle. On peut, dit Descartes, « considérer que toutes les différences entre les choses sensibles » peuvent être exprimées par des figures. Par exemple, rien n'empêche de concevoir la diversité qui se trouve entre le blanc, le bleu et le rouge, comme celle qui se trouve entre les figures suivantes :



Il ne s'agit bien sûr pas là d'une tentative pour décrire de manière réaliste les figures et les mouvements qui seraient associés à notre sensation des couleurs. Le code proposé ici est tout à fait arbitraire. Il serait, pour Descartes, possible de coder ainsi en des *figurae* toutes les variations sensibles des choses. Les couleurs ne sont qu'un exemple. Les sons, les odeurs, les saveurs, etc. peuvent, en principe, être eux aussi rapportés à l'ordre figuratif. La figure ainsi imprimée dans le sens externe est ensuite transmise au sens commun puis à l'imagination, qui est elle aussi purement corporelle. Descartes y insiste bien : l'imagination est une « vraie partie du corps », qui possède une certaine étendue, de dimension suffisante pour que plusieurs de ses parties puissent revêtir des figures distinctes les unes des autres et les retenir assez longtemps (ce que l'on appelle « mémoire »). L'imagination peut ensuite mouvoir les nerfs et donc le corps lui-même. Et c'est ainsi, précise Descartes, que l'on peut comprendre les mouvements des animaux et « toutes les opérations que nous accomplissons sans le concours de la raison ». Jusqu'ici, il faut le souligner, nous sommes restés dans le seul registre du corps. Pour les hommes peut ensuite intervenir une « force purement spirituelle », tout à fait distincte du corps. Cette *vis cognoscens*, si elle s'applique avec l'imagination au sens commun, est dite voir, toucher, etc. ; si elle s'applique à l'imagination comme revêtue de diverses figures, elle est dite se souvenir ; si elle s'applique à l'imagination en tant qu'elle y forge de nouvelles figures, elle est dite imaginer ou concevoir ; si enfin elle agit seule, elle est dite entendre (*intelligere*). Et cette force est appelée diversement selon ses diverses fonctions : *vel intellectus purus, vel imaginatio, vel sensus ; proprie autem ingenium appellatur, cum modo ideas in phantasia novas format, modo jam factis incumbit* (on l'appellera proprement esprit, soit qu'il forme de nouvelles idées dans la fantaisie, soit qu'il s'adonne à d'autres déjà faites[8]). Et le lecteur conclura aisément, poursuit Descartes, « quels secours il faut demander à chacune de ces facultés et jusqu'à quel point l'industrie des hommes se peut étendre pour suppléer aux défauts de l'esprit (*ingenium*) ».

L'*ingenium*, est donc l'esprit aidé par l'imagination, c'est l'esprit en tant qu'il considère les figures déjà présentes dans l'imagination ou en tant qu'il y forme de nouvelles figures. C'est aussi l'esprit qui a besoin de l'imagination pour pallier ses défauts. Il y a là quelque chose d'étonnant au regard de ce que l'on retient en général de la théorie cartésienne de la connaissance. Bien sûr, Descartes affirme ici aussi que si l'entendement (*intellectus*) s'applique à des choses qui n'ont rien de corporel, il ne peut attendre aucun secours des autres facultés, et qu'il faut même, dans ce cas, s'assurer qu'il ne sera pas empêché par les autres facultés. Mais il estime néanmoins que « si l'entendement se propose d'examiner quelque chose qui puisse se rapporter au corps », il faut en passer par l'imagination et même par les sens externes, en dessinant des figures. Si l'entendement examine quelque chose qui peut se rapporter au corps, « il faut en former une idée, la plus distincte qu'on pourra, dans l'imagination »[9]. Et pour obtenir plus commodément cette idée, il faudra présenter aux sens externes la chose que cette idée représente. La chose ou plutôt une « figure abrégée » de la chose, de manière à ne point encombrer la mémoire. Ces « figures abrégées » sont des chiffres, des lettres, ou des images.

[8] M. Fichant fait remarquer que l'imagination, qu'elle reçoive ses idées ou figures du sens commun ou de la force cognitive, est toujours, du fait de son caractère corporel, passive et réceptrice. Il n'y a pas d'imagination productrice chez Descartes. C'est, dit-il encore, ce qui interdit de confondre l'*ingenium* avec le schématisme kantien qui s'inscrit pourtant dans sa filiation. M. Fichant, *Science et métaphysique dans Descartes et Leibniz,* P.U.F., 1998, p. 5, n. 1.

[9] *Règles utiles et claires pour la direction de l'esprit, Op. cit.,* p. 44 (Règle 12, AT X, 417).

Les règles 13 et 14 reviennent sur le projet général des *Regulae*. Il s'agit d'acquérir la connaissance en réduisant des proportions, si emmêlées qu'elles soient, jusqu'à ce que l'égalité entre la chose demandée et quelque chose connue soit vue clairement[10]. Acquérir une connaissance, c'est dégager le chose que l'on cherche de l'ensemble des rapports où elle est enveloppée ; c'est résoudre une équation du type de celles que nous avons données plus haut. Ceci suppose que nous ayons affaire à des grandeurs. Nous devons donc commencer par ramener nos questions à une série de rapports entre grandeurs. D'autre part, pour que l'imagination puisse aider l'entendement, il faut encore que nous rapportions tout ce que nous savons de ces grandeurs à une grandeur en particulier, l'étendue figurée, qui est le plus facilement dépeinte en notre imagination. Toutes les questions déterminées seront ainsi ramenées à des comparaisons entre grandeurs figurées. Descartes précise encore que l'étendue dont il s'agit ici n'est pas cet « être philosophique » que serait une étendue séparée intellectuellement des corps, car cette dernière ne « tombe pas sous l'imagination »[11]. C'est donc de l'étendue en tant qu'elle ne se sépare pas des corps qu'il sera question. Et même si l'entendement peut se livrer à toutes sortes d'abstractions et isoler tel ou tel terme, l'imagination doit, quant à elle, « forger la vraie idée de la chose », afin que l'entendement puisse se tourner vers les autres conditions de la chose, et qu'il ne juge pas qu'elles en ont été exclues. Ainsi, l'imagination rappellera à l'entendement qui conçoit une surface comme longue et large, qu'il ne peut s'agir que de la surface d'un corps, qui a aussi une profondeur. Ce que Descartes recommande, en ce qui concerne la mathématique, arithmétique et géométrie, ce n'est pas du tout de s'efforcer d'arracher l'entendement pur à l'imagination. Au contraire, les mathématiciens s'égarent lorsqu'ils renoncent au secours de l'imagination. Ainsi, le géomètre « met de la confusion dans son objet », quand il juge, de manière contradictoire, à la fois que les lignes n'ont aucune largeur et que « la course d'une ligne » peut produire une surface. S'il usait du secours de l'imagination, qui ne permet pas d'oublier que la ligne, comme la surface, est toujours la ligne (ou la surface) d'un corps, il saurait que la ligne dont la course produit la surface est un vrai corps[12].

Dans la règle 15 apparaissent les figures qui doivent nous permettre de représenter dans l'étendue n'importe quelle relation entre grandeurs et donc n'importe quelle question déterminée. Descartes introduit là deux genres de figures qui sont, dit-il, les plus simples que l'on puisse imaginer : des réseaux de points pour « faire voir » les multiplicités et des figures géométriques continues (en l'occurrence des lignes et des rectangles) pour faire voir les grandeurs. Cette double figuration est significative : elle est l'expression de l'idée qu'il y a deux genres d'objets irréductibles, les nombres et les grandeurs, et deux domaines différents, le discret et le continu. L'unité sera représentée soit par un carré, soit par une ligne, soit par un point. Pour figurer

---

[10] *Ibid.*, p. 67 (Règle 14, AT X, 447).
[11] *Ibid.*, p. 63 (Règle 14, AT X, 442).
[12] *Ibid.*, p. 66 (Règle 14, AT X, 446).

une grandeur, on utilisera soit un rectangle dont un côté est l'unité et l'autre la grandeur proposée, soit une ligne de la longueur proposée, soit une suite de points. Après que la règle 15 a introduit ces figures, la règle 16 suggère que l'on peut, lorsque l'on n'opère pas sur les grandeurs, mais que l'on veut seulement les noter pour soulager notre mémoire, représenter les grandeurs ou les multiplicités de manière encore plus concise, par une seule lettre. Cependant, lorsqu'il introduit les opérations, Descartes reprend les figures introduites précédemment. La règle 18 propose un schématisme très simple pour l'addition (on obtient la ligne représentant $a + b$ en dessinant l'une à la suite de l'autre la ligne représentant a et la ligne représentant b), pour la soustraction (on obtient la ligne représentant $a - b$ en dessinant la ligne représentant a et la ligne représentant b l'une en dessous de l'autre puis en reproduisant la portion de la première qui n'est pas doublée par la seconde) et pour la multiplication (le produit $a.b$ sera figuré par un rectangle dont la longueur et la largeur seront les lignes représentant a et b). En ce qui concerne la division, dans laquelle le diviseur est donné, on imaginera, écrit Descartes, que la grandeur à diviser est un rectangle dont un côté est le diviseur et l'autre le quotient. On pourrait s'étonner que Descartes introduise ce schématisme qui semble totalement inutile. On ne verra, je pense, l'intérêt d'un tel projet qu'en se reportant à la *Géométrie*. S'il est essentiel, pour Descartes, d'associer une figure géométrique à chaque opération algébrique, c'est qu'il veut pouvoir utiliser les figures géométriques pour résoudre des questions algébriques. Il faut cependant reconnaître que le schématisme développé ici est totalement inutilisable (et restera d'ailleurs inutilisé). Le fait que la multiplication amène à passer des lignes aux rectangles constitue une première limite, parce que cela rend problématique la réitération de l'opération (il faudrait en effet passer à des objets à 3, puis 4, etc. dimensions). De plus, ce schématisme ne permet pas de traiter le cas de l'extraction de la racine. Or cette opération est indispensable pour résoudre les problèmes que Descartes se propose : même dans le cas simple où l'on cherche une seule moyenne proportionnelle, cas qui correspond à une équation du type $\frac{3}{x} = \frac{x}{12}$, on est amené à utiliser l'extraction de racine. Descartes a très certainement aperçu les limites de ce schématisme et ce n'est sans doute pas par hasard que son traité s'arrête ici.

Le projet des *Regulae,* est, comme l'écrit M. Fichant, celui d'une « réduction méthodologique à l'étendue »[13]. Toute connaissance que l'on ne peut pas acquérir immédiatement par l'intuition est instauration et comparaison de rapports. Tous ces rapports peuvent être exprimés par des grandeurs qui seront figurés dans l'étendue. L'étendue sera donc *signe* de toutes les autres grandeurs. Connaître, pour les *Regulae,* cela revient à substituer au réel un *code* (fondé sur la représentation au moyen de lignes plus ou moins longues, mais aussi de figures et de chiffres). C'est cela que devrait réaliser l'*ingenium*. On a donc « un double mouvement d'abstraction

[13] M. Fichant, *op. cit.*, p. 8.

puis de symbolisation »[14]. L'abstraction ou réduction consiste à ramener toute question (qu'il s'agisse de questions mathématiques, ou des sons et des couleurs, par exemple) à la grandeur en général, à une série de proportions. La symbolisation consiste à transposer dans l'étendue, sous forme de figures, les rapports et proportions ainsi isolés. Mais le programme que Descartes expose dans les *Regulae* ne sera jamais réalisé. À l'époque du *Discours*, Descartes a renoncé à géométriser la physique. Quoiqu'il déclare que « toute sa physique est géométrie », Descartes n'a pas à proprement parler développé de physique mathématique. Comme le souligne M. Fichant, la physique cartésienne n'est autre chose que géométrie en ce sens seulement que les corps ne sont rien d'autre que de l'étendue. C'est là une affirmation qui appartient à la métaphysique, qui porte sur l'être de ce que nous appelons la « réalité physique » ; il ne s'agit pas de mettre la physique en équation et de la ramener aux mathématiques. La physique de Descartes, écrit encore Fichant « ne tire aucun bénéfice des procédures de symbolisation et de mise en équation des *Regulae* »[15]. Et il rappelle le jugement de Bachelard : « la physique de Descartes n'appartient nullement, dans l'acception moderne du terme, à ce qu'on appelle la physique mathématique… Laissons donc la physique de Descartes dans sa solitude historique »[16].

Descartes a abandonné le projet « physico-mathématique » des *Regulae*. Mais, en mathématique même, il n'a pas renoncé à l'idée qu'il fallait pouvoir figurer les rapports et les opérations. Sa *Géométrie* manifeste qu'il continue à penser que, comme le dit Rabouin, en mathématique on a accès à la conceptualité par l'intermédiaire des diagrammes.

La Géométrie de 1637

Descartes affirme qu'avec la *Géométrie* il a achevé les mathématiques. Sans doute parce qu'il pense avoir donné une solution complète à ce qui était, selon lui, le dernier problème important qui restait posé aux mathématiciens : trouver une méthode générale pour résoudre les équations algébriques, c'est-à-dire, trouver une méthode générale pour obtenir les racines d'un polynôme de degré quelconque. Précisons d'emblée que Descartes a été quelque peu présomptueux : la méthode qu'il propose ne fonctionne que jusqu'au 6e degré. Mais ce qui me semble important pour notre propos est de noter que c'est par une méthode graphique que Descartes va résoudre ce problème : il va donner le moyen de construire une ligne dont la longueur est égale à la racine en question. Ceci doit peut-être nous amener à nous interroger sur le décalage qu'il y a entre les raisons pour lesquels nous jugeons ce traité précieux, et les raisons pour lesquelles Descartes lui-même l'estimait important. Nous avons tendance à voir avant tout dans ce texte l'acte de naissance de la géométrie analytique : Descartes aurait trouvé le moyen de ramener tout problème géométrique à un calcul, il aurait « placé la géométrie

---

[14] *Ibid.*, p. 10.
[15] *Ibid.*, p. 20.
[16] *Ibid.*, p. 61.

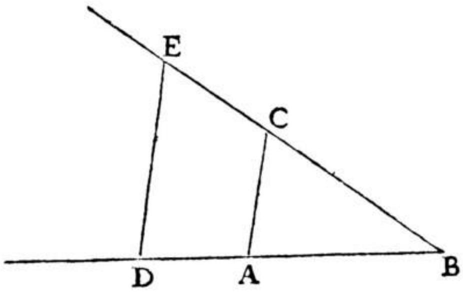
sous l'autorité définitive de l'algèbre »[17]. Or peut-être que Descartes lui-même ne voyait pas les choses comme cela. Lorsqu'il introduit ce que nous désignons aujourd'hui comme les coordonnées cartésiennes dans le cadre de la résolution du fameux problème de Pappus, Descartes le fait de manière extrêmement discrète, et on ne peut certainement pas attribuer cela à un excès de modestie, qui ne serait vraiment pas dans sa manière. En réalité, Descartes n'avait sans doute pas saisi l'importance de cette technique dont *nous* considérons qu'elle permet de remplacer les figures par des équations voire de se passer complètement des figures. Et peut-être l'une des raisons pour lesquelles Descartes ne mesure pas l'intérêt de sa méthode est-elle que, précisément, il ne juge pas souhaitable de se passer des figures. Pour lui, les coordonnées que nous appelons cartésiennes sont plutôt un outil, une technique, et pas une méthode qui devrait révolutionner l'esprit dans lequel travaille le géomètre (ce qu'elles deviendront par la suite). Il faut aussi être attentif à ceci que, pour Descartes, les fameuses coordonnées sont toujours des longueurs de segment. Elles sont donc toujours positives. Ceci complique considérablement leur utilisation, mais c'est le prix à payer pour pouvoir continuer à interpréter géométriquement (visuellement) ces coordonnées. Peut-être que, pour Descartes, il s'agit d'abord de montrer comment la géométrie permet de traiter ce grand problème de l'algèbre qu'est la recherche des racines d'un polynôme. Nous sommes tentés de voir dans ce traité une algébrisation de la géométrie. Il n'est peut-être pas impossible d'y voir une géométrisation de l'algèbre. Et il est en tout cas difficile de préciser ce que Descartes lui-même y voyait. La question est d'autant plus épineuse que le plan de la *Géométrie* n'est pas linéaire : la question centrale est, on l'a dit, la résolution générale des équations algébriques, et c'est d'une résolution graphique qu'il s'agit. Mais Descartes traite aussi des problèmes qui ne participent pas ou pas directement à ce projet principal, et que l'on pourrait interpréter comme des illustrations de la puissance de l'algèbre pour résoudre des questions géométriques. C'est le cas de la résolution complète du problème de Pappus pour lequel il introduit les fameuses coordonnées, et que

[17] Selon l'expression de A. Warsufel, dont la « Présentation de la *Géométrie* » (Descartes, *Œuvres complètes,* sous la direction de Jean-Marie Beyssade et Denis Kambouchner, Gallimard, coll. Tel, 2009, t. III, pp. 397-398) est particulièrement éclairante pour la question qui nous occupe : « La relation entre les deux disciplines [algèbre et géométrie] est assez complexe. D'un côté, la géométrie est soumise à l'algèbre, car tout problème la concernant est désormais (théoriquement) ramené à une simple vérification sur des nombres : c'est le point de vue traditionnel sur l'invention de la géométrie cartésienne. Mais d'un autre côté, la géométrie rend un service inestimable à l'algèbre en réglant le dernier problème des mathématiques : expliciter graphiquement les racines d'un polynôme arbitraire. En retour, l'algèbre conquérante paie ses dettes à la géométrie, permettant de répondre à toutes les questions que pose une courbe, comme sa construction point par point à partir de son équation, ou l'algorithme de détermination de ses tangentes […] qui apporte la brillante solution à une importante question d'optique ».

l’on peut considérer comme un exercice de géométrie analytique, ou de la résolution du problème des tangentes, qu’il traite aussi grâce à l’algèbre.

Les premières pages de la *Géométrie* sont consacrées à présenter un schématisme efficace pour la multiplication, la division et l’extraction de racine (les cas de l’addition et de la soustraction, évidents, ne sont pas exposés). Descartes va traduire géométriquement les opérations de base.

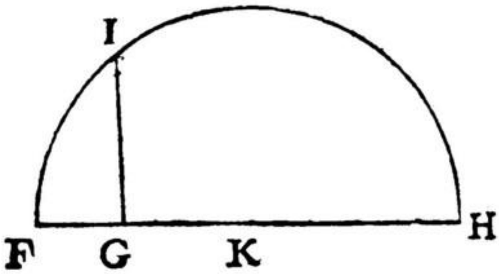
Pour la multiplication : « Soit, par exemple, AB l’unité, et qu’il faille multiplier BD par BC, je n’ai qu’à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication »[18].



Le théorème de Thalès permet en effet d’écrire $\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}$, d’où on tire immédiatement le résultat annoncé, puisque AB est l’unité.

Pour la division : « s’il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division» [19]. Le schéma est le même que pour la multiplication. On a en effet $\frac{BE}{BD}=\frac{BC}{AB}$.

Pour l’extraction de la racine carrée : « s'il faut tirer la racine carrée de GH, je lui ajoute en ligne droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusqu'à I à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée »[20].

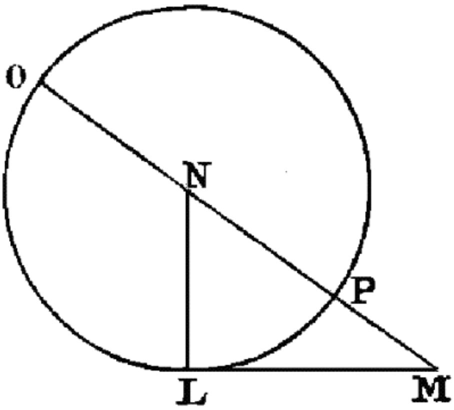


[18] Descartes, *Œuvres complètes, op. cit.*, p. 416.
[19] *Id.*
[20] *Id.*

En effet : les triangles FIG et IGH sont semblables. On a donc $\frac{FG}{GI} = \frac{GI}{GH}$. La conclusion est immédiate, puisque FG est l'unité.

Après cette figuration des opérations de l'algèbre, Descartes montre comment on peut déterminer graphiquement les solutions d'une équation du second degré.

Par exemple, si l'équation est du type $z^2 = az + b^2$, on procède comme suit : « je fais le triangle rectangle NLM, dont le côté LM est égal à b, racine carrée de la quantité connue b^2, et l'autre LN est $\frac{a}{2}$, la moitié de l'autre quantité connue qui était multipliée par *z*, que je suppose être la ligne inconnue; puis prolongeant MN, la base de ce triangle, jusqu'à O, en sorte que NO soit égale à NL, la toute OM est *z*, la ligne cherchée; et elle s'exprime en cette sorte : $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ »[21].

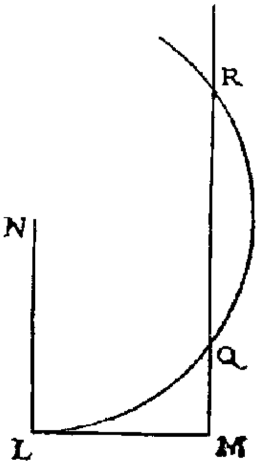


Cette équation, nous le savons, possède deux solutions. Il est remarquable que Descartes s'en tienne à la solution positive, la seule qui peut être interprétée comme la longueur d'un segment.

Descartes envisage ensuite le cas de l'équation $y^2 = -ay + b^2$. Pour nous, qui considérons spontanément *a* comme une quantité algébrique, qui peut être positive ou négative, ce cas est identique au précédent. Pas pour Descartes, pour qui toutes les lettres désignent des « lignes », des longueurs. Il adapte son raisonnement : « je fais le même triangle rectangle NLM, et de sa base MN j'ôte NP égale à NL, et le reste PM est *y*, la racine cherchée. De façon que j'ai »[22]. À $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ nouveau, Descartes s'en tient à la solution positive.

[21] *Ibid.*, p. 419.
[22] *Id.*

Descartes traite ensuite l'équation $z^2 = az - b^2$. Dans ce cas on peut avoir affaire à des racines imaginaires (précédemment, la quantité qui se trouvait sous le radical était toujours positive ; ici, elle peut être négative). Descartes nous fait voir, en construisant le dessin que, dans certains cas, il ne pourra pas y avoir de racine :

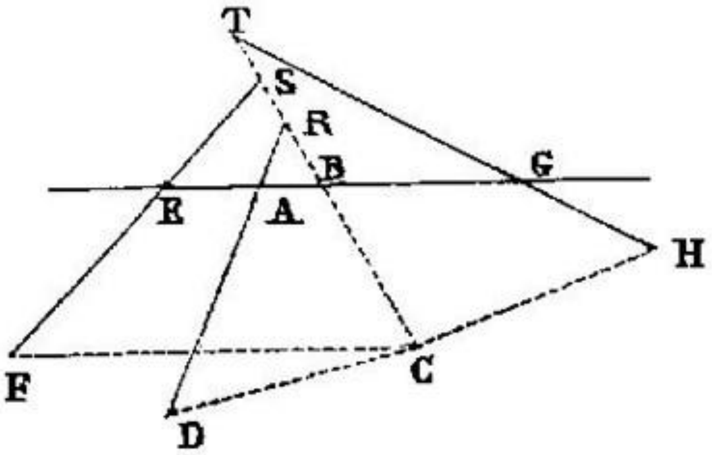


« je fais NL égale à $\frac{1}{2}a$, et LM égale à *b* comme devant, puis ; au lieu de joindre les points MN je tire MQR parallèle à LN, et du centre N, par L, ayant décrit un cercle qui la coupe aux points Q et R, la ligne cherchée *z* est MQ, ou bien MR, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, à savoir $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, et $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ »[23].

Dans ce cas, Descartes donne les deux racines, parce qu'elles sont toutes deux positives et qu'elles ont donc l'une et l'autre une interprétation géométrique. Il précise cependant qu'il pourrait arriver qu'il n'y ait pas de racines : « Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne coupe ni ne touche la ligne droite MQR, il n'y a aucune racine en l'équation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problème proposé est impossible»[24]. Cela arrivera si $b > \frac{a}{2}$.

Descartes s'attaque ensuite une première fois au théorème de Pappus. Le cas qu'il va traiter explicitement est le cas à 4 droites, mais il annonce aussi les résultats que l'on obtient pour un plus grand nombre de droites.

[23] *Ibid.*, p. 420.
[24] *Id.*



Dans le cas particulier qui est ici traité, la question est la suivante : on donne quatre droites (ici en traits pleins). On demande le lieu d'un point C tel que les segments (en pointillés) menés de ce point C à chacune des droites suivant des directions déterminées ont des produits égaux, ici CB × CF = CD × CH. Les lignes en pointillés doivent faire un angle déterminé avec les droites données. Si on considère le cas particulier où tous ces angles sont de 90°, le théorème de Pappus devient : Quel est le lieu d'un point C tel que le produit des distances de ce point à deux droites données soit égal au produit des distances de ce point à deux autres droites données : $d(C,D_1)\cdot d(C,D_2)=d(C,D_3)\cdot d(C,D_4)$[25]. Que l'on ait, dans le cas général, une sorte de « distance oblique » ne modifie en fait pas fondamentalement le problème.

C'est dans la résolution de ce problème que Descartes introduit ce que nous appelons aujourd'hui les coordonnées cartésiennes. Comme nous l'avons signalé ci-dessus, les valeurs x et y en question sont ici des longueurs particulières, par rapport auxquelles les autres longueurs sont déterminées. Il s'agit donc nécessairement de quantités positives, ce qui, bien sûr, rend leur manipulation compliquée.

Reprenons le texte de Descartes

> Premièrement, je suppose la chose comme déjà faite, et pour me démêler de la confusion de toutes ces lignes, je considère l'une des données et l'une de celles qu'il faut trouver, par exemple AB et CB, comme les principales ; et auxquelles je tâche de rapporter ainsi toutes les autres. Que le segment de la ligne AB, qui est entre les points A et B, soit nommé *x* ; et que BC soit

[25] La géométrie analytique nous permet de résoudre rapidement ce problème : nous savons que la distance d'un point de coordonnées (u,v) à la droite d'équation ax+by+c=0 n'est autre que $|au+bv+c|$. De là, nous concluons très facilement que le lieu du point C est une courbe du second degré (ici en *(u, v)* qui sont les coordonnées du point C), une conique.

> nommé *y* ; et que toutes les autres lignes données soient prolongées jusqu'à ce qu'elles coupent ces deux, aussi prolongées, s'il est besoin et si elles ne leur sont point parallèles ; comme vous voyez ici qu'elles coupent la ligne AB aux points A, E, G, et BC aux points R, S, T »[26].

Descartes introduit ici les deux grandeurs de référence, x et y. Nous ne pouvons pas nous empêcher de voir AB et la parallèle à CB passant par A comme les deux axes cartésiens, mais c'est sans y insister que Descartes introduit ces coordonnées. Comme le dit Warsufel, « ce serait une erreur de croire en l'occurrence à une discrétion faite d'orgueilleuse dissimulation. L'introduction des coordonnées n'était nullement aux yeux de Descartes le concept fondamental de la révolution introduite, mais seulement son outil privilégié»[27].

La suite du développement — que je ne reprends pas dans le détail — consiste à utiliser les propriétés des triangles semblables pour parvenir à exprimer les grandeurs CB, CD, CF et CH, qui interviennent dans la thèse, en fonction des grandeurs *x* et *y* et d'une série de grandeurs connues qui dépendent des positions des quatre droites données et des angles que les segments tirés de C font avec ces quatre droites. Une fois parvenu à ce stade, il ne reste plus qu'à constater que chacune des grandeurs CB, CD, CF et CH ne fait intervenir *x* et *y* qu'au premier degré, et que, par conséquent, l'expression de la condition à laquelle doit satisfaire le point C ne fera intervenir que du second degré en les inconnues *x* et *y*, ce qui revient à dire que le lieu cherché est une conique.

Descartes donne ensuite des indications concernant la résolution du problème de Pappus à un plus grand nombre de droites. Dans le cas du problème à 6 droites, on aura une équation de degré 3. De manière générale, les lieux à 2n droites et à 2n-1 droites sont des courbes algébriques de degré n, définies par des polynômes de degré n de la forme $P_n(x,y) = 0$. Cela donne lieu à une classification des courbes algébriques en fonction du nombre de droites auquel elles correspondent dans le problème de Pappus. Classer ainsi les courbes en fonction du nombre de droites de Pappus, c'est aussi, bien sûr, les classer en fonction de leur équation. On pourrait voir là un indice que Descartes cherche à soumettre la géométrie à l'algèbre, alors qu'un développement tel que l'interprétation graphique de la résolution des équations du second degré, que nous avons évoqué ci-dessus, manifesterait plutôt l'importance de la visualisation des questions algébriques. En parcourant les deux autres livres de la *Géométrie,* on constate que ce va-et-vient entre algébrisation de la géométrie et géométrisation de l'algèbre se poursuit tout au long du traité.

---

[26] Descartes, *Œuvres complètes, op. cit.,* p 425.
[27] *Ibid.* p. 711.

Leibniz

On pourrait penser que Leibniz, si souvent salué par les mathématiciens et les logiciens formalistes du début du XX^{e} siècle comme leur précurseur, soit plus encore que Descartes, convaincu que la mathématique peut, ou même doit, se faire sans recours aux images. Y. Belaval, l'un des grands commentateurs de Leibniz, opposait ainsi l'intuitionnisme cartésien au formalisme leibnizien. Et il insistait sur le rôle important que jouait chez Leibniz la « pensée aveugle », cette pensée qui manipule les symboles sans voir - sans saisir par l'intuition - les idées que ces symboles représentent. Selon cette interprétation, la certitude des mathématiques, leur puissance et donc leur privilège, tiendrait, pour Leibniz, à leur caractère purement formel, au fait qu'elles ne traiteraient, comme la logique, que de structures sans contenu.

Contre cette interprétation, qu'il juge anachronique dans sa manière d'insister sur le caractère purement conceptuel et non intuitif des mathématiques, Rabouin soutient que, pour Leibniz, ce qui fait la puissance et la certitude des mathématiques, ce n'est pas le caractère purement formel de leurs raisonnements, mais la nature de leurs objets. Et ces objets sont décrits par le type de connaissance qu'ils réclament : l'imagination, une imagination qui comprend des notions claires et distinctes. À l'appui de cette thèse, Rabouin allègue notamment une longue lettre à Sophie-Charlotte écrite en 1702[28]. Dans un passage qui n'est pas sans rappeler la règle XII dont j'ai déjà parlé ci-dessus, Leibniz commence par évoquer les données des sens externes (les sons, les couleurs, les odeurs), qui sont confuses ou, comme il le dit aussi « occultes », puis il ajoute que les sens nous font aussi connaître « des qualités plus manifestes qui fournissent des notions plus distinctes ». Ces notions plus distinctes sont, par exemple « les nombres et les figures » (on reconnaît les objets de la mathématique), qui peuvent être atteintes par plusieurs sens (vue, toucher, voir ouïe en ce qui concerne les nombres) et qui, pour cela, relèvent d'un « sens commun ». Leibniz poursuit en disant que l'imagination comprend à la fois les notions des sens particuliers, qui sont confuses[29], et celles du sens commun, qui sont claires et distinctes. Et il précise que « ces idées claires et distinctes qui sont sujettes à l'imagination sont les objets des sciences mathématiques ». Bien sûr, Leibniz ajoute que les sens et l'imagination ne suffisent pas pour assurer à la mathématique sa généralité : on ne pourrait aller au-delà de l'observation et de l'induction (qui ne permettent pas d'atteindre des vérités générales et nécessaires) si

[28] C.I. Gerhardt, *Die philosophischen Schriften von G.W. Leibniz,* Berlin, 1875-1890 (cite GP ci-dessous) VI, pp. 499-508.

[29] Elles sont confuses, parce qu'on ne peut pas les expliquer. On peut les reconnaître (on peut reconnaître telle ou telle odeur) mais on ne peut pas expliciter ce qu'elles comprennent ; c'est, écrit Leibniz, un « je ne sais quoi dont on ne saurait rendre compte ». Une définition telle que celle que les essayeurs ont de l'or est, en revanche distincte, parce qu'elle précise les marques qui permettent distinguer l'or de tout autre métal. On peut ainsi donner à quelqu'un qui n'a jamais vu d'or le moyen de le reconnaître alors qu'on ne peut pas faire comprendre ce qu'est le rouge à un aveugle.

« quelque chose de plus haut, et que l'intelligence seule peut fournir, ne venait au secours de l'imagination et des sens »[30]. N'empêche que si, dans le domaine des mathématiques, l'imagination n'est pas suffisante, ce texte suggère clairement qu'elle est nécessaire. Et Rabouin affirme que Leibniz serait parvenu avant Kant à « l'idée que l'imagination mathématique appuie en dernière instance la médiation du sensible à l'intelligible »[31]. Leibniz ne bannit pas l'imagination des terres mathématiques. Il ne faut pas s'en tenir à l'opposition que nous sommes parfois tentés de faire entre un entendement clair et distinct et une imagination vouée à la confusion et qu'il faudrait dès lors écarter. La lettre à Sophie-Charlotte fait place à une imagination distincte. Plus précisément, Leibniz y distingue trois types de notions : sensibles seulement (objets affectés par les sens particuliers), sensibles et intelligibles (qui appartiennent au sens commun), intelligibles seulement (propres à l'entendement). Les premières et les secondes sont imaginables. Les secondes et les troisièmes sont intelligibles et distinctes tandis que les premières sont confuses. Les objets des mathématiques relèvent des secondes notions. Ils sont donc à la fois imaginables, intelligibles et distincts[32].

Rabouin fait aussi référence à un opuscule de 1686 dans lequel Leibniz affirme de manière explicite que le privilège des mathématiques est lié au fait que la vérité peut y être « exposée sous les yeux », examinée par l'expérience et guidée par un « fil sensible » :

> Sans doute la raison n'est-elle pas mystérieuse, qui explique qu'à ce jour seules les disciplines mathématiques aient été parées – jusqu'à exciter l'étonnement et la jalousie – non seulement de la certitude mais aussi d'une abondance de vérités éminentes. […] on doit l'attribuer à la nature de l'objet, où la vérité peut être exposée sous les yeux sans grand labeur, sans expérience dispendieuse, […] où se découvre une certaine suite, et pour ainsi dire le fil de la pensée. […][33]
> Cet avantage d'un examen continuel par l'expérience, et ce fil sensible dans le labyrinthe de la pensée, tel qu'il peut être perçu par les yeux et comme touché de la main (avantages auxquels sont redevables d'après moi les progrès des mathématiques) a manqué jusqu'ici dans les autres domaines de la raison humaine. Car les expériences dans les matières physiques sont difficiles, dispendieuses et trompeuses ; douteuses et périlleuses dans les matières morales et civiles […] ; mais dans les matières métaphysiques elles ne sont, en grande partie, pas mêmes possibles.[34]

---

[30] GP VI, 501.
[31] « Logique, mathématique et imagination dans la philosophie de Leibniz », *Corpus*, 49, 2005, p. 180.
[32] GP VI, 502.
[33] *Eléments de la raison*, texte de 1686. G.W. Leibniz, *Recherches générales sur l'analyse des notions et des vérités*, Introduction et notes par J.-B. Rauzy, P.U.F., 1998, pp. 143-144. Cité par D. Rabouin, « Logique, mathématique et imagination dans la philosophie de Leibniz », p. 178.
[34] *Ibid.*, p. 145. Cité par D. Rabouin, « Logique, mathématique et imagination dans la philosophie de Leibniz », p. 178, n° 29.

Les mathématiques doivent donc être distinguées de la physique, de la morale et de la métaphysique. Mais elles doivent aussi être distinguées *de la logique*. Comme science des choses imaginables, la mathématique ne peut être identifiée à la logique. Selon Rabouin, on aurait trop tendance à rabattre l'une sur l'autre ; il y a toujours, dans la mathématique de Leibniz, couplage entre l'aspect algorithmique, formel, et l'aspect intuitif et non disparition du second au seul profit du premier.

De plus, le recours au formalisme, à la « pensée aveugle » ne signifie pas, pour Leibniz, que l'on donne congé au sensible, à l'image. Bien au contraire. Ce thème est notamment développé dans les *Méditations sur la connaissance, la vérité et les idées*[35], que je paraphrase ici. Le plus souvent, explique Leibniz, surtout si l'analyse est très longue, nous n'embrassons pas toute la nature de la chose à la fois ; nous substituons alors aux choses des signes dont, pour abréger, nous avons coutume d'omettre l'explication dans le travail actuel de la pensée, sachant ou croyant que cette explication est en notre possession. Suit l'exemple du chiliogone : je ne considère pas toujours ce qu'est un côté, une égalité, le nombre mille, mais je me sers de ces mots pour qu'ils tiennent lieu des idées que j'ai de ces choses parce que j'ai conscience de posséder la signification de ces mots et que j'estime que l'explication n'en est pas nécessaire pour le moment. C'est la connaissance *aveugle* ou *symbolique*. L'introduction de la *cogitatio caeca* n'est donc pas pensée par Leibniz comme un recours à l'abstraction et au formalisme pour pallier à la confusion des images (comme je ne puis pas imaginer le chiliogone, je lui substitue une idée abstraite) mais comme un recours à des signes sensibles pour pallier à notre incapacité à saisir l'idée (je substitue les signes – ici les mots – aux idées). Un peu paradoxalement, peut-être, croire à l'importance de la *cogitatio caeca* c'est aussi croire à l'importance du recours au sensible. Les caractères, les signes, les symboles sont essentiellement sensibles. Finalement, ce n'est peut-être pas tant parce qu'on a attribué trop d'importance à la caractéristique que l'on a oublié l'importance du rôle de l'imagination chez Leibniz, mais plutôt parce que l'on a oublié que la caractéristique est affaire de signes sensibles, visibles, d'images.

Il va de soi que les quelques indications rassemblées ici ne valent pas démonstration, ne serait-ce que parce que je n'ai allégué que quelques textes de Leibniz, alors qu'il y en a un nombre considérable sur ces questions, et qui peuvent se prêter à des interprétations diverses. Il me semble néanmoins précieux de suggérer que l'interprétation intellectualiste de la conception leibnizienne (mais aussi cartésienne) des mathématiques n'est pas la seule possible : peut-être, après tout que, pour les Classiques, ce qui donne leur solidité aux mathématiques, ce n'est pas que l'on pourrait s'y passer de l'imagination, mais que les objets considérés sont tels que l'imagination peut s'y appliquer dans la clarté et la distinction, non dans la confusion. Peut-être que c'est à raison que Rabouin suggère que, pour les Classiques, les

[35] G.W. Leibniz, *Opuscules philosophiques choisis,* traduits du latin par P. Schrecker, Vrin, 1978, pp. 9-16.

mathématiques ne sont pas seulement un enchaînement de concepts mais la mobilisation d'un lieu – l'espace – où ces enchaînements se donnent à voir. Peut-être que c'est à raison qu'il juge contestable la conception logicisante de l'histoire des mathématiques que l'on a pu développer au début du XXe siècle et pour laquelle la référence kantienne à l'intuition spatiale serait une parenthèse malheureuse : « peut-être que, comme il le suggère, Kant, en liant les mathématiques à l'imagination n'instaure nulle rupture, mais se coule dans une détermination qui domine chez les auteurs classiques[36] ».

[36] D. Rabouin, *Mathesis universalis,* p. 354.

La pensée graphique.
Pour une sémiotique des diagrammes

Per Aage BRANDT
Case Western Reserve University, Cleveland

N'efface pas mes circonférences.
Archimède dans Capek, *La mort d'Archimède* (1938)

1. Qu'est-ce qu'un diagramme ?

Un diagramme est un fait graphique qui normalement apparaît dans un contexte verbal et qui est typiquement destiné à représenter le fonctionnement ou l'articulation d'un phénomène d'une certaine complexité causale. Ce contexte peut être un discours technique, théorique, analytique ou autre ; il s'agit régulièrement d'un discours épistémique, car la représentation diagrammatique représente un sens sous-jacent, un fonctionnement structurel, causal, etc. du phénomène en question plutôt que son apparence. « Image du sens », le diagramme n'est ni une constellation de symboles opérationnels arbitraires et conventionnels, comme le serait une équation, ni une composition iconique se référant à une perception possible, comme une photographie. Il est curieusement passé presque inaperçu dans la littérature sémiologique, qui, pourtant, s'en sert abondamment dans ses propres « illustrations » graphiques, et il n'a en effet jamais été abordé directement dans sa spécificité sémiotique, malgré les fameux diagrammes logiques d'un C. S. Peirce[1].

---

[1] Dans ces tentatives, à savoir le projet des « graphes existentiels » (*Collected Papers*, Vol. 4, Livre II), Peirce essaie de créer une écriture en deux dimensions spécifiquement destinée à montrer visuellement la structure des processus logiques du raisonnement. Il se lance ainsi dans une modélisation symbolique ou semi-symbolique fondée sur ses propres conventions grapho-sémantiques explicites, et non dans une étude des faits diagrammatiques existants. Le grand livre de F. Stjernfelt, *Diagrammatology* (2007), se tient, malgré son envergure philosophique et ses ambitions théoriques, trop près de Peirce pour aborder ce champ d'étude empirique que constitue le diagramme tel qu'il se pratique à l'état « sauvage » ; pour Stjernfelt, comme pour tant d'autres sémioticiens qui l'effleurent en passant, le diagramme

Pour montrer combien le diagramme problématise la sémiotique, prenons un simple diagramme de bifurcation (Fig. 1). Ce graphe peut se référer à un flux hypothétique A qui est censé se diviser en deux branches B et C, ou à une alternative conceptuelle, ou encore à l'idée d'un tout contenant deux parties, ou à bien d'autres choses encore. Mettons que, dans un contexte donné, il représente une proposition A qui se verra attribuer la valeur de Vraie (B) ou de Fausse (C).

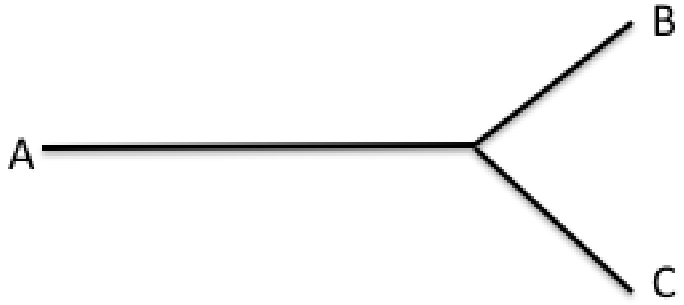


Fig. 1. *Graphe de bifurcation*

J'imagine dans ce dernier cas la proposition comme une entité immatérielle parcourant la ligne A (dans le temps mental d'un acte de jugement épistémique) jusqu'à devoir assumer la valeur de vérité assignée à la branche B ou bien celle assignée à C : v(A) ou f(A). Puisque la forme bifurquante est motivée, elle n'est pas *symbolique*, au sens d'un signe conventionnel (comme ce serait le cas si la forme était celle d'un signe de l'écriture assyrienne semblable, par exemple – tel que *waw*). Et dans la mesure où elle ne représente rien de sensible qui pourrait fonder une similarité, il n'est pas possible de la déclarer *iconique*. Ce que représente cette forme – dans le contexte et avec l'apposition (celle-là conventionnelle) des symboles A, B et C – est une « imagination » par laquelle une entité propositionnelle se voit attribuer tel prédicat épistémique, véridictoire. Cette « imagination », cette chose eidétique, est présente à mon esprit au moment où je me sers de ce diagramme pour extérioriser une partie de ce que me donne à voir ma vision intérieure, qui s'exprime mentalement ainsi. Comment appeler cette vision mixte, extérieure-intérieure ?

La question de savoir quel statut sémiotique attribuer à ce diagramme n'est pas triviale. Si une alternative peut spontanément se représenter par une bifurcation, sans présupposer un codage conventionnel, c'est que la bifurcation s'y prête déjà, c'est un *schéma naturel* de l'alternative. Le diagramme, à l'instar de beaucoup de gestes « figuratifs » spontanés, qui fonctionnent sans codage conventionnel, semble bien montrer graphiquement

constitue un cas d'iconicité non-problématique, et donc considéré en soi comme plutôt trivial, quoique occasionnellement illustratif en logique ou en modélisation.

comment nous schématisons, au moment même de penser ou de communiquer ce que nous pensons et essayons de dire. Le *sens* du diagramme consiste pour ainsi dire en un *graphe mental identique* – du moins partiellement – au graphe qu'il nous arrive de dessiner ou d'esquisser gestuellement. On pourrait dire par conséquent que le diagramme est un *indice* du mécanisme cognitif, qui schématise graphiquement au cours de l'élaboration d'une pensée[2]. Nous allons retenir et développer cette hypothèse du double statut du diagramme, sémiotique et cognitif, dans ce qui suit.

2. Quels sont les graphes d'un diagramme ?

En sémantique cognitive, les schémas dynamiques, cinétiques ou statiques dont se servent les linguistes (R. Langacker, L. Talmy, G. Fauconnier *et alii*, *passim*) sont régulièrement représentés par des diagrammes. Chaque chercheur a son style diagrammatique reconnaissable, signé. Ces diagrammes illustrent souvent certaines propriétés sémantiques relationnelles des morphologies, par exemples des prépositions, des conjonctions, des adverbes satellites (*up, down, in out, off…*). C'est que la morphologie est sémantiquement distincte du vocabulaire en général, elle schématise, alors que la lexicologie catégorise. La différence entre les *catégories* et les *schémas*, dans une langue, c'est précisément que ces derniers s'expriment par des morphèmes (relevant des « classes fermées », en termes de parties du discours), alors que les premiers s'expriment par des prototypes nominaux ou verbaux (relevant des « classes ouvertes »). La mise en relation eidétique des catégories, au cours de la construction d'une pensée, se fait par les schémas ; corrélativement, dans les diagrammes, les graphes mettent en relation le contenu catégoriel, représenté par les indications symboliques apposées au diagramme. Comme nous venons de le voir, les parties notables d'un diagramme appellent des symboles (A, B, C), qui, à leur tour, renvoient à des catégories ou à des propriétés catégorielles. Une pensée stéréotypique consisterait ainsi en une construction schématico-catégorielle figée et immuable. Une activité cognitive fluide et variable, en revanche, recompose sans cesse les constellations schématico-catégorielles, en les recatégorisant ou en les reschématisant ; c'est essentiellement ce en quoi consiste la « réflexion ». La distinction entre catégories et schémas est donc d'une importance capitale, à la fois cognitive et sémiotique, pour l'étude du sens.

En étudiant les manifestations diagrammatiques sur les tableaux noirs (ou blancs) des salles de cours académiques, dans les textes scientifiques et pédagogiques, les modes d'emploi techniques, etc., sans oublier les griffonnages improvisés des chercheurs, il est possible de se former une

[2] Le diagramme serait ainsi lié directement à ce que le philosophe J. Fodor appelle « le langage de la pensée », cf. : J. Fodor, *LOT 2 : The Language of Thought Revisited* (2008). S'agit-il pourtant d'un « langage », voire d'une « langue » ? La question de savoir dans quelle mesure cette activité graphique mentale est systématique, reste ouverte.

impression d'ensemble sur *l'inventaire* éventuel des figures apparaissant dans ces expressions. L'intuition nous dit que cet inventaire constituera un ensemble ouvert, formant une liste infinie de types de graphes de toute sorte ; mais, d'autre part, il n'est pas exclu que cet ensemble s'avère fermé[3]. Dans ce qui suit, nous allons proposer, à titre heuristique, une liste très réduite, quoique non nécessairement exhaustive, d'un tel inventaire, une liste courte qui, fermée ou non, nous permet déjà d'envisager une combinatoire « grammaticale » du diagramme. Nous distinguerons ici les « diagrammèmes » suivants : les *flux*, les *flèches*, les *fermés*, les *liens*, les *lignes de partage*, et finalement les *contours*, avec leur métrique.

2.1. Les **FLUX**. Ce sont des lignes orientées qui montrent les parcours possibles dans un réseau, avec ses confluences, ses bifurcations et ses bassins et turbulences éventuels.

2.1a. En voici un exemple simple :

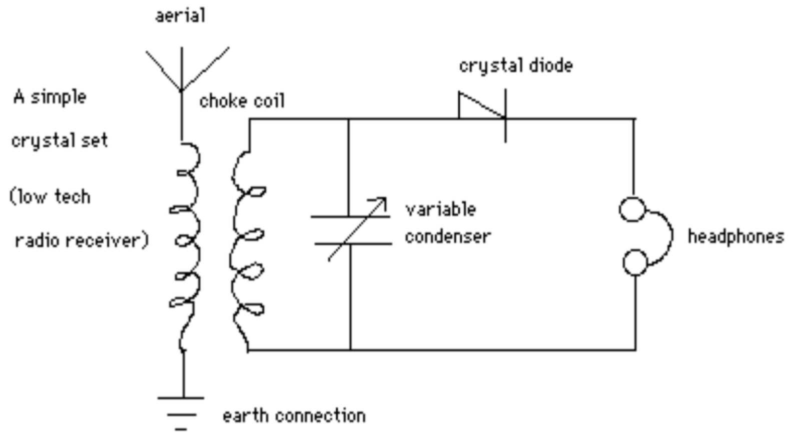


Fig. 2. *Diagramme d'un poste à galène, trouvé sur un tableau de classe en physique*

Le plan de construction d'un poste primitif de radio, dessiné à la main. Les flux électriques provoqués par les ondes captées par l'antenne font passer le courant dans les deux sens, ce pourquoi la diode, qui le redresse, est nécessaire. Le condensateur variable, mis en parallèle avec la bobine, permet de sélectionner la fréquence d'ondes ; on n'a pas besoin d'amplification avec un casque radiophonique classique pour pouvoir écouter les chaînes en ondes courtes et moyennes. C'est l'appareil le plus simple et le plus écologique possible. Ses composantes (antenne, bobine double, diode, condensateur, casque, etc.) sont représentées par des « icônes » symboliques[4] :

[3] *Fermé / ouvert* au sens des classes ouvertes ou fermées du vocabulaire d'une langue.
[4] Un « icône » en ce sens est effectivement une image visuelle de l'objet visé, mais simplifiée jusqu'à se réduire à un graphème désignant la catégorie de l'objet, et non pas un exemplaire singulier.

2.1b. Les schémas dynamiques en forces-et-barrières que les linguistes utilisent pour rendre compte du sens des verbes modaux, par exemple *pouvoir* vs *devoir,* sont représentés par des diagrammes de flux à entraves tels que celui-ci.

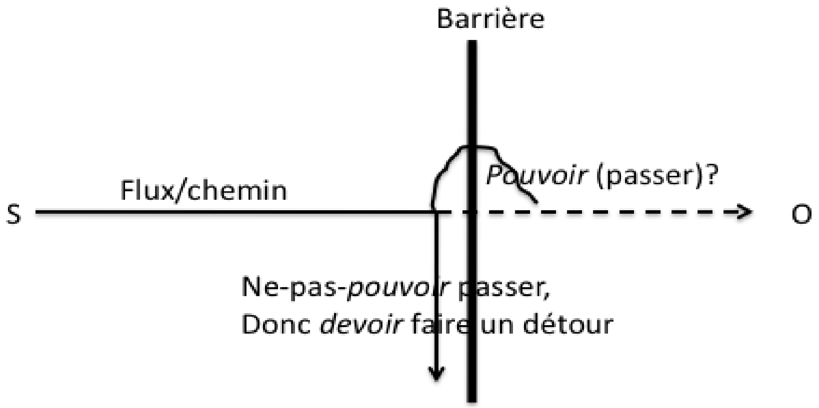


Fig. 3. *Schéma dynamique du sens modal des verbes* pouvoir *vs.* devoir *(faire)*

Évidemment, il faut imaginer une entité mobile (S, sujet) suivant le flux indiqué pour surmonter la barrière avant de joindre son objet (O); cependant, S et O ne sont que des êtres symboliques, pour ainsi dire pronominaux, et seul l'aspect dynamique du rapport S–O est représenté par ce diagramme. Le sens des verbes modaux est purement schématique, et le sens schématique peut migrer d'un domaine expérientiel à l'autre : la conjoncture modale peut alors devenir *épistémique* (pouvoir-penser), *déontique* (pouvoir-se-permettre-de-faire), *physique* (être-capable-de-faire), ou *symbolique* (pouvoir-déclarer), alors que le schéma lui-même reste neutre face à ces variations sémantiques. On utilise les mêmes schémas dans tous les domaines, mais non les mêmes catégories; par conséquent, le même style de logique "spontanée" peut s'appliquer à tout le pensable, et la même morphologie grammaticale s'applique à tous les thèmes dont il est possible de parler, quels que soient le domaine sémantique et sa spécificité terminologique.

Dans ce schéma[5], une entité S parcourt le chemin direct vers O, son « but », (car nous sommes dans la causalité intentionnelle) avant d'être arrêtée par une barrière qui l'oblige à dévier, si elle n'arrive pas à la surmonter. La barrière est ou bien un second flux qui bloque le premier, ou bien un autre diagrammème : un répulseur (relevant du soi-disant "container"» ; il s'agit du « mur » qui entoure le fermé, le chorème, voir ci-dessous). Le diagramme dynamique des modalités – qui peut bien entendu se nuancer selon la sémantique modale des langues, des constructions

[5] On trouve un schéma dynamique dans E. Sweetser, *From Etymology to Pragmatics*, 1990, dans une description de la sémantique modale. Elle renvoie au pionnier Leonard Talmy, qui avait proposé d'autres variantes de ces *force-dynamic schemas* dès les années 1970 ; voir L. Talmy, *Toward a Cognitive Semantics* (2000).

grammaticales, ou des textes – semble relever originairement d'une pensée intentionnellement causale : on *doit* faire X, si on *veut* atteindre O ; on peut *devoir* faire X sans *pouvoir* faire X, etc.

Une conséquence particulièrement intéressante du rôle des flux dans la diagrammatique de notre pensée est que les bifurcations peuvent ainsi « s'influer » en s'entrecoupant. C'est ce qui nous permet de lier des idées voisines par la relation dite d'implication et, en général, par des liens conditionnels, comme dans l'exemple suivant.

2.1c. La branche d'une bifurcation peut devenir la barrière coupant et bloquant l'une des branches d'une autre bifurcation, ce qui provoque un changement dynamique de ce second flux.

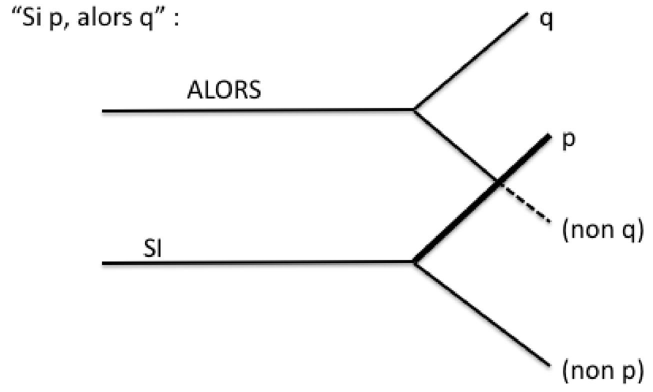


Fig. 4. *L'implication*

La circonstance p implique q. Pour lire ce diagramme, il faut évidemment supposer une entité X susceptible de devenir porteuse de la propriété *p* et une entité Y qui pourra assumer la propriété *q*. Si la conjoncture *p* de X arrive à bloquer la conjoncture *non-q* de Y, alors on aura *q* « à cause de » *p*. La circonstance *p* de X provoque la circonstance *q* de Y. La même conjonction /*si*/ (en angl. /*if*/) peut d'ailleurs introduire une subordonnée interrogative – « je ne sais pas *si* tu es d'accord (ou non) » – , précisément parce qu'elle porte en elle la bifurcation, dans la construction interrogative comme dans la conditionnelle. Nous laissons au lecteur curieux de deviner ce que serait le schéma de *l'exception* à une telle régularité conditionnelle. La protase (si *p* de X) de la formule conditionnelle est donnée dans la modalité du /*possible/* ; *p* et *non-p* sont les possibles alternatifs ; l'apodose (*q* de Y) subit un changement de sa valeur modale, qui de /*possible/* devient /*nécessaire/*, quand *non-q* est devenu impossible, puisque bloqué par *p*. Voici la figure sans doute la plus importante de toute pensée. Il peut évidemment s'agir de deux personnes, X et Y, dont l'une modifie la « liberté » de l'autre par une obligation ; le rapport interpersonnel est essentiellement modal, ce qui se manifeste dans toute négociation.

2.2. Les **FLÈCHES**. Ce sont des indicateurs spatio-temporels ou déictiques. Elles orientent notre attention, ou bien d'une chose vers une autre, qui suivrait ou correspondrait à la première, pour quelque raison, typiquement parce que la dernière est le résultat d'une transformation régulière de la première ; ou bien elles appellent simplement notre attention directement vers une chose, déictiquement.

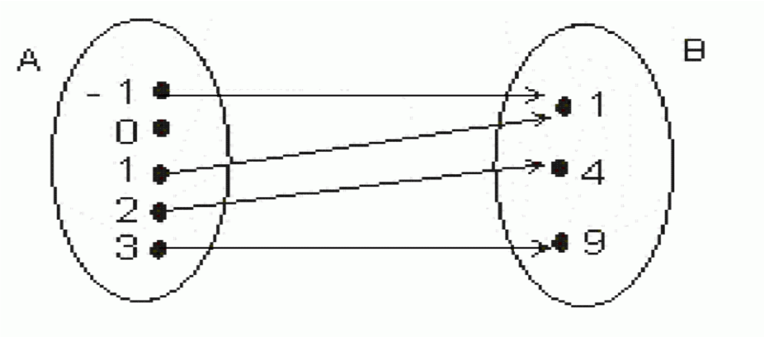


Fig. 5. *Valeurs quadratiques*

Les projections, "mappings", ou correspondances, entre deux collections d'objets, c'est-à-dire les opérations de toutes sortes qui établissent de telles relations avec une certaine régularité, typiquement entre deux cadres, ensembles, situations, lieux ou espaces conceptuels, sont universellement représentées par ces flèches. On varie sur leur épaisseur, leur longueur, la consistance pleine ou pointillée de leur corps pour indiquer leur importance relative ou leur statut épistémique. Les flèches apparaissent souvent en faisceaux, comme dans cet exemple, pour signifier des transformations corrélatives. Il s'agit souvent, encore comme dans l'exemple ci-dessus, de la mise en relation de deux domaines d'ordre différent et séparés d'un vacuum spatial représentant la ratio de la corrélation – cela d'ailleurs par contraste avec les flux[6], qui *relient* les lieux, alors que les flèches les *séparent*.

2.3. Les **FERMÉS**. Ces entités (en anglais : "container schemas" ; en sémiotique : chorèmes[7]) séparent un intérieur et un extérieur et permettent

[6] Les flux sont continuistes, les flèches discontinuistes, pourrait-on dire.

[7] La *chorématique*, étude de la logique des lieux, introduite dans un ouvrage de 1982 en danois, fait aussi l'objet d'un chapitre, « La sémiotique de l'être », de notre thèse d'Etat, *La Charpente modale du sens. Pour une sémio-linguistique morphogénétique et dynamique*, publiée en 1992, Ed. John Benjamins et Aarhus University Press. Le *chorème* est une notion plus développée que celle de « container » à beaucoup d'égards. Il sert à schématiser un très grand nombre de phénomènes morphologiques verbaux et périphrastiques, alors que le « container schema » est notamment mis en

ainsi à un essaim d'objets intégrés ou à une masse de former un *tout qualifié*, à l'exclusion des objets ou des parties de la masse qui ne se « qualifient » pas pour en « faire partie ». Un fermé est protégé de l'extérieur par une barrière circulaire (fermée) résistante aux flux venant de l'extérieur ou de l'intérieur. *Entrer* et *sortir* sont donc les événements les plus remarquables caractérisant ces entités totalitaires de qualification. Les actes et les propriétés sont typiquement représentés par des fermés. (Ainsi, on peut « entrer en fonction » : l'agent entre dans le chorème fermé de la fonction, conçue comme un lieu conceptuel). Les fermés divisent l'espace en deux zones, la zone marquée, interne, et la non-marquée, externe, d'où partent les entités mobiles dont on décrit, c'est-à-dire imagine, les statuts changeants. Ils peuvent s'enchâsser et s'entrecouper, ce qui donne lieu aux fameux cercles d'Euler. Ils peuvent représenter des lieux conceptuels ou sociaux, des états ou des actes, et permettent de les penser comme dotés d'une « entrée » et d'une « sortie » (cf. « être en colère », « cesser de s'inquiéter », « commencer à travailler », etc.). Le sens *aspectuel* renvoie à des parcours d'agent sur le chorème de l'action ; le *devenir* renvoie à la version non-agentive, nominale, qui décrit la traversée du chorème d'une propriété par un sujet. En voici deux exemples simples.

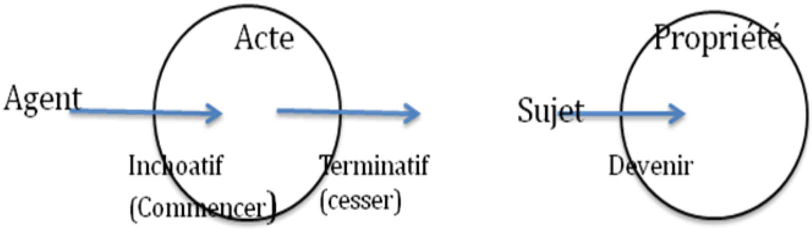
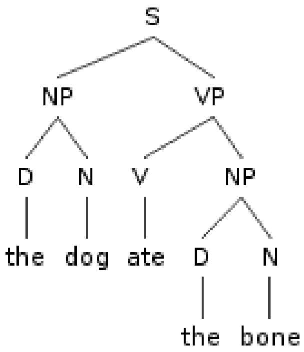


Fig. 6. *Aspectualités verbale et nominale*

Comme il arrive souvent, la morphologie schématique est plus développée dans le domaine verbal (de l'acte ou de l'événement) que dans le domaine nominal (de l'état et de la prédication).

2.4. Les **LIENS** expriment des rapports de dépendance, des hiérarchies. Une chose est subordonnée à une autre par un lien, typiquement représenté comme une corde de suspension verticale ou de spécification horizontale. En général, cette subordination constitue une dépendance de plusieurs entités par rapport aux entités qui les contrôlent, et qui les tiennent comme en laisse par des « nœuds » (nodes). Les arbres phrastiques, les hiérarchies catégoriales et les structures sociales de tous ordres sont souvent représentés ainsi.

œuvre pour rendre compte de la simple différence entre /*in*/ et /*out*/, ou /*dedans*/ vs /*dehors*/.



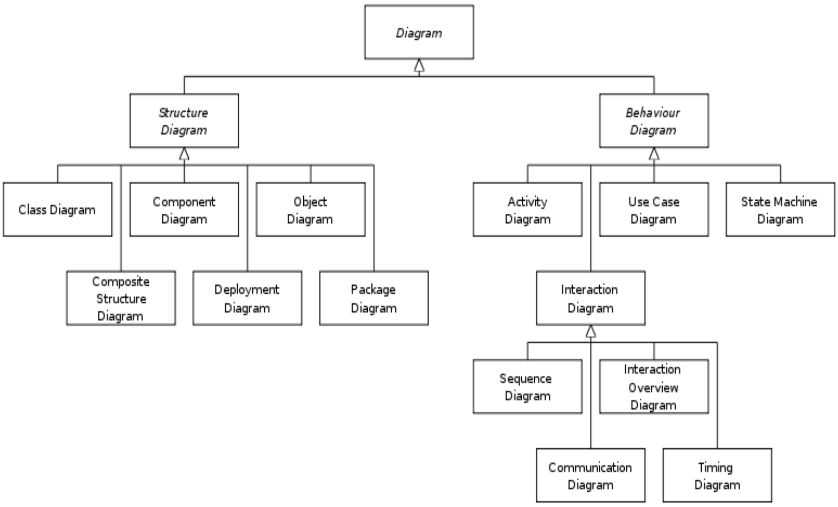


Fig. 7. Deux *arbres de dépendances, l'une structurelle, l'autre classificatoire*

La représentativité politique dans les systèmes démocratiques est un exemple éminent : les éléments subordonnés s'y trouvent « représentés » par des éléments supérieurs qui parlent à leur place en s'adressant à un élément encore supérieur au représentant, et ainsi de suite. « Parler au nom de quelqu'un » est une notion relevant de ce schéma. L'instance supérieure se substitue à l'inférieure. Dans la philosophie sémiotique de Peirce, où *aliquid stat pro aliquo (something stands for something else)*, on aurait une hiérarchie représentative infinie dans les deux sens de la verticalité substitutive, sans base ni fin, sans plancher ni plafond : le monde.

2.5. Les **LIGNES DE PARTAGE**. Ce sont, de manière élémentaire, les lignes que nous traçons pour marquer une limite, une frontière, une différence. « D'un côté X, de l'autre, Y », comme nous disons en faisant le geste manuel d'un marquage de ligne verticale dans l'espace devant nous. La ligne de partage n'est pas franchie, car ce n'est pas une barrière, elle marque purement et simplement une distinction de strate sémantique – entre deux points de vue politiques, entre deux sens d'un terme, entre deux principes juridiques, etc. C'est une coupure, faite par un instrument imaginaire, un couteau mental, pour ainsi dire. La propriété se diagrammatise ainsi : voici ce qui est à moi et ce qui est à toi. Si l'espace soumis à cette division est déjà fermé, nous avons en effet le cas bien connu du « camembert » de partition d'une totalité.

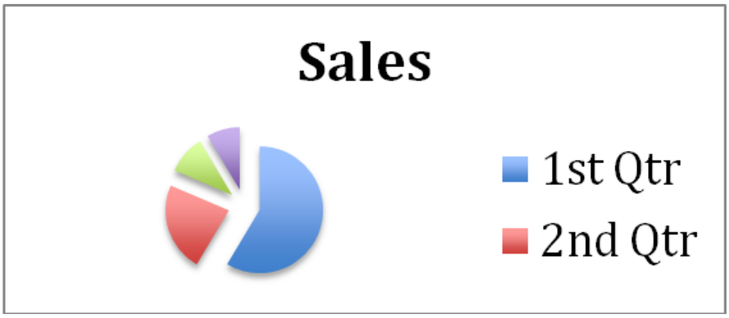


Fig. 8. *Le camembert méréologique*

Rien dans le monde des données visuelles ne ressemble à un tel camembert (sauf évidemment un camembert), et pourtant ce graphe offre une vision fort utile des proportions respectives des portions quantitatives d'un tout prédéfini. Bien entendu, ce tout se referme sans parties vides si l'on enlève telle portion spécifiée ; c'est là la logique du « gâteau » méréologique, comme d'un budget fixe. Un tout est toujours total ! Dans l'exemple ci-dessus, le tout serait toujours 100%, même si les ventes du premier quadrimestre étaient nulles (zéro). Le camembert est plastique. Méréologiquement, ce diagramme nous permet de penser la composition d'un ensemble sans rien envisager d'autre que le poids respectif des parties (en oubliant par exemple la structure locale et partielle qui les organiserait).

2.6. Les **CONTOURS**. Quand nous voulons comparer des quantités et, par exemple, considérer la montée ou la descente des impôts, des prix, ou de n'importe quelle autre valeur variable, dont la « hauteur » varie, par exemple, dans le temps, nous voyons mentalement un contour comme celui d'une chose ou d'une masse scannée dans l'espace. Un tel contour présuppose toujours une *métrique*, c'est-à-dire son inscription dans un cadre topologique mesurable, permettant d'interpréter les valeurs en « hauteur » en fonction des variables en « largeur » et éventuellement en « profondeur ». Cette condition métrique ne s'impose pas aux autres graphes ou diagrammèmes, mais peut facilement être introduite, pour les besoins de comparaisons quantitatives. L'exemple suivant montre les contours à la fois du nombre des lieux de forage et du prix par tonneau de pétrole, et permet donc de contempler leurs covariations pendant une période (de 32 ans). La constellation des trois axes métriques – nombre de tours, montant du prix, et temps – permet d'étudier les régularités éventuelles de leurs covariations, qui peuvent aller de la fonction mathématique simple jusqu'au chaos, manifestant le plus souvent un compromis entre ces extrêmes.

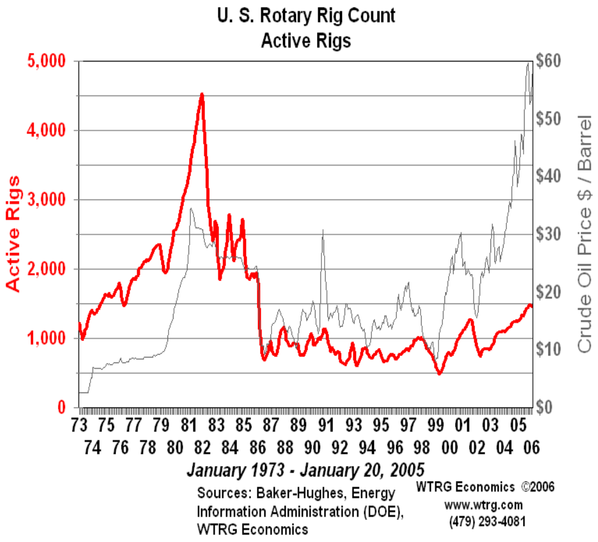


Fig. 9. *Tours de forage et prix du pétrole*

Les contours sont toujours les signifiants quantitatifs de nos idées comparatives : la longueur des jupes et l'envergure de la créativité humaine varient, comme on sait, selon la conjoncture économique du monde… Le cadre métrique du diagramme dit cartésien, composé de deux axes métriques, est bien entendu une invention moderne, destinée à développer une géométrie analytique ; mais l'intuition fonctionnelle sous-jacente, celle d'une covariation possible, est certainement archaïque (« La limousine du général devient plus longue chaque année… » ; « Lorsqu'on va vers le nord, les palmiers disparaissent… », etc.). On peut proposer de dire que *le contour lui-même*, variation quantitative sur une *multitude de faits*, devient *un seul fait* graphique – *les* prix devenant *le* prix, etc. – par une opération[8] qui assimile les mouvements du contour à ceux d'un animal minuscule errant, bousculé par son environnement, ou plutôt à son trajet incertain et fluctuant, exposé aux conditions extérieures changeantes.

Les diagrammes de notre vie cognitive de tous les jours sont souvent des combinaisons de ces *six types graphiques*, et il est à la limite possible que cette combinatoire rende compte de l'essentiel des représentations diagrammatiques ; ainsi nos opérations mentales de schématisation,

[8] Fauconnier & Turner (*The Way We Think*, 2002) appellent ce phénomène une « compression » conceptuelle : ainsi, *le* dinosaure devient *un* oiseau, comme si cela se faisait au cours d'une seule génération dans l'évolution animale.

apparemment infiniment complexes disposeraient, pour se dérouler rapidement et de manière fluide, d'une grammaire élémentaire, d'une sémiotique structurée. Quoi qu'il en soit, pour comprendre la problématique diagrammatique de manière plus profonde, il faut aborder une question moins souvent discutée, mais aussi importante : celle de la complexité de l'espace même du diagramme.

3. La spatialité diagrammatique

Considérons un diagramme pratique, soit une représentation neuronale bien-connue comme la suivante, prise dans une présentation des maladies cardiaques :

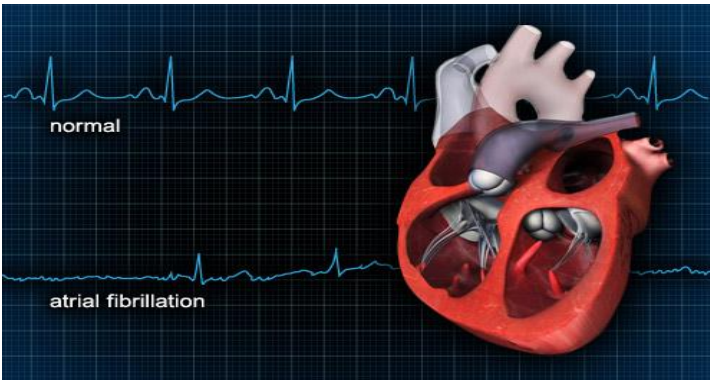


Fig. 10. *Rythmes du cœur*

Il est évident que le cœur sectionné représenté ici n'est pas supposé être traversé par les contours des pulsations, soit normales, soit devenues anormales par fibrillation, comme s'ils étaient des fils de fer, mais que, bien entendu, l'espace de ces contours, sur un fond quadrillé, constitue un plan spatial différent de celui où se trouverait le cœur iconiquement esquissé. L'espace diagrammatique proprement dit est donc ici donné comme sous-jacent à l'espace iconique, puisque nous voyons le cœur *se poser sur* le contour. Ce cœur repose donc pour ainsi dire sur une surface diagrammatique quadrillée, métrique. De plus, la légende – *normal / atrial fibrillation* – quoique relevant de l'écriture langagière, n'appartient pas non plus à la surface diagrammatique, mais s'y superpose comme une explication, une légende, sans pour autant rejoindre le niveau spatial du cœur, puisque les lettres et le cœur n'habitent pas un même espace. Nous voilà ainsi en présence d'une constellation de *trois espaces*, le premier *iconique* (celui du cœur), le second *diagrammatique* (celui des contours), et le dernier *symbolique* (celui de la légende)[9]. On aura une architecture telle que celle-ci :

[9] On peut éventuellement dire qu'ainsi les trois ordres du signe peircéen se retrouvent, l'iconique, le symbolique, et l'indiciel – dans la mesure où l'indice serait représenté

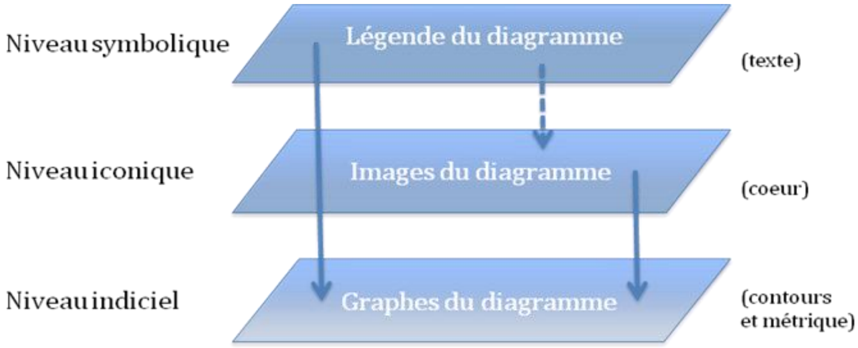


Fig. 11. *Stratification spatiale du diagramme investi*

Ce diagramme du diagramme – que nous proposons pour rendre compte du phénomène tri-spatial –manifeste d'ailleurs une fonction typique des flèches : la projection d'un ensemble à un autre, à travers le vide.

3.1. *Densité spatiale*. Pour voir qu'il s'agit d'espaces distincts, on peut considérer ce qu'il convient d'appeler la *densité spatiale* respective. Dans chaque espace, un fonctionnement sémiotique est donc à l'œuvre et il repose sur une covariation du signifiant et du signifié. Une variation dans le plan du signifiant, conçue comme un passage minimal entre deux points dans ce plan, produit ou ne produit pas une variation dans le plan du signifié, c'est-à-dire un changement de sens. Si la variation du signifiant est productive en ce sens, c'est qu'elle a lieu à un endroit *critique* dans l'espace signifiant ; dans un espace symbolique, par exemple la page d'un texte écrit, les "lignes" de l'écriture, les traits des lettres, les blancs et la ponctuation constituent des zones critiques, tandis que les marges et l'espace vide entre ces "lignes" restent non critiques. Les espaces symboliques sont les moins riches en zones critiques de l'ensemble des espaces signifiants possibles ; leur *densité signifiante* est donc minimale. Cela caractérise et distingue leur fonction sémiotique. En revanche, les espaces iconiques contiennent des zones beaucoup plus étendues de "criticité", à savoir celles qui offrent des représentations figuratives, typiquement au premier plan ; l'arrière-fond, en revanche, est souvent flou, diffus et, à la limite, insignifiant. Les espaces iconiques sont les plus denses de toutes les fonctions sémiotiques, sans que, pourtant, cette densité maximale n'atteigne jamais une hypothétique saturation totale du cadre spatial[10] – ce qui correspondrait à une forme

par le diagramme métrique comme manifestation de l'eidétique même. Les trois ordres se superposeraient typiquement dans la spatialité stratifiée du *diagramme investi*. Il faudrait donc désormais distinguer entre le diagramme pur, eidétique, et le diagramme tri-spatial, sémiotiquement investi, contextualisé.

[10] La peinture monochrome constitue un cas limite de criticité maximale et minimale à la fois, selon le point de vue : maximale pour une lecture symbolique, minimale, voire

d’attention perceptive à focalisation globale… Or, les espaces diagrammatiques se trouvent dans une position médiane dans l’échelle de densité. Leurs composantes graphiques – traits, plaques chromatiques, etc. – forment bien sûr des zones critiques, mais elles se trouvent entourées de grandes zones vides. Les espaces diagrammatiques n’ont pas de “lignes” d’écriture, et les deux dimensions du support visuel (matérialisé ou gestuellement marqué) sont toujours exploitées, dans une certaine mesure : la verticalité indiquant des dépendances, et l’horizontalité des oppositions, par exemple. Pourtant, la profondeur de la perspective iconique est absente, à moins qu’il ne s’agisse d’une composante localement iconique (un cube pour signifier une “boîte noire”, par exemple).

Ce que nous venons de proposer sur la densité spatiale du signifiant peut se résumer en un réseau d’espaces mentaux tel que celui-ci :

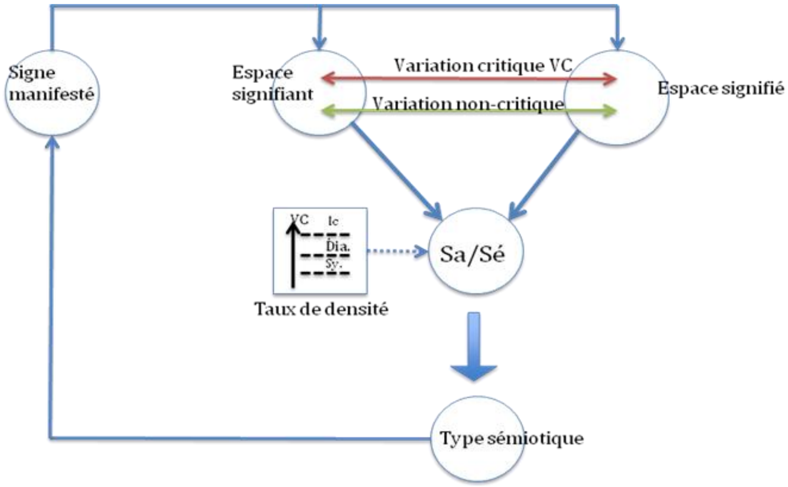


Fig. 12. *Relations critiques et densité de l’espace signifiant*

Ce réseau[11] décrit l’analyse mentale que nous effectuons en séparant les espaces du signifiant et du signifié pour ensuite considérer, dans le cas d’une manifestation sémiotique donnée, la structure critique de cet objet signifiant, sa densité sémiotique, et partant le type sémiotique de cette manifestation.

nulle, pour une lecture iconique. Dans celle-là, le sens global serait une sorte d’injonction à la méditation; dans celle-ci, une invitation à admirer le jeu infini des nuances lumineuses locales dans une surface monochrome mais non monophotonique.

[11] Le format de ce réseau d’espaces mentaux suit celui présenté dans notre livre, *Spaces, Domains, and Meaning* (Peter Lang, Série Sémiotique Européenne, Vol. 4, 2004) et dans L. Brandt & P. Aa. Brandt, « Making Sense of a Blend. A Cognitive-semiotic Approach to Metaphor », in *Annual Review of Cognitive Linguistics*, 3, 2005.

3.2 *Densité et force modale*. L'intérêt de déterminer le type d'une fonction sémiotique concerne par ailleurs sa valeur modale, car la *force* modale est inversement proportionnelle à la *densité*. Comme l'avait vu C. S. Peirce, l'icône est un « signe de possibilité », c'est-à-dire que l'image de quelque chose n'indique que la pure et simple possibilité, et non la nécessité, de la configuration de propriétés montrée ; en revanche, le symbole est toujours une instruction, indiquant quelque forme de devoir-faire, donc de nécessité, tels une équation, un feu de circulation, un signe d'interdiction de fumer, une croix ou un élément vestimentaire signifiant la dévotion religieuse du porteur et l'obligation déontique de respect revendiqué.

Dans un diagramme investi, avec ses trois espaces en superposition, tel que celui de la figure 10, *supra*, nous aurons donc à parcourir trois fois le réseau (fig. 12), et nous aurons, corrélativement, trois couches de sens modal. Voici le cœur, qui *peut* se présenter ainsi dans des circonstances particulières ; voici son battement en deux versions probables ; voilà ce qui est normal (comme il *doit* être) et ce qui ne l'est pas (comme il *doit* ne pas être), et voici le nom de cette anomalie : *fibrillation atriale*.

Les graphes font pour ainsi dire le pont entre les représentations symboliques et les représentations iconiques dans le diagramme ; on peut même penser cette transition comme un pontage cognitif : la pensée ne procède pas en combinant simplement des symboles (ils sont trop abstraits), et elle n'est pas entièrement iconique non plus (les images étant trop concrètes). Elle combine le symbolique et l'imaginaire iconique à travers le schématique, sémiotisé par les diagrammes, mentaux ou manifestés ; c'est donc cet élément, ce pont, qui nous permet à proprement dire de penser.

4. Conclusion

Les diagrammes échappent souvent à l'analyse des philosophes et des sémiologues, dans la mesure où ces formes d'expression (mentale ou matérielle) ne procèdent pas d'un système au sens d'un code conscient, explicite et représenté, mais relèvent d'une activité sémiotique spontanée plutôt pré-consciente et pré-réflexive. Il se peut que, dans la longue durée de l'évolution sémiotico-culturelle de notre espèce, les *flux* et les *flèches*, etc. aient migré du domaine des outils pertinents pour le travail et l'expérience quotidiens au domaine de l'activité mentale plus ou moins abstraite qui crée ce que nous appelons la réflexion. En effet, notre pensée s'applique aux choses passées et futures pour préparer nos actes qui doivent répondre aux défis physiques, sociaux, interpersonnels, ou même intra-psychiques et elle ne peut guère changer de « vocabulaire » mental pour chaque passage entre ces domaines, souvent d'importance égale dans les problèmes complexes de notre vie. De la même manière que le langage, qui conserve ses connecteurs morphologiques et les utilise à travers les domaines, la sémiotique de notre pensée conserverait et utiliserait les mêmes représentants graphico-mentaux, sans égard pour les domaines où un problème se pose à l'esprit.

Per Aage BRANDT

Le phénomène universellement salué comme l'instigateur de l'historicité, au cours de notre évolution culturelle, *l'écriture*, peut être le résultat d'un glissement incertain à partir de certaines représentations denses, aboutissant aux chiffres, aux lettres, aux notes musicales et aux symboles computationnels, à travers un stade diagrammatique qui reste avec nous. La grammatologie classique, linguistique ou philosophico-critique, s'est posé la question de savoir comment l'écrit s'impose à l'oral (au lieu de s'y soumettre) ; c'est évidemment que cette représentation graphique très spécialisée fait partie d'un magma représentatif où *la main, l'œil et l'esprit* communiquent « grammatiquement » et s'envoient en réseau toutes sortes de formes susceptibles d'avoir un sens, que la voix et sa grammaire langagière s'en mêle ou non. On peut risquer la formule selon laquelle cette *grammatique* entre en concurrence et conflit avec la *grammaire* au cours de l'évolution sémiotique. L'écriture en serait un résultat, quoique toujours conflictuel (d'où la question permanente dans notre modernité : est-ce qu'on doit parler comme on écrit ou inversement ?), et les diagrammes en serait un autre : ce qui se « diagramme » peut toujours se dire de beaucoup de manières, exactement comme l'être qui selon Aristote est *pollakos legomenon*. Peut-être pour la même raison : ce qui se pense de l'être se donne à penser en diagrammes.

La totalité diagrammatique en mathématiques et en art

Maria Giulia DONDERO
Fonds National de la Recherche Scientifique / Université de Liège

0. Introduction

Ce travail vise à explorer des pistes de réflexion afin de tester l'intérêt de la notion de *totalité nécessaire* en sciences mathématiques et en art. L'hypothèse est que dans les deux cas, les relations entre totalité et parties et entre parties entre elles sont gérées par un fonctionnement que nous appelons diagrammatique.

En philosophie des mathématiques, le diagramme est concevable comme une visualisation d'un objet abstrait (dont on fait l'hypothèse) qui devient *perceptible* et *manipulable* par le mathématicien : le mathématicien opère des actions réglées sur les lignes constituant la visualisation diagrammatique en testant et en ajustant les différentes compositions expérimentales des parties en concurrence entre elles. Seulement, à la fin de l'expérimentation, une certaine composition globale des parties se révélera comme la bonne, la définitive, bref, comme la composition nécessaire et donc démonstrative pour exemplifier un nouvel objet théorique et le communiquer.

La problématisation de la notion de diagramme[1], qui est fortement liée à celle de méréologie, vise ainsi à éclaircir le rôle de la *perception* et de

[1] Il faut préciser qu'il ne faut pas entendre le terme diagramme – comme le font d'ailleurs certains sémioticiens – comme un synonyme de schéma ou de graphique, à savoir comme un dispositif identifiable par des flèches, des symboles, des chiffres, des axes cartésiens, etc. Cette perspective engloberait toutes les visualisations caractérisées par une certaine organisation topologique, sans rendre compte des raisons profondes qui rendent nécessaire l'utilisation de ce dispositif. De plus, cette conception s'appuyant sur un point de vue portant sur une certaine organisation du plan de l'expression, exclurait par exemple les images proprement dites, et se placerait ainsi non seulement à l'opposé de la notion peircienne d'iconicité abstraite mais aussi d'une perspective sémiotique tout court – si l'on conçoit le niveau

l'*action* dans le domaine des mathématiques et à se demander si elle peut être utile dans le cas de la compréhension de l'œuvre d'art. Si dans l'art comme dans les mathématiques, chaque trait appartenant à une configuration visuelle participe d'une totalité et doit occuper la bonne place pour que la totalité puisse fonctionner en tant que telle, la première différence évidente paraît être que la totalité est démontable et répétable en mathématiques (régime de l'allographie) tandis qu'en art elle est normalement considérée comme définitive et unique (régime de l'autographie)[2]. Nous reviendrons sur les différents types de totalité en mathématiques et en art (tableau, sculpture, art environnemental) mais nous pouvons déjà affirmer que chaque démarche qui amène à la production d'une totalité en mathématiques autant qu'en art vise l'instauration d'un *nouvel objet* qui puisse transformer les orientations pratiques de son propre domaine d'exercice, – ce qui d'ailleurs est typique du régime considéré, par Goodman (1968), comme intermédiaire entre l'autographique et l'allographique : le régime de la diagrammaticité. Notre hypothèse est qu'on puisse trouver un fonctionnement similaire, voire diagrammatique, entre l'*effet démonstratif* des représentations graphiques en mathématique et l'*effet de complétude* d'une œuvre d'art et notamment d'une œuvre picturale. Nous mettrons donc en comparaison la théorie du diagramme chez Peirce dans le cadre des mathématiques et la notion de

sémiotique comme une médiation entre plan de l'expression et plan du contenu. Concevoir le diagramme comme des formes schématiques ou graphiques identifiées *a priori* à partir d'une certaine organisation topologique ne prendrait pas en compte le fait que par exemple des photographies peuvent, dans certains cas, fonctionner diagrammatiquement : comme l'affirme Peirce, la catégorie des icônes abstraites, les diagrammes justement, comprend aussi bien les formules algébriques que les *photographies composites*, par exemple un certain nombre d'images stratifiées desquelles puissent ressortir des *formes moyennes*. La notion d'icône abstraite, chez Peirce, recouvre donc des phénomènes très divers en ce qui concerne la topologie du plan de l'expression mais qui sont liés par des fonctionnements similaires concernant la mise en relation du plan de l'expression et du plan du contenu. À ce propos, voir Basso Fossali & Dondero (2011).

[2] Cette distinction est due au philosophe analytique Goodman (1968) qui utilise ces termes pour désigner principalement deux régimes des arts, celui qui est exemplifié au mieux par la peinture (autographique) et celui qui est exemplifié par la musique (allographique). Dans ce dernier cas, dans une partition, le style et grosseur de l'écriture ou de la typographie, couleur de l'encre, nature du papier, bref ce qui caractérise la sensori-motricité d'un producteur et le support de son inscription, ne se révèlent pas comme pertinents à la signification de la partition ni préjugent la qualité de son exécution. Seule importe ce qu'on peut appeler son identité orthographique, c'est-à-dire une correspondance exacte quant aux séquences de lettres, aux espacements et aux signes de ponctuation. Dans le premier cas, celui de la peinture, comme il n'existe pas un alphabet de caractères, aucune des propriétés que l'image possède en tant que telle n'est distinguée comme constitutive : aucun trait de ce type ne peut être écarté comme contingent et aucune déviation comme non significative. Tout trait est donc constitutif et fait sens pour son ancrage au fait historique de son instanciation. Sur autographie et allographie voir aussi Dondero (2010c).

totalité chez le mathématicien René Thom utilisée dans ses réflexions sur l'esthétique et la peinture.

Dans Dondero (2010b) nous avons argumenté le fait que l'image en sciences mathématiques peut fonctionner comme terrain d'opérations expérimentales ayant comme but une démonstration, cette dernière étant à concevoir comme l'effet de cumulation et de totalisation des différentes expériences sur la visualisation elle-même : l'image serait donc à entendre comme un dispositif crucial de la formulation d'une nouvelle hypothèse sur un objet de recherche. Nous avons également cherché à montrer que l'image, même dans des cadres autres que la mathématique, tout en ne possédant pas une organisation linéaire, des éléments minimaux, ni une grammaire de traits disjoints, ni des règles syntaxiques rendant possibles la combinatoire contrôlée[3] – comme c'est le cas par contre du langage formel –, n'est pas pour autant privée de pouvoir démonstratif[4] ; au contraire elle peut même servir de modèle pour comprendre le fonctionnement diagrammatique tout court[5] : d'ailleurs c'est ce qui est suggéré dans la théorie peircienne du diagramme – et abondamment discuté par Chauviré (2008) et par Brunet (2000).

L'image en fait a comme caractéristique principale d'avoir des bords constituant et stabilisant des formes : nous allons justement investiguer la notion de forme et de contour tout au long de notre parcours. D'ores et déjà nous rendons explicite un des objectifs capitaux de notre travail : montrer que la visée démonstrative ne dépend pas uniquement des éléments minimaux à valeur fixée (ce qu'on pourrait appeler symboles ou signes généraux, en suivant Peirce) ni de leur disposition linéaire comme dans le cas de l'écriture ; bien au contraire elle dépend de leur composition, de la *tenue* de leur organisation, de la fonction de leur contour qui permettent de figer une

[3] Dans d'autres travaux (Dondero 2010a et 2010c) j'ai utilisé les suggestions de Goodman pour mettre en rapport le diagramme d'un côté (où la saturation de traits pertinents pour sa signification est atténuée) et les représentations saturées de traits pertinents telles la peinture et en maints cas aussi la photographie, de l'autre.

[4] La question est « classique » car elle revient sur une interrogation ancienne : est-ce qu'on peut percevoir et surtout représenter visuellement quelque chose qui peut valoir comme une vérité générale ? Est-ce que les traits visuels peuvent assurer un accès à la généralité, et des configurations visuelles devenir ainsi des instruments modélisant une classe d'objets ?

[5] Le diagramme est aussi appelée icône abstraite par Peirce. La notion d'icône abstraite pourrait apparaître comme une contradiction dans les termes en raison du couplage entre quelque chose qui se veut enraciné dans la perception et qui est en même temps général. Le diagramme vise en fait à poursuivre la question posée par le schématisme et la notion de synthétique a priori kantiens. Si, chez Kant, le schématisme visait à résoudre la dualité entre *intuition* (représentations singulières) et *concept* (représentations générales), chez Peirce l'utilisation du diagramme, à partir donc d'un point de vue sémiotique – sémiotique au sens où l'on pense par des signes –, vise à résoudre la dualité *singularité-généralité* et la dualité *observabilité-imagination* en les pensant non pas comme opposées mais comme une bipolarité tensive qui fait la caractéristique principale du diagramme.

articulation interne signifiante des parties. Toutes ces caractéristiques sont typiques de ce qu'on nomme communément image mais chez Peirce peuvent nous faire comprendre le fonctionnement d'une formule algébrique. Voyons comment.

1. Le diagramme en tant que totalité expérimentale

Chez Peirce le diagramme est une sous-catégorie de la catégorie de l'hypoicone[6], et est conçu comme l'instrument majeur de toute pensée *nécessaire* et *créatrice*. Pour expliquer le fonctionnement expérimental du diagramme, il faut prendre en considération une distinction que Peirce fait entre le *raisonnement corollariel* et la *procédure déductive théorématique*. Le premier ne concerne que des inférences purement analytiques, donc appartenant à la pure logique tandis que la deuxième appartiendrait au domaine interdisciplinaire de l'épistémique. Chauviré explique la différence entre corollariel et théorématique de la manière suivante :

> deux cas peuvent se présenter : soit la conclusion est *directement lue* dans le diagramme initial par simple inspection, c'est-à-dire que les relations qui rendent possibles la conclusion sont immédiatement perçues sans qu'on doive retoucher le diagramme [c'est le cas du corollariel] ; soit il est nécessaire de le *modifier* par des *constructions supplémentaires* [c'est le cas du théorématique] […]. L'adjonction de telles constructions est dépeinte comme une *expérimentation effectuée sur le diagramme, analogue à celle pratiquée en physique et en chimie sur un échantillon*. Dans ce dernier cas c'est la perception de relations (entre les parties du diagramme) *autres* que celles qui apparaissent dans le diagramme initial qui permet la lecture de la conclusion[7].

Ce qui différencie le corollariel du théorematique est que ce dernier permet la *manipulation*, voire l'*expérimentation* tandis que le corollariel manque de cette étape et reste une démarche purement logique. Ce type d'expérimentation mathématique passe par la spatialisation des grandeurs spatiales et non spatiales (par exemple, les relations logiques, etc.) et par l'adjonction de « lignes subsidiaires » – appelées ici « constructions supplémentaires » – aux lignes du dessin qui suivent fidèlement les prémisses[8].

---

[6] On rappelle que la catégorie des hypoicônes comprend les images, les diagrammes et la métaphore : « On peut en gros diviser les hypoîcones suivant le mode de la priméité à laquelle elle participent. Celles qui font partie des simples qualités ou premières priméités sont des *images* ; celles qui représentent les relations, principalement dyadiques ou considérées comme telles, des parties d'une chose par des relations analogues dans leurs propres parties, sont des *diagrammes* ; celles qui représentent le caractère représentatif d'un *representamen* en représentant un parallélisme dans quelque chose d'autre sont des métaphores » (Peirce, 1931-35, 2.276-7).

[7] Chauviré (2008, p. 36, nous soulignons).

[8] Le traçage de lignes subsidiaires devrait provoquer une véritable expérimentation sur la visualisation mathématique elle-même, « *analogue à celle pratiquée en physique et*

Peirce ajoute en fait que « maints diagrammes qu'une multitude de lignes rend compliqués et inintelligibles deviennent *instantanément clairs et simples si on leur ajoute des lignes* ; ces lignes supplémentaires étant de nature à montrer que les premières qui étaient présentes n'étaient que les parties d'un *système unitaire* »[9]. Peirce explique ainsi que l'adjonction de lignes subsidiaires est conduite en suivant des règles et permet de voir *des formes* ressortir de ces manipulations expérimentales. La constitution de formes fournit des contours, voire des configurations enveloppantes et totalisantes, aux réseaux de lignes : chaque forme constitue évidemment une *totalité* grâce à son contour. Peirce affirme également que dans les dessins autant que dans les formules algébriques, des formes émergent, à la suite de l'adjonction de lignes subsidiaires, *instantanément* : cette *instantanéité perceptive* est ce qui caractérise chez le philosophe américain l'évidence de la démonstration, à savoir le moment conclusif de l'expérimentation. Ce ne sont pas les opérations logiques (autrement dit, les signes généraux) qui ont le pouvoir de fonctionner comme des démonstrations voire comme des *parcours nécessaires* vers un nouveau savoir : ici, pour qu'il y ait démonstration, il faut que, à partir de ces signes généraux, des formes émergent tout au long de l'acte expérimental en s'imposant à la perception comme des totalités.

Chez Peirce, seules les icônes ont le pouvoir d'exhiber une nécessité, un devoir être[10] parce qu'elles seules peuvent montrer l'*émergence* de formes et de totalités à partir des manipulations de lignes qui pourraient apparaître au premier abord comme désordonnées, incomplètes et insignifiantes. Les icônes sont les seuls signes capables d'exhiber une nécessité car elles rendent *sensibles* les relations entre des lignes par des formes, à savoir par des relations de traits qui se composent en unités et apparaissent comme des *totalités accomplies* – ce qui n'est pas possible dans le cadre des symboles abstraits.

Pour mieux caractériser la notion de totalité nécessaire, la définition d'iconicité dans le cadre d'un travail sur la méréologie, donnée par Jean-François Bordron, peut nous être utile :

> La caractéristique de l'iconicité tient moins dans la présence de morphologies, de parties et de totalités, de texture et de plasticité que dans le fait que tous ces

---

en chimie sur un échantillon ». Cela reviendrait à dire qu'on attend des *réponses* de la part de la visualisation mathématique comme on les attend d'un échantillon soumis à des opérations desquelles quelque chose d'inconnu auparavant est censé ressortir. Si la visualisation doit « répondre » à des opérations du mathématicien, cela signifie que la visualisation mathématique est comparée à une image ressortant d'une expérience en laboratoire, qui est censée répondre aux « provocations-stimulations » auxquelles elle est soumise. Sur le dessin mathématique entendu comme terrain d'expérience majeur voir aussi Châtelet (1993).

[9] Peirce (1931-35, 2.55, nous soulignons).

[10] Voir à ce propos Peirce (*idem*, 4.532).

> éléments *prennent ensemble* comme on le dit par exemple d'éléments matériels réunis dans *un moule* et qui de ce fait *stabilisent peu à peu leurs rapports*[11].

Ces totalités résultent d'opérations de liaison et de déliaison conduisant des éléments divers à « prendre ensemble » rendant ainsi *perceptivement évidente* la nécessité d'une certaine méréologie, voire des conclusions en mathématique. C'est pourquoi Peirce a toujours rapproché la contrainte exercée sur nous par une perception ordinaire et par les conclusions mathématiques[12] : les deux *s'imposent* à nous comme nécessaires. La perception et les conclusions mathématiques sont, selon le sémioticien américain, toutes deux caractérisées par l'émergence de configurations qui *ne peuvent être que comme elles sont : « leur vérité consiste dans le fait qu'il est impossible de les corriger »*[13]. Pour Peirce la vérité perceptive est en fait aussi *irrésistible* que la vérité mathématique :

> Cette *contrainte irrésistible* du jugement de perception est précisément ce qui constitue la *force contraignante* de la démonstration mathématique. On peut s'étonner que je range la démonstration mathématique parmi les choses qui relèvent d'une contrainte non rationnelle. Mais la vérité est que le nœud de *toute preuve mathématique consiste précisément dans un jugement à tout égard semblable au jugement de perception*, à ceci près qu'au lieu de se référer au percept que nous impose la perception, il se réfère à une création de notre imagination[14].

Les formules algébriques, par exemple, bien qu'elles soient constituées de symboles, c'est-à-dire de signes généraux qui ne se rapportent à leur objet qu'en vertu de conventions arbitraires, fonctionnent selon Peirce comme des icônes car *c'est la constitution de formes qui leur offre une structure unitaire et perceptivement saisissable de la totalité des relations entre ces signes généraux eux-mêmes*[15]. Même si le diagramme est constitué de symboles, le fait qu'ils « prennent ensemble » le constitue en un dispositif hybride entre l'énonciation logique des concepts et l'exhibition de leur composition en tant que forme unitaire qui s'impose d'emblée à la perception et sans correction possible.

D'une certaine manière nous pourrions affirmer que la démonstration est une *muséification* voire une *domestication* du processus d'expérimentation : une constitution de totalité là où tout au long de l'expérimentation il n'y avait que des traits disjoints, situés à l'intérieur de centres d'attention qui

---

[11] Bordron (2010, pp. 27-39).

[12] Peirce nous dit plus précisément que la différence entre ces deux contraintes réside en cela que la perception dépend des percepts et l'image mathématique de notre imagination.

[13] Chauviré (*idem*, p. 185).

[14] Peirce (*idem*, 7.659).

[15] Cette constitution de formes qui font apparaitre une « résolution » et une conclusion nécessaire ont été développées par la théorie de l'iconicité en tant que méréologie chez Bordron (2010 et 2011).

n'arrivaient pas à fusionner. D'ailleurs la caractéristique du diagramme est de mettre en scène, en les rendant susceptibles de manipulations, voire d'expérimentation, des relations *logiquement possibles en les constituant en unités :* ce qui est central dans les raisonnements de ce type est la manipulation des relations entre parties qui attendent à devenir des totalités[16]. Il s'agit d'ailleurs de totalités qui s'imposent avec la force de percussion des percepts.

1.1 L'énonciation en mathématiques

La question de l'évidence perceptive en mathématiques a été traitée aussi par Bordron (*infra*), qui se demande comment cette évidence peut être produite, et qui affirme plus précisément que :

> Les mathématiques semblent bien être comme un monde en soi dont la force de conviction vient de ce que nous n'avons pas à l'évaluer mais plutôt à le percevoir. Le caractère d'évidence que l'on peut ressentir nous paraît être comparable avec ce que Lévi-Strauss a appelé l'efficacité symbolique […]. Nous sommes donc dans un cas de croyance extrême pour laquelle ce qui est raconté est aussi ce qui est. L'univers des signes se confond avec l'être. Le pouvoir du chaman est en un sens semblable à celui du mathématicien. *Tous les deux créent de l'existant mais celui-ci ne pourrait pas apparaître comme leur création sans perdre son pouvoir de conviction*. Le signifiant doit effacer l'énonciateur pour que sa formalité s'autonomise (*infra*, nous soulignons).

Nous retenons donc cela de ces réflexions : que les mathématiques ont toujours fait oublier leur énonciateur, en exhibant le fait qu' « elles se font toutes seules » :

> l'énonciation paraît non seulement s'effacer, ce qui serait banal, mais surtout perdre toute pertinence explicative. […] L'image [mathématique] apparaît simultanément comme un lieu d'expérience et en même temps comme récusant le sujet de l'expérience. *L'imagination est créatrice et pourtant sa création semble plutôt être une découverte*, ce qui est le sentiment le plus commun des mathématiciens (Bordron, *infra*, nous soulignons)[17].

[16] Sur la relation entre fragments expérimentaux et totalité démonstrative je me permets de renvoyer à Dondero (2011).

[17] Est-ce que cette absence d'énonciateur serait jamais imaginable dans le cas d'une œuvre d'art ? Sûrement pas pendant la Renaissance, mais si aujourd'hui où les artistes contemporains valorisent de plus en plus la forme « laboratoire » de leur travail où, comme l'affirme Beyaert (2012) pour des artistes comme Wim Delvoye, l'œuvre se dématérialise en différents dispositifs plus ou moins communicationnels (conférences, articles scientifiques, etc.) ou techniques (recherches sur les matériaux utilisés, leur résistance, leur comportement, etc.), les expériences sur les animaux, etc. : de cette manière la figure du démiurge de la Renaissance et de la période romantique s'efface totalement en une collectivité humaine et non-humaine. L'œuvre n'existe comme objet que pour satisfaire le marché de l'art, qui a besoin de traiter des objets transportables et appropriables. À ce propos, voir aussi la conception de l'œuvre d'art

Ceci dit entre parenthèses, ces considérations rentrent en syntonie avec un questionnement de Bruno Latour (2009) concernant la difficulté de la sémiotique à étudier les équations à travers le modèle narratif de Greimas. En rappelant les avancements apportés par le travail de Françoise Bastide à la sémiotique et à la rhétorique du discours scientifique, il affirme qu'on reste pourtant « dans l'ignorance la plus totale sur les êtres mathématiques eux-mêmes, et en particulier sur cette forme essentielle qu'est l'équation ». Il poursuit en affirmant qu'en sémiotique :

> ce qui se fait marche très bien avec des êtres qui sont un peu riches du point de vue fictionnel, par exemple des microbes qui se transforment visiblement très rapidement du début à la fin d'un texte. Mais lorsqu'on arrive aux équations, à ce genre littéraire très particulier qu'est le texte de modélisation et de simulation, la sémiotique rencontre un problème opératoire entre une version pragmatique et une version formaliste de son propre métalangage et qu'elle n'a pas résolu (Latour, 2009, p. 256).

Nous croyons comprendre que Latour veut dire ici que la difficulté que nous les sémioticiens avons à creuser la signification des équations tient au fait qu'elles appartiennent au « moment de concentration le plus extrême » à l'intérieur du déploiement du discours scientifique. D'un point de vue sémiotique la difficulté tient au fait que les équations ne laissent pas transparaître le point de vue qui les guide et leur permet de se déployer en une narration : elles apparaissent comme quelque chose de très compact et de non développable bien que leur objectif soit de déclencher des opérations de transformation narrative au sens greimassien du terme. Bref, elles apparaissent privées de positions actantielles facilement repérables et analysables en termes dynamiques.

Par rapport à ce problème, Bordron répond en fait ainsi :

> Le point le plus important nous semble être le rapport entre la construction et l'énonciation. On pourrait penser que l'énonciation se présente sur un mode débrayé. Mais peut-on dire qu'un énoncé mathématique soit débrayé au même sens qu'un énoncé linguistique ? La ligne tracée au sommet d'un triangle […] et le théorème qui apparaît à sa suite, appartiennent-ils au domaine du « il », entendu comme dans « il pleut » ou « il neige » ? Il nous semble que leur effet provient plutôt de ce qu'il ne suppose en aucune façon ni sujet ni objet. Même les verbes a-valents, comme « pleuvoir » ou « neiger », gardent la trace d'un univers mythique dans lequel les dieux agissent sur les éléments. Mais, dans notre exemple, quelque chose se manifeste qui n'est ni sujet, ni objet et n'appartient pas à ce qui est dicible sur la base de cette différence. Comment qualifier ce fait sans faire appel à des intuitions nécessairement vagues ? Il nous semble que la seule réponse possible est de rappeler que les mathématiques, comme la logique, appartiennent au *domaine du « formel » qui est un registre sémiotique qui*

---

en Chine selon Jullien (2009) où l'artiste doit s'effacer comme énonciateur pour pouvoir accueillir et rendre manifeste la beauté de la nature.

> *ne se laisse pas penser selon les catégories de la grammaire actantielle* (Bordron, *infra,* nous soulignons).

Le problème me semble-t-il est pourtant de pouvoir identifier un niveau énonciatif des équations, repérer au moins des proto-actants à l'intérieur d'une transformation, voire des actions conduites par quelques forces orientées. Un possible moyen pour la sémiotique pourrait être de « traduire » les équations en des substances du plan de l'expression autres, comme celle topologique, où un niveau énonciatif et une grammaire actantielle sont plus facilement repérables. Ce que nous pouvons étudier sémiotiquement concernant l'équation est peut-être seulement ce qu'elle transforme. Bref, ce qu'on pourrait étudier c'est sa traductibilité : est-ce qu'on peut concevoir les équations comme des centres déictiques, à partir desquels par exemple des visualisations peuvent être instanciées ? Quelle relation existe-t-il entre l'équation d'un côté et la spatialisation des valeurs mathématiques, de l'autre, par exemple en topologie algébrique ?[18]

---

[18] La question de la visualisation et de l'abstraction formaliste a été étudiée par Peter Galison, en développant une histoire de la physique, voire l'histoire d'une confrontation constante entre les formalismes et la nécessité de l'élément visuel comme source d'intuition et création où la reconnaissance des patterns, par exemple, joue un rôle fondamental. Non seulement dans Galison (1997), mais aussi dans Galison (2002), il est décrit la confrontation historique entre l'abstraction formaliste, l'axiomatique et les théorèmes d'une part et la constatation que la construction d'objets perceptibles, manipulables, où la vision et la sensori-motricité acquièrent un rôle, peut participer à la découverte scientifique, ainsi qu'au développement de la pensée mathématique. C'est une histoire qui concerne d'autres disciplines aussi, mais c'est surtout à l'intérieur de la physique que Galison explore les controverses, et les batailles les plus marquantes entre iconoclastes et iconophiles. Galison prend en considération des cas célèbres comme celui d'Eric Heller qui a utilisé la correspondance entre patterns visuels pour démontrer certaines correspondances entre la mécanique quantique et la mécanique classique : la similarité entre les deux mécaniques pouvait être prouvée par le biais d'une reconnaissance d'isotopies visuelles : il s'agissait d'une *démonstration visuelle.* Une image telle que *Double diamond* produite in 1983 a déclenché une controverse d'une durée de dix ans sur la question suivante : est-ce qu'une image générée par simulation est suffisante pour produire une démonstration ? Comme l'affirme Galison (2002, p. 321), ce serait une erreur de penser que l'image ne donne que le qualitatif, elle permet aussi de quantifier. Le diagramme, image manipulable, équivaut à une fusion entre nombre et densité figurative. En étudiant le cas de la chambre à bulles il affirme que « Les images des chambres à bulles se fragmentent en des mesurages numériques, les mesurages se réarrangent en des inscriptions (*tracks*) décrites mathématiquement ; ces inscriptions se transforment en des propriétés des particules qui sont codés numériquement (*numerically*) ; les propriétés des particules réforment des nouveaux types de manifestation visuelle (*image displays*) » (2002, p. 322, nous traduisons). Les diagrammes de Feynman constituent des exemples majeurs de ce fonctionnement (Galison 2002, p. 308) : dans ses diagrammes – qu'on pourrait appeler *concepts graphiques* – chaque ligne correspond à une règle de calcul : dessiner tous les parcours possibles à travers lesquels les particules pourraient interagir signifie déjà

Par rapport à ce que nous pourrions appeler une sorte de « transparence énonciative », Bordron argumente que dans les mathématiques la capacité générative tiendrait au seul registre du plan de l'expression qui n'aurait pas de contenu et qui se confondrait par là avec le *fait d'être*. Là il n'y aurait pas d'énonciation du tout car le manque d'articulation d'une expression avec un contenu supposerait toute abolition de l'instance énonciative. Portant il nous semble que les mathématiques sont justement gérées par une stratégie énonciative typique d'un domaine disciplinaire qui vise classiquement à cacher toute trace d'énonciation pour pouvoir s'ériger à fondement d'autres disciplines. Mais Bordron précise d'ailleurs que les mathématiques sont caractérisées par le fait qu'elles recouvrent deux pôles de fonctionnement, également puissants : celui de l'évidence perceptive et celui de la convention et de l'institutionnalisation des règles :

> Nous avons essayé de mettre en valeur le cas extrême où le signifiant se confond avec l'être. C'est le moment propre de l'évidence. A l'autre extrémité, non avons le signe arbitraire, le signe de convention et d'institution, qui tire sa force des règles et des usages. Entre ces deux extrêmes, il existe toute une gamme de signes plus ou moins motivés comme les empreintes, certains symboles, etc. Le signe mathématique paraît pouvoir occuper les deux pôles extrêmes du sémiotique, l'évidence géométrique et l'algèbre (Bordron, *infra*)[19].

1.2 Perception et action dans le diagramme

> Ce concept de geste nous semble crucial pour approcher le mouvement *amplifiant* des mathématiques. […] On doit parler de gestes inaugurant des dynasties de problèmes (Chatelet 1993, p. 32)

---

poser un problème mathématique. Dans ces diagrammes qui ont permis de simplifier les calculs de l'électrodynamique quantique, les propagateurs par exemple ne sont pas des simples dessins, ce sont bien plus des *instructions pour calculer* la probabilité qu'une particule située au point *a* se manifeste ensuite (éventuellement par un ordre de successions) au point *b*. Feynman eut l'idée radicale qu'une particule ne se limite pas à se déplacer en empruntant un seul chemin, mais *en sondant en quelque sorte tous les chemins possibles, aussi bien ceux casuels et ondulés que ceux rectilignes*. Il ne s'agit donc pas de la visualisation de quelque chose, mais de la visualisation de possibles, de la façon dont « quelque chose pourrait se passer ».

[19] Bordron (*infra*) poursuit ainsi : « Il existe cependant des signes mathématiques possédant une certaine motivation comme le signe (l'intégrale, les quantificateurs, etc.). Nous voulons par cette remarque faire percevoir en quel sens l'ordre sémiotique se manifeste toujours dans un rapport avec l'être, soit qu'il se confonde avec lui comme le fait le pur signifiant porteur d'évidence, soit qu'il s'en distingue radicalement comme le signe arbitraire, soit – et c'est le cas le plus fréquent – , qu'il entretienne avec lui un rapport mixte, fait de connivences et de ruptures. La particularité du signe mathématique serait alors d'occuper d'une façon privilégiée les valeurs extrêmes ».

En revenant à Peirce, ce qui nous intéresse dans sa théorie est que les formules algébriques – qui pourraient apparaître comme les êtres mathématiques les plus abstraits et conventionnels, car entièrement constitués de symboles –, sont également iconiques parce que c'est la structure unitaire qui rend perceptivement saisissable la totalité des relations et des traductions entre les signes généraux permettant la découverte de conclusions imprévues et informatives[20]. On s'aperçoit que la démonstration peut être décrite comme un « faire image », voire comme le résultat d'une évidence perceptive irrésistible des relations entre les parties d'un objet hypothétique soumis auparavant à l'expérimentation.

Mais pourquoi serait-ce à l'icône et non pas aux symboles, c'est-à-dire aux signes généraux, de rendre immédiatement reconnaissable et irrésistible la nécessité, et de produire des nouvelles vérités ? Comment Peirce explique-t-il la différence entre symbole et icône abstraite, à part le fait qu'à travers l'icône abstraite, voire le diagramme, on constitue des formes que les symboles ne peuvent pas constituer ?[21]

> Quand nous contemplons la prémisse, nous percevons mentalement que, si celle-ci est vraie, la conclusion est vraie. Je dis : nous percevons, parce qu'une connaissance claire suit la contemplation sans aucun processus intermédiaire. Puisque la conclusion devient certaine, il y a une étape à laquelle elle devient directement certaine. Or cela, aucun symbole ne peut le montrer, car un symbole est un *signe indirect dépendant de l'association des idées*. Un signe *exhibant directement* le mode de relation est donc requis[22].

C'est le « directement » qui explique selon Peirce le « must-be » de l'icône. Mais cet adverbe « directement » ne concerne pas une icône considérée comme une totalité sans médiation ; il s'agit au contraire d'une totalité produite par un travail de manipulation qui a mis en évidence, tout au long de l'expérimentation, des possibilités diverses d'agencement et d'organisation des symboles. On pourrait dire que *la démonstration est le résultat d'une manipulation des symboles sur laquelle le jugement de*

[20] « Quant à l'algèbre, l'idée même de cet art est qu'elle présente des formules que l'on peut manipuler et que *par observation des effets de cette manipulation* on découvre des propriétés qu'on n'aurait pas discerné autrement », Peirce cité dans Chauviré (*idem*, p. 46).

[21] Bordron, théoricien de l'iconicité, déclare à ce propos que : « Nous avons vu que la construction auxiliaire ne peut en elle-même se trouver expliquée par la forme logique de la démonstration mais exige au contraire un *ajout*, en lui-même injustifiable autrement que comme un *effet de l'imagination*. Même si le théorème final peut, et en un certain sens doit, être mis en forme logique, il n'en demeure pas moins qu'il ne procède pas ainsi au moment précis où son évidence apparaît. Il vaut mieux ici ne pas parler d'intuition car cette faculté est encore plus mystérieuse que le problème qu'elle serait censé résoudre. Disons plutôt que le théorème se manifeste d'abord sous une forme iconique et non à la suite d'un développement symbolique » (Bordron, *infra,* nous soulignons).

[22] Peirce cité dans Chauviré (*idem*, p. 187).

perception, totalisant, met le mot fin. On a démonstration lorsque la forme enveloppe et fige les manipulations qui étaient jusqu'à là encore multiples et virtuelles[23].

Ce qui caractérise le fonctionnement de l'iconicité chez Peirce serait donc ce pouvoir d'exhibition qui *dépasse* l'organisation syntaxique des symboles généraux : il s'agit d'« un excès par rapport aux possibilités immédiates du langage » (Bordron, *infra*) :

> Il y a de même dans l'évidence d'un théorème un certain *excès* par rapport aux articulations nécessaires de la démonstration. Il nous semble que c'est sur ce point que l'évidence de la perception et l'évidence géométrique participent d'une expérience commune. […] Nous avons déjà rencontré l'idée d'excès lorsque nous avons discuté des constructions auxiliaires qui nécessitent un acte particulier de l'imagination, acte irréductible à la simple déduction et excessif en ce sens. Il s'agit bien sûr de l'imagination productrice et non de la simple imagination reproductrice. L'imagination ainsi comprise est en quelque sorte la faculté ontologisante de notre esprit, la seule qui soit susceptible de faire surgir un existant, comme le fait le mathématicien traçant une droite *pour voir si quelque évidence en résultera* (*infra,* nous soulignons).

Il est important de nous arrêter sur cette idée de *traçage* et d'attente « que quelque chose en résulte » : le diagramme appartient à un paradigme de la connaissance que Noëlle Batt décrit comme « une nouvelle pensée de la science qu'inaugure une conception de la compréhension *qui associerait au concept les conditions de son engendrement* » (Batt, 2004, p. 24) : le mode d'existence du diagramme est tel que sa genèse fait partie de son être.

Dans le diagramme, entendu en un sens très large, comme le veut Peirce, il serait ainsi possible d'identifier des instances énonciatives qui en déterminent le fonctionnement. Nous sommes en fait convaincue que la spécificité de l'opérativité du diagramme dépend aussi de la manière et du rythme de l'opération qui le constitue ; comme l'affirme A. Connes : « pour un mathématicien, comprendre une démonstration ce n'est pas *refaire* une à une les étapes ou les lignes qui la constituent, mais *trouver un geste* qui comprime, qui permette de saisir d'un seul coup l'ensemble de la démonstration » (Saint-Ours, 2004, p. 42, nous soulignons)[24].

Le plan du contenu d'un diagramme est constitué par les valences attribuées tout au long d'une multiplication de constitutions et d'opérations spatiales sur son plan de l'expression qui entrent en compétition et qui sont enfin stabilisées selon les prises de décision de l'opérateur : selon cette acception du diagramme, ce qui assure la relation entre la manifestation visuelle, à savoir la pensée devenue saisissable et susceptible d'être

[23] Voir à ce propos l'analyse de la traduction spatiale des équations mathématiques dans des « photographies calculées » représentant le modèle de fonctionnement des trous noirs dans Dondero (2010c, pp. 111-176).

[24] Sur la question de l'action en mathématiques voir également Rey (*infra*).

expérimentée d'un côté, et la mathématisation, de l'autre, est assurée par notre corporéité. Le plan d'Argand, par exemple, devient pour Chatelet « un plan de *travail* qui prodigue généreusement *des idées* à qui décide de *s'y installer* » (1993, p. 247). L'idée est que l'acte de traçage, le geste d'inscription, ainsi que toutes les technologies de notation peuvent avoir des retombées sur la manière de conduire une pensée[25], même une pensée considérée purifiée comme celle mathématique. Le diagramme engendrerait donc un véritable processus énonciatif, produit par un débrayage de la pensée en une gestualité outillée qui met cette dernière à l'épreuve, et d'un embrayage qui va de la visualisation à l'intuition. Il s'agirait d'une intuition déclenchée par les opérations pouvant être générées pendant le geste de la pensée et du traçage lui-même[26].

Nous voyons ici qu'une autre totalité – et non seulement celle des formes enveloppantes du diagramme objectivé –, se révèle comme pertinente : celle de notre sensori-motricité et de notre corporéité, qui forme un autre type de totalité enveloppante et en même temps articulé en des centres d'énergies et en des mouvements[27].

2. La totalité en art : du tableau à la sculpture

Dans cette deuxième section de notre travail nous allons nous interroger sur deux notions : la totalité, pour voir comment elle fonctionne en art par rapport aux mathématiques, et la notion d'action, voire d'exploration.

Commençons par la première notion : est-ce que la constitution d'une totalité se révèle nécessaire en art de la même manière que dans les sciences mathématiques ? Et si oui, comment ? Si la résolution de problèmes, voire la démonstration, apparaissent en mathématiques comme dépendantes de la

---

[25] Comme l'affirme Knoespel (2004) sur le sillage de Chatelet : « plutôt que se laisser dominer par les théorèmes, la réflexion sur les mathématiques doit inclure une phénoménologie des technologies manuelles dont nous nous servons pour représenter l'espace, au moyen de marques, des dessins, de croquis, de gribouillis, etc. Les figures que nous dessinons sont le site d'un travail d'invention et de découverte dont les théorèmes sont impuissants à rendre compte, tant ils verrouillent notre compréhension des procédures mathématiques » (p. 144).

[26] Comme l'affirme Saint-Ours (2004), il s'agit aussi de penser le diagramme comme un « réservoir de virtualités » *collectives*. En fait, par exemple les diagrammes des lignes de forces de Faraday sont encore allusifs pour les physiciens contemporains : « ces diagrammes ont un pouvoir "d'évocation péremptoire" dans les théories de champs de jauge actuelles aussi grand que celui qu'ils avaient dans le cadre originel du champ électromagnétique ». Cela nous fait penser au commun destin des diagrammes de Feynman qui sont considérés comme toujours féconds et utilisables aujourd'hui même en théorie des cordes où les lignes sont remplacées par des membranes (Saint-Ours, 2004, p. 43). Les diagrammes de Feynman se sont en fait révélés indispensables pour la théorie des cordes, et ils ont été étendus de façon topologique. Jean-Toussaint Desanti affirme à ce sujet que les diagrammes contiennent *plus que ce dont on les a investis à un moment donné*.

[27] Sur la corporéité entendue comme relation entre énergie et mouvement voir Fontanille (2011).

constitution de formes, voire des totalités au niveau perceptif, quel est le rôle de la perception dans le cadre des œuvres d'art où *la totalité est, apparemment, déjà là*, au moins dans le cas du tableau, grâce aux frontières esthétiques offertes par le cadre ? Et encore : est-ce que l'image artistique est elle aussi constituée, au moins en partie, par des signes généraux, par des structures abstraites ?

Partons du cas du tableau : toute peinture nous prescrit une zone privilégiée d'observation et cela grâce à ses bords, voire à son cadre. Ce sont les contours d'énoncé et les limites qui le constituent en unité et qui nous permettent d'étudier sa méréologie, à savoir la manière dont les traits se combinent à l'intérieur d'une topologie où, grâce au cadre, nous pouvons distinguer un haut, un bas, un centre, une périphérie, des relations de symétries, d'englobement, etc.[28]

Dans ses articles sur l'art et l'esthétique[29], René Thom affirme que l'esthétique a affaire avec le rapport entre local et global et décrit des relations optimales entre les fragments perceptifs d'un tableau et ses contours. De ces relations dépend la composition réussie de la totalité et les parcours perceptifs qu'elle rend possibles.

En examinant la peinture, une des caractéristiques de la beauté est donnée, selon Thom, par la *localisation :* on peut faire apparaître la beauté, et donc une certaine forme de complétude, par l'effet de contour qui permet d'identifier les centres d'attention qui organisent la perception. Le cadre de la peinture permet d'identifier dans son intérieur des centres investis d'une certaine prégnance. Thom affirme à ce propos : « l'espace total de l'œuvre finit par être découpé en *des champs partiels qui sont les zones de rayonnement d'un centre* (ou plus précisément d'une configuration locale de détails prise comme un individu). On peut imaginer que cette fragmentation provienne d'une sorte de *prolifération du contour vers l'intérieur* »[30].

Si dans le cas du tableau on a une totalité figée *a priori* et d'une certaine manière indiscutable, cela ne va pas de même avec la sculpture. Le socle fonctionne non pas en tant que dispositif de clôture, comme c'est le cas du cadre en peinture et en photo, mais plutôt comme la source d'un éclatement de perspectives. La sculpture pose le problème du parcours d'observation et de réception de manière plus éclatante que la peinture qui, comme l'affirme Thom, instaure des rapports entre le cadre et les centres d'irradiation de l'attention qu'il contient et construit. L'unité physique de la sculpture n'est qu'illusoire : la totalité demeure en fait virtuelle, les parties qui la composent ne se donnant pas simultanément sur un plan commun. La sculpture en ronde bosse prévoit un corps mouvant faisant des tentatives de découverte,

[28] C'est cette fermeture qui a fait que la peinture ait été classée parmi les arts de l'espace, même si, à mon sens, cette unité spatiale et, par la suite, une lecture synchronique, sont tout à fait illusoires. La peinture peut être conçue comme un art du temps si on l'examine du point de vue de la saisie perceptive et de l'efficace, voire d'un point de vue sémiotique – et non pas matérialiste.
[29] Thom (2006).
[30] Thom (*idem*, p. 120, nous traduisons et soulignons).

cherchant les parties cachées afin de comprendre comment composer les différentes facettes d'une sculpture en une unité. La sculpture est toujours *manquante* non seulement parce que nous ne pouvons la saisir qu'en faisant une addition de nos esquisses perceptives, mais aussi parce que, avec sa rondeur, elle rend l'espace d'autour pertinent à la signification[31].

Les réflexions de Saint-Martin à ce sujet, contenues à l'intérieur de l'ouvrage *Sémiologie du langage visuel*, sont précieuses pour saisir cette question de l'exploration[32] et de la reconstruction d'une totalité :

> La perception ne peut résulter que d'une longue accumulation de centrations produisant des percepts toujours différents les uns des autres, qui doivent être définis comme régions *interreliables les unes aux autres dans des super-régions*, aptes à intégrer les percepts subséquents dans une *totalité unifiée*[33].

Avec la sculpture nous n'avons pas un plan commun, mais une suite de plans de projection perceptifs[34] : chaque nouvelle perception transforme la précédente et les plans de projection se font et se défont ; la totalité n'apparait

---

[31] L'espace à étudier se termine donc avec le socle où la sculpture est posée, ou avec l'architecture, le paysage : et, d'ailleurs, quelles limites donner à ce paysage ?

[32] Saint-Martin (1987, p. 143) affirme que : « Alors que *les positionnements différents du percepteur devant l'objet sculptural peuvent lui donner accès à des régions du champ visuel qui apparaissent tout à fait différentes du champ antérieur perçu, devenu inaccessible aux centrations, parce que situé à un angle opposé ou que certains éléments en relief masquent ce qui avait antérieurement été perçu*. Non seulement le percepteur doit-il procéder à une *imbrication* ponctuelle des colorèmes que fournit chaque région, mais il doit aussi mettre *en relation des régions tout à fait hétérogènes* et saisir, dans un processus de transformation constante, *un type d'infrastructure* qui puisse lui révéler leur dynamisme et leur fonction dans la construction de *l'objet global*. Chacune des régions ainsi interreliées dans la perception doit être relayée à la mémoire perceptuelle à mesure que le déplacement du percepteur l'ouvre à des nouveaux percepts qui transformeront les *équilibres/ regroupements* déjà effectués, par l'insertion de nouveaux percepts actuels, *sensoriellement actifs* et qui transforment les ensembles ou sous-ensembles déjà construits » (Saint-Martin, 1987, p. 143.)

[33] Saint-Martin (*ibid.*, p. 194, nous soulignons).

[34] « Ces relations peuvent être de deux sortes. Dans la sculpture égyptienne, grecque archaïque et romane, ou chez Maillol, *l'ambiance reflue vers le bloc, s'y recueille*. La masse minérale repose si compacte, si pauvre de saillie, elle offre à la lumière une surface si cohérente et si nue, qu'on a le sentiment que l'espace extérieur la comprime, pèse sur elle de toutes parts. La relation est surtout centripète. Au contraire, dans la statue hellénistique et baroque, ou chez Rodin, la forme sculptée crée un foyer de mouvements dont le dynamisme harcèle ses entours avant de s'y arrêter et de se réfléchir vers sa source. Non seulement l'artiste dote ses figures de mouvements expansifs, mais son modelé abandonne le continu : il bosselle la surface, y accrochant les jeux de la lumière, l'animant de scintillations ; le sculpteur va jusqu'à ouvrir la masse aux rayons lumineux pour mieux la dissoudre dans l'environnement. La relation est d'abord centrifuge » (Van Lier, 1959, p. 2).

pas d'emblée, mais des sous-unités mobiles et dynamiques se construisent comme des *agglomérations successives* de projections perceptives. La synthèse volumétrique est en continuelle transformation et dépend des intégrations des synthèses les unes avec les autres[35]. Van Lier parle à propos de ce type de sculpture de la génération d'un profil par l'autre : « Chaque profil se gonfle de tous les autres ; ils s'évoquent, ils se précontiennent et s'appellent ; ils s'impliquent mutuellement »[36].

Nous nous apercevons que Van Lier nous amène à aller un peu plus loin dans la question du processus de composition d'une totalité en faisant intervenir la question de la temporalité et en associant la sculpture à l'écoute de la musique. Il écrit que : « plus l'œuvre est *forte*, plus les anticipations et les rétentions *se resserrent* » et que « dans le monde de l'art tout est à la fois *libre* et *exigé* »[37] : la suite est en même temps *imprévisible* et *inévitable*.

Ce caractère de nécessité (inévitabilité) qui se dégage de la préhension de l'œuvre d'art – non seulement du tableau, totalité donnée à priori, mais aussi d'un type d'objet, telle la sculpture, qui est caractérisée par une totalité à construire à postériori –, nous fait revenir à ce que dit Peirce du caractère démonstratif de la perception, qui assure une inévitabilité du jugement.

Nous nous apercevons que Peirce dans le cas des mathématiques, autant que Thom et Van Lier dans le domaine de l'œuvre d'art, mettent au centre de leurs réflexions la composition de parties, les relations entre parties et contours, l'irradiation réciproque entre les deux : bref, les opérations expérimentales qui engagent notre perception et notre sensori-motricité – et qui se clôturent à travers un jugement perceptif d'inévitabilité, de correction impossible. Mais cette inévitabilité a un rapport particulier avec la prévisibilité. Van Lier le dit bien : la suite des perceptions est imprévisible. Peirce aussi affirmait que dans le cas de la procédure théorematique, en partant des prémisses, la fin est toujours imprévisible, comme ici est imprévisible de comprendre une sculpture en partant d'une vision frontale et statique. Mais en même temps l'exploration de la sculpture, ainsi que la suite en musique, s'avèrent à la fin posséder un caractère d'inévitabilité. Cette inévitabilité du déploiement du processus serait caractérisée par nos savants comme réglée dans le cas des mathématiques (les opérations sur la visualisation ne sont pas laissées au hasard, mais bien à l'intuition experte, voire l'imagination), et libre dans le cas de l'art. De notre côté, nous pensons que les relations entre anticipations et retentions perceptives dans le cas de la musique et de la sculpture ne sont pas du tout libres : elles sont également réglées par la nécessité d'un écart par rapport à la tradition et d'un jeu de

---

[35] Saint-Martin (*idem*, pp. 194-195). Et elle poursuit ainsi : « Mais aux effets de profondeur liés aux mécanismes perceptifs, à partir d'un seul positionnement du percepteur, la sculpture requiert d'intégrer des percepts et des effets de profondeur, multipliés par les points de vue nombreux, pour construire sa rotondité ».
[36] Van Lier (*idem*, p. 4).
[37] Van Lier (*idem*, p. 4, nous soulignons).

fidélité / infidélité par rapport aux règles du genre – encore une fois il s'agit d'imagination expérimentale et créatrice.

Si le caractère d'inévitabilité (ainsi que d'évidence) dont parle Peirce caractérise la formation d'une totalité perceptive démonstrative dans le cas des diagrammes en mathématiques, est-ce que cette inévitabilité d'effets sur l'observateur, dans le cadre de l'œuvre d'art, pourrait être conçue comme une démonstration en elle-même ? L'objet se révèlerait donc comme artistique lorsqu'il fonctionne à l'instar d'une auto-exemplification de ses propres règles de construction ?[38] C'est une hypothèse qui se rapproche de ce qu'affirme Colas-Blaise à propos de la scientifisation de l'art :

> à côté de l'artistisation de la science, la scientifisation de l'art ne se borne pas à l'exploration d'un nouveau matériau ; elle ne se contente pas de relever un défi technologique – ce serait confondre la science avec la technique ; elle résulte, plus fondamentalement, dans la mise en évidence et la *syntagmatisation des différentes étapes ou des paliers d'une pratique* (de création, sur le modèle de la recherche scientifique) *finalisée.*[39]

Le caractère « scientifique », et d'une certaine manière démonstratif, de l'œuvre d'art consisterait en la mise en évidence, voire en l'exemplification, des étapes de sa constitution, ce qui permet à l'observateur de s'interroger sur la manière de composer en unités des différents matériaux. Cette composition méréologique se révélerait comme un « excès » par rapport aux simples matériaux utilisés dans cette œuvre – comme dans le cas des mathématiques le pouvoir d'iconisation des formes dépasse le pouvoir médiateur et réglé des signes généraux. Mais il est important aussi de souligner que Colas-Blaise parle d'une pratique finalisée, donc d'une pratique expérimentale qui attend à être légitimée : pour qu'il y ait démonstration, il faut qu'il y ait un projet et donc des hypothèses de départ autant en produisant qu'en observant une œuvre d'art.

Il faudrait imaginer donc, dans le cas de l'œuvre d'art, une tension entre, d'une part, une totalité virtuelle qui s'annonce dès le début en termes de projet – mais qui se reconfigure à chaque impression perceptive – et, d'autre part, les fragments perceptifs qui la constituent au fur et à mesure, en confirmant ou en niant les totalités virtuelles pressenties. Il faudrait concevoir une totalité abstraite, virtuelle, a priori, qui soit reconfigurée à fur et à mesure, à chaque nouvelle esquisse perceptive, c'est-à-dire se réalisant tout en gardant des horizons ouverts vers d'autres configurations de totalités possibles qui sont, pendant l'exploration, encore passibles de se réaliser à sa place.

Thom précise ainsi son point de vue sur la formation d'une totalité d'œuvre d'art :

[38] Sur la notion d'exemplification en art voir Goodman (1968).
[39] Colas-Blaise (2011, nous soulignons).

> son [de l'œuvre d'art] effet esthétique, sa beauté seront liés à *l'accord plus ou moins parfait entre la fragmentation perceptive* et *un modèle idéal* obtenu en soumettant l'espace du tableau à une partition abstraite, définie par une structure de caractère algébrique – un logos catastrophiste, justement[40].

Cette affirmation de Thom concernant le tableau est à notre sens à mettre en relation avec une affirmation de Peirce concernant le diagramme : « toute déduction procède par construction de diagrammes, c'est-à-dire de signes appartenant à la classe des icônes, qui exhibent des relations existant entre les parties d'un état de chose (*state of thing*) *idéal* et *hypothétique*, *imaginé* par le mathématicien et susceptible d'être *observé* »[41].

Nous avons dans les deux cas des relations entre parties (les fragments perceptifs chez Thom) et leur dépendance d'un état de chose idéal et hypothétique (le modèle idéal de Thom, décrit comme une partition abstraite, définie par une structure de caractère algébrique). Cet état de chose idéal est imaginé dans le cas de l'exploration d'une œuvre d'art ouverte comme la sculpture et l'art environnemental mais en même temps observable dans une visualisation (mathématique ou artistique) tout au long des expériences et expérimentations qu'on peut opérer sur elle en la produisant (et en la parcourant). Les visualisations mathématiques ainsi que les œuvres d'art seraient donc expérimentales au sens décrit par Bordron :

> Une expérience est un fait singulier qui demande que tout soit, par ailleurs, considéré comme inchangé. *C'est cette tension entre une singularité d'une part et une stabilité structurelle de l'autre qui caractérise l'expérience*. Ainsi en va-t-il dans une expérience de laboratoire qui exige nécessairement que tout reste égal par ailleurs si l'on veut que l'hypothèse que l'on cherche à tester ne se dilue pas dans un réseau de causes sans contour. Il en est de même de l'expérience esthétique qui opère une focalisation sur une singularité (un tableau, une œuvre, une émotion) ou de l'expérience mathématique qui est une forme particulière d'expérience de pensée (*infra*, nous soulignons).

La structure générale dans le cas de l'œuvre d'art pourrait être conçue comme notre expérience dans le domaine de l'art, voire la connaissance que nous avons du fonctionnement du sentiment esthétique et qui nous guide pour comprendre chaque singularité. Mais chaque singularité rend pertinent une toute précise portion de l'histoire de l'art et une certaine esthétique sélectionnée parmi d'autres : il s'agit toujours d'une généralité locale, voire de savoirs encyclopédiques locaux. D'une certaine manière il s'agirait de faire valoir un œil et une sensibilité expérimentée grâce à la fréquentation d'une tradition et d'une appropriation de celle-ci.

---

[40] Thom (*idem*, pp. 120-121, nous traduisons et soulignons).
[41] Chauviré (2008, p. 36, nous soulignons).

2.1 De la sculpture à l'art environnemental

Les cas de l'installation artistique et de l'art environnemental sont encore plus problématiques que la sculpture en ronde bosse : ils sont souvent même sans bords matériels et, en tout cas, sans centres préconstitués. Comment pouvoir saisir une beauté diffuse, environnementale, si c'est le bord qui a toujours été considéré comme le filtre entre le non-beau et le beau ? Peut-on concevoir la beauté comme quelque chose de non localisé, de non concentré ? Comment construire les bords des installations qui se constituent *après en avoir fait l'expérience* ?[42]

Suivant la conception de Thom sur l'œuvre d'art, et en l'adaptant à l'art environnemental, il faudrait rapporter la dynamique des différentes *esquisses perceptives* (les fragments) qui se préconisent et s'appellent de loin, qui s'anticipent et se projettent, à une *partition abstraite*, voire à une structure. Une structure dont nous nous construisons un simulacre avant l'exploration de l'objet sculptural et de l'espace de son irradiation, ou bien une structure géométrique. Pour comprendre l'espace environnemental il faudrait donc envisager une confrontation dynamique entre une structure abstraite, qui peut être conçue comme un simulacre avant l'exploration, et nos parcours autour et à travers ces espaces. En ce qui concerne la structure géométrique d'une installation, elle peut se manifester à l'observateur à travers une vue aérienne, où la sculpture et les chemins dans le paysage deviennent des surfaces stratifiées l'une sur l'autre, compactées, bref elles deviennent des peintures. D'une certaine manière, d'en haut le temps s'arrête, et le paysage devient tableau (par réduction d'échelle, réduction de la profondeur, etc.).

Notre hypothèse est que la dynamique dans ce cas peut être entendue comme un *diagramme vivant* qui met en relation deux formes de totalité, une pressentie, les autres en train de se faire et de s'ajuster entre elles ; c'est le diagramme qui est le fruit de la mise en valeur des lieux de croisement plus ou moins stables entre ces deux formes de totalités. Il s'agirait donc de trouver des correspondances locales et provisoires entre une structure abstraite (généralité) et l'exploration corporelle (singularité de l'acte perceptif), voire entre des patterns de parcours *possibles* et les parcours *effectués dans le temps*. Il se produirait donc un espace-œuvre pris entre la virtualité des possibles (vue d'en haut) et les parcours incarnés par un corps en mouvement. Il s'agirait par conséquent de mettre en rapport les organisations abstraites avec le déploiement d'un point de vue incarné par le corps explorateur qui investi de prégnances les saillances – pour le dire avec les termes de la théorie de Thom.

[42] Que faut-il conserver lors d'un déplacement, d'une restauration d'une installation ? Est-ce que dans le *land art* c'est l'horizon (à savoir jusqu'où l'être humain peut regarder) qui donne les bords à l'espace de l'installation sculpturale ou est-ce les bords offerts par la morphologie du paysage, vu d'en haut, à travers le survol et la photo aérienne ?

Il faut que l'œuvre se déploie, se développe dans le temps, vu que les relations entre les différents plans de projection perceptive ne sont pas immédiatement présentes comme le sont par contre dans un plan commun pictural. Dans l'exploration, les relations se construisent et se défont et nous sommes, avec notre mouvement, en train de constituer les relations, et en même temps c'est notre corps et notre perception qui sont les produits de ces relations qui se font et se défont : notre corps et notre perception sont les témoins de ce diagramme de relations, de ces formes qui se font et se défont, tout en restant prises dans une structure qui les tient ensemble et les compacte, et que nous pourrions identifier avec l'icône abstraite peircienne.

Dans cet art, il semble nécessaire de construire une relation entre des totalités pressenties, elles aussi en transformation, et des totalités en train de se constituer lors de chaque nouvelle configuration perceptive qui s'actualise. Mais pourrait-on parler d'une nécessité prévue du parcours d'exploration dans l'art environnemental ? Cette nécessité devrait se révéler à la fin du parcours, quand on met en relation nos fragments perceptifs avec une mémoire de l'ensemble, mémoire du projet (vue d'un haut) et mémoire de la totalité des parcours effectués.

Pour conclure

Dans le cas de la sculpture et de l'art environnemental, il nous semble pouvoir affirmer que l'espace doit être *consommé* pour devenir un espace-œuvre d'art intégrant et totalisant. L'art environnemental concerne finalement aussi une inscription du paysage sur notre mémoire perceptive. En suivant cette hypothèse, on pourrait concevoir ce type d'œuvre comme enracinée à la fois dans le paysage et dans notre mémoire, où elle trouve également un plan d'immanence. Il s'agit en tout cas de la constitution de deux totalités dynamiques, celle de la mémoire perceptive de l'observateur / promeneur et celle de l'œuvre en tant que projet et finalité, se construisant mutuellement par une « hétérogénéité des réseaux de perspectives ».

En guise de conclusions, on pourrait affirmer qu'en mathématiques la totalité se constitue en allant de la successivité qui fonde la linéarité de l'écriture des signes généraux à une totalité tabulaire, qui est une totalité qu'on ne peut plus manipuler, ni développer : c'est impossible de la développer car elle met, par un jugement de perception, le mot fin à l'expérimentation. C'est le contraire dans l'art pictural et dans l'art environnemental vu d'en haut : c'est le parcours allant de l'organisation tabulaire au déploiement dans la successivité des esquisses perceptives qui montre comment les parties composent la totalité suivant une successivité temporelle de la saisie. Le déploiement des parties est fondamental à la fois dans les mathématiques et dans l'art, mais la différence que nous pouvons discerner à partir des théories examinées est que la syntagmatisation est le point de départ des explorations mathématiques, qui se figent et se muséifient en une image qui devient démonstrative par sa justesse perceptive, alors que le déploiement syntagmatique est, pour ainsi dire, le point d'arrivée de l'exploration perceptive en art.

Références bibliographiques

BEYAERT-GESLIN, Anne, « L'art comme texte et comme pratique de laboratoire », *Arts et sciences : une attirance***,** Liège, PULg, 2012.

BASSO FOSSALI, Pierluigi et DONDERO, Maria Giulia, *Sémiotique de la photographie*, Limoges, Pulim, 2011.

BATT, Noëlle, « L'expérience diagrammatique : un nouveau régime de pensée », *Théorie, Littérature, Enseignement* n° 22 « Penser par le diagramme. De Gilles Deleuze à Gilles Châtelet », 2004, pp. 5-28.

BORDRON, Jean-François, « Rhétorique et économie des images », *Protée* n°38, vol. 1, « Le Groupe µ entre rhétorique et sémiotique. Archéologie et perspectives » (Badir et Dondero dirs), 2010, pp. 27-39.

BORDRON, Jean-François *L'iconicité et ses images. Études sémiotiques*, Paris, PUF, 2011.

BRUNET, François, *La naissance de l'idée de photographie*, Paris, P.U.F., coll. Sciences, modernités, philosophies, 2000.

CHÂTELET, Gilles *Les enjeux du mobile. Mathématique, Physique, Philosophie*, Paris, Seuil, 1993.

CHAUVIRE, Christiane, *L'œil mathématique. Essai sur la philosophie mathématique de Peirce*, Paris, éditions Kimé, 2008.

COLAS-BLAISE, Marion « L'art au risque de la science : les vitraux radiographiques de Wim Delvoye », *Arts et sciences : une attirance***,** Liège, PULg, 2012.

DONDERO, Maria Giulia, « The Semiotics of Scientific Image : from production to manipulation », *The American Journal of Semiotics*, vol. 25, ns° 3-4, 2009, pp. 1-19.

DONDERO, Maria Giulia, « L'indicialité de l'image scientifique : de la constitution de l'objet à sa manipulation », *Visible* n° 6 (Dondero et Moutat dirs), Limoges, Pulim, 2010a.

DONDERO, Maria Giulia, « Diagramme et parcours visuels de la démonstration », *Nouveaux Actes Sémiotiques* en ligne, N° 114. Disponible sur : <http://revues.unilim.fr/nas/document.php?id=3766> (consulté le 23/10/2011), 2010b.

DONDERO, Maria Giulia, « Sémiotique de l'image scientifique », *Signata. Annales des sémiotiques/Annals of Semiotics* n° 1, 2010c, pp. 111-176.

DONDERO, Maria Giulia, « Les fragments en tant que supports d'expérimentation : l'énonciation visuelle de l'objet scientifique », *Actes du congrès AFS Sémio 2010 « Écritures Fragmentaires : questions d'énonciation »*, disponible à l'adresse : http://www.afssemio.com/afs/2011/09/07/les-fragments-en-tant-que-supports-d'experimentation-l'enonciation-visuelle-de-l'objet-scientifique-maria-giulia-dondero/, 2011.

FONTANILLE, Jacques, *Corps et sens*, Paris, PUF, 2011.

GALISON, Peter « Images scatter into data. Data gather into images », in Latour et Weibel 2002 (dirs) *Iconoclash. Beyond the Image Wars in Science, Religion and Art*, MIT Press and ZKM, Karlsruhe, 2002, pp. 300-323.

GALISON, Peter *Image and Logic. A Material Culture of Microphysics*, Chicago, The University of Chicago Press, 1997.

GIARDINO Valeria et PIAZZA Mario, *Senza parole. Ragionare con le immagini*, Milan, Bompiani, 2008.

GOODMAN Nelson, *Languages of Art. An Approach to a Theory of Symbols*, Indianapolis, Hackett, 1968 ; tr. fr. *Langages de l'art. Une approche de la théorie des symboles*, Paris, Hachette, 1990.

JULLIEN, François *La grande image n'a pas de forme ou du non-objet par la peinture*, Paris, Points, 2009.

KNOESPEL, Kenneth J., « Diagrammes, matérialité et cognition », *Théorie, Littérature, Enseignement* n° 22 « Penser par le diagramme. De Gilles Deleuze à Gilles Châtelet », pp. 143-163.

LATOUR, Bruno « La sémiotique des textes scientifiques depuis le travail de Françoise Bastide », *Visible* 5, Dondero et Miraglia dirs, 2009, pp. 251-262.

PEIRCE Charles Sanders, *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, 8 vol., numérotés en chiffres arabes, Hartshore, Weiss et Burks dirs., Cambridge, Harvard University Press, 1931-35.

SAINT-MARTIN, Fernande, *Sémiologie du langage visuel*, Presses de l'Université de Québec, 1987.

SAINT-OURS, Alexis, « Les sourires de l'être », *Théorie, Littérature, Enseignement* n° 22 « Penser par le diagramme. De Gilles Deleuze à Gilles Châtelet ».

STJERNFELT, Frederik, *Diagrammatology. An Investigation on the Borderlines of Phenomenology, Ontology, and Semiotics*, series Synthesis Library vol. 336, Springer Netherlands, 2007.

THOM, René, *Morfologia del semiotico*, Rome, Meltemi, 2006.

VAN LIER, Henri, *Arts de l'espace*, 1959, disponible en ligne à cette adresse : http://www.anthropogenie.com/anthropogenie_locale/semiotique/arts_espace_2.pdf

Maria Giulia DONDERO participe aux "Actions de recherche concertées – ARC" de la Direction générale de l'Enseignement non obligatoire de la Recherche scientifique (Académie Universitaire Wallonie-Europe).

Comment penser le désordre dans l'image
Les fractales sont-elles des images scientifiques ?

Francis EDELINE
Groupe µ - Université de Liège

Les discussions sur l'influence que les nouvelles technologies, essentiellement informatiques, pourraient avoir sur l'art, ou sur l'esthétique en général, sont bien souvent marquées par l'incompréhension, ou plutôt par des malentendus. L'informaticien s'émerveille naïvement des formes qu'il a créées et pense avoir rejoint le monde des artistes, alors qu'il se méprend totalement sur la problématique de l'art. L'artiste de son côté, en usant d'algorithmes dont il ne saisit pas toujours la signification physique, est persuadé d'avoir conféré à ses productions une nouvelle légitimité.

Les artistes fractalistes se placent dans la même position vis-à-vis de la modernité scientifique que les *Puristes* des années 20 (Ozenfant, Le Corbusier…), avec cette double supériorité qu'ils ont changé d'outil (l'ordinateur) et adopté une véritable découverte des mathématiques et de la physique (alors que les Puristes se bornaient à reprendre les concepts éculés de la section d'or, etc.). Il y a toujours eu un engouement des artistes pour la science et ses découvertes. Sous sa forme superficielle il leur permet d'obtenir à bon compte un brevet de modernité. Plus gravement il peut indiquer une vassalité consentie de l'art par rapport à la science[1], et trahir le fait que l'artiste est à la recherche de sources et de stimulations qu'il ne trouve plus en lui-même. Il n'y a pas que l'art d'ailleurs à se comporter ainsi : l'ensemble des sciences humaines s'est rué naguère (cravaché par le plus béat des journalismes) sur la cybernétique, la théorie des systèmes, le chaos déterministe… Pour reprendre une expression de Marguerite Neveux (1995 : 139) « cet appel à la science est étranger à tout esprit scientifique véritable », il est « plus incantatoire que réel ».

[1] Ce danger est bien souligné, justement à propos des fractales, par Giorgio Israël (1996 : 291).

L'enthousiasme des uns et des autres fait plaisir à voir. C'est comme si le gouffre qui sépare l'art de la science s'était soudain comblé. Mais il faudra bien tôt ou tard se poser des questions de fond, par exemple celle que pose J-Cl. Chirollet (1994a et b) lorsqu'il appelle à la fondation d'une techno-esthétique. Les images fractales ne sont qu'un sous-ensemble des images de synthèse. L'imaginaire numérique (Tacussel, 1989) ou la techno-esthétique (Chirollet, *passim*) débordent largement leur champ. Il faudra donc éviter d'étendre imprudemment les conclusions dégagées à propos des fractales au domaine entier des nouvelles images. Des exemples de fractales sont donnés aux fig. 1 (premières itérations) et 2 (après 250 itérations).

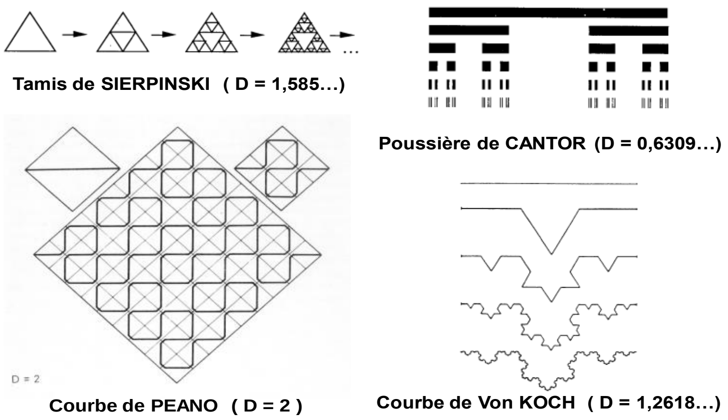


Fig. 1. Quelques exemples de fractales simples (premières itérations)

Fig. 2. Une fractale « ornementale » (type : ensemble de Julia) après 255 itérations.

Une discussion sur les fractales, et sur les images de synthèse en général, se trouve impliquée au moins dans les problématiques suivantes :

- L'ordre et le désordre.
- La « beauté » de la nature.
- L'art vu comme « copie » fidèle de la nature (mimésis).
- La disparition du « geste ».
- Le concept d'esthétique « évolutive ».
- Le « rapport symbolique » de l'homme au monde.
- L' « algorithme » contre l' « archétype ».

1. Ordre et désordre

Le regard que l'homme porte sur la nature doit nécessairement se situer entre les deux attitudes extrêmes suivantes.

- Soit il recherche une intelligibilité accrue, c'est-à-dire qu'il tente de formuler un modèle capable de retenir une partie (aussi importante que possible) du perçu. Ce faisant il crée un ordre et rend le monde ordonné. Anouilh disait à peu près : « la vie c'est très beau, mais ça manque de forme. C'est le rôle de l'art de lui en donner un peu ». C'est ce que Cézanne a fait en ramenant le paysage à quelques formes simples. C'est aussi ce que fait, en définitive, le scientifique. L'esprit humain semble donc constamment à la recherche de l'ordre (ou d'un ordre), le hors-système est inacceptable. Cette attitude traduit une confiance dans la possibilité de comprendre l'univers, donc de le représenter fidèlement, mais laisse intact le problème de savoir si ces formes sont dans le monde ou dans l'esprit. Or, si complexe et élaboré qu'il soit, un modèle laisse toujours échapper un reste, qui est alors dévalorisé parce que déclaré secondaire et aléatoire (c'est-à-dire fruit de causes multiples, mineures et désordonnées).
- Soit il prend conscience de cette deuxième part, qu'il ressent comme irréductible et même prépondérante. Il propose alors une représentation du monde aussi dépourvue d'ordre que possible, le concept d'ordre lui-même, à la limite, étant ressenti comme une supercherie ou une illusion. Dans la dichotomie intellectuelle qui règne aujourd'hui, ce qui n'est pas ordonné est aléatoire, et on assiste (chez les artistes en tout cas) à des tentatives de produire par la volonté un résultat aléatoire, ce qui est évidemment une impossibilité vu la contradiction des termes de départ : volonté *vs* hasard. Ce qui est ainsi produit est en fait le fruit d'un « modèle du hasard », c'est-à-dire à nouveau un ordre. Il suffit de rappeler le cri de victoire des rationalistes lorsqu'est apparu le concept de *chaos déterministe*. Le résultat peut cependant atteindre son but : donner l'impression de forces touffues et incontrôlées, qui nous échappent et réclament de nous une soumission sans réserve.

On sent ici poindre le risque d'un amalgame entre *désordre* et *complexité,* confusion que quelques définitions, tirées de Fivaz (1989) aideront à mieux circonscrire.

ORDRE : est appelé ordonné un ensemble où la connaissance d'une partie suffit pour connaître l'ensemble. L'ordre est alors la série de transformations à effectuer pour passer de la partie à l'ensemble (ex. : symétries).

COMPLEXITÉ : nombre de données nécessaires pour définir un ensemble. Plus le système est ordonné plus ce nombre est petit.

IRRATIONNEL : jugement subjectif posé devant un ensemble trop complexe, dont le nombre de parties est tel que la conscience ne peut plus les suivre.

Ces concepts concernent aussi bien les images scientifiques que les images artistiques, car c'est le même système visuel qui les examine. L'impression d'ordre découle du succès rencontré dans le regroupement d'informations élémentaires, que Miller (1956), dans un article justement célèbre, appelle *recodage*. À propos du langage il démontre que le recodage permet de doubler la quantité d'information manipulable, et « suspecte que l'image aussi est une forme de recodage ». Les acquis de la *Gestalttheorie* vont dans le même sens.

Plusieurs expériences ont montré qu'il était impossible à l'homme de simuler le hasard, aussi bien dans l'espace (disperser aléatoirement des points sur une surface) que dans le temps (disposer aléatoirement une séquence d'événements). Toujours il surdisperse ou il sous-disperse. C'est pourquoi simuler de façon convaincante l'*apparent* désordre d'une chaîne de montagnes, d'un archipel, d'un littoral, d'un feuillage, est également une chose très difficile voire impossible tant qu'on s'en remet au geste du peintre ou du dessinateur. Mais précisément ce qu'on appelle aujourd'hui théorie du chaos a démontré qu*'il ne s'agit pas du même désordre*. La découverte des algorithmes fractals a même pu être considérée comme la réponse définitive à ce problème. Mandelbrot (1981, 1983) n'a pas échappé à cette impression qu'ayant enfin trouvé la formule des irrégularités naturelles (qu'il estime « inséparables de la structure géométrique du monde »), il avait du même coup découvert le secret de la « beauté de la nature ». En effet selon lui l'art peut s'inspirer de ces principes : il l'a fait intuitivement par le passé et peut le faire aujourd'hui en s'aidant de l'ordinateur. Le produit de cette démarche, ou art fractal, « est à la fois très étrange et très familier ». L'art fractal rejoint ainsi, pour les dépasser (en radicalisme tout au moins), les tentatives les plus extrêmes d'artistes comme Rodolphe Bresdin (fig. 3).

Fig. 3. Rodolphe Bresdin, *La Fuite en Égypte*, 1853.

C'est une illusion sans doute, mais surtout elle s'accompagne de contresens profonds quant à la nature et à sa prétendue beauté. Elle a par ailleurs engendré l'extase démiurgique des informaticiens qui, créant cette fois des images virtuelles au lieu d'analyser plus modestement la structure du monde perçu dans ses rapports avec la sensibilité humaine (i.e. les sens), confondent ce projet avec celui de l'art.

Cette dérive est pleinement apparente partout. Mandelbrot attribuait des « noms poétiques » à certaines de ses figures. Chirollet (1994) s'abandonne à la métaphore hylozoïque lorsqu'il estime que les programmes informatiques engendrent des « paysages luxuriants et étranges », des « créatures végétales et animales fantastiques ». Trouver naturel de donner aux images de synthèse des « noms aux consonances poétiques » témoigne par ailleurs tout autant d'une méconnaissance profonde de la poésie. Les œuvres présentées par

Susan Condé (2001) reflètent, à de rares exceptions près, la même conception et dans une exposition récente à Dresde (2000), un informaticien présentait des tracés (en noir et blanc) obtenus par un algorithme développé par lui dans le cadre d'un programme de recherche Siemens, en les affublant de titres du même genre (voir quelques exemples au tableau I).

Chez SCHOEN	Cités par CHIROLLET	Noms cités par CAILLOIS pour des agates, marbres, onyx…
Dance of the garden Gnomes Monster Buckingham Palace Stagbeetles clones Virtual flower show Merlin's necklace	Houlettes de bergers Dragons chinois Hérissons marins	Oiseau naissant Larve Monument funéraire Broussailles Le château

Tab. 1 : Quelques exemples de désignations projectives

La chose n'est pas nouvelle. Depuis longtemps le touriste « de masse » visitant une grotte se voit proposer des « appellations poétiques » à propos des stalactites (v. fig. 4), et les formes « convulsées » des vieilles souches d'arbre appellent pareillement des dénominations « évocatrices ».

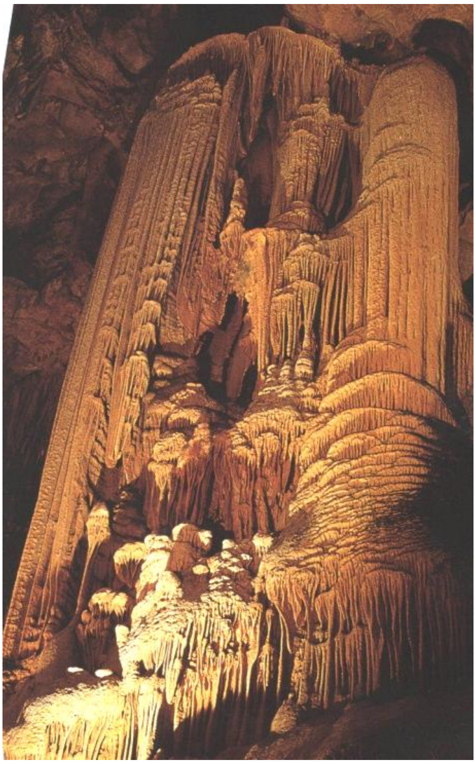


Fig. 4. *Le grand buffet d'orgue*, Grotte des Demoiselles (Hérault)

Comme l'observe très bien Caillois (1960) dans ses réflexions sur la *Natura pictrix* — quoique dans un langage présémiotique — « Le titre leur impose un sujet ». Rien de neuf, donc, sinon que cette fois le processus ne s'applique plus à une « œuvre » de la nature mais de l'homme. La finalité mathématique initiale des fractales — à savoir étudier une géométrie gouvernée par des dimensions fractionnaires — disparaît, et les courbes[2] sont désormais produites pour elles-mêmes, c'est-à-dire qu'elles deviennent en fait une nouvelle catégorie d'œuvres d'art.

Il s'agit d'un processus de projection, du même type que celui qu'enclenchent les images de Rorschach (fig. 5) et bien étudié par des psychologues expérimentaux tels que Didier Anzieu (1961).

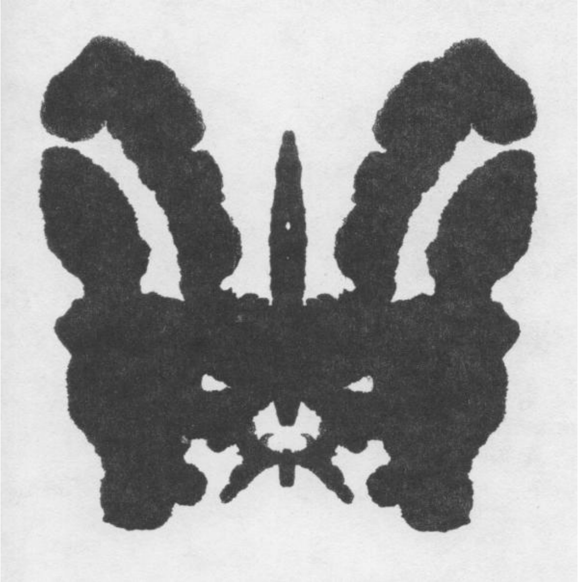


Fig. 5. Rorschach, Test de projection. Une des images noir & blanc

Cet auteur formule une *théorie projective de la perception*, dont les résultats essentiels pour nous sont que la projection « apporte au sujet non seulement une information sur le monde extérieur, mais en même temps la satisfaction d'un désir » et que « Quand le champ perceptif devient de moins en moins structuré, l'anxiété a tendance à augmenter ». Par la projection, qui consiste en un regroupement anthropocentrique de l'information visuelle, on atteint une réduction de cette complexité anxiogène. Or il convient de remarquer que les figures de Rorschach, qui n'ont rien d'informatique, sont

---

[2] Il est d'ailleurs un peu agaçant de s'obstiner à appeler « courbes » des tracés constitués exclusivement de segments de droites raccordés par des angles, et par conséquent non dérivables…

des documents violemment contradictoires : fractales dans leur préparation, donc désordonnées et chaotiques, elles sont néanmoins délibérément pourvues d'une symétrie complète, soit la plus simple et la plus universelle forme d'ordre qui soit perceptible.

N'est-ce pas un paradoxe remarquable qu'une image aussi éminemment mathématique et abstraite que la fractale, née de la théorie et de l'algorithme, se révèle si ouverte aux émotions ? Le psychisme s'y engouffre et le corps, qui semblait en avoir été exclu, s'y invite de force par la projection.

Le malentendu est profond et dépasse la fantaisie somme toute anodine de coller des noms suggestifs à des images car, outre Mandelbrot déjà cité, Chirollet a des formules quasi démiurgiques : « le processus de génération des fractales est comparable à l'ontogenèse des êtres vivants », ou encore : l'information contenue dans les paramètres de départ est « comparable à un patrimoine génétique contenu dans les chromosomes ».

Il ne s'agit évidemment pas de banaliser la performance qui consiste à simuler de façon très réaliste, hyperréaliste même, « les formes et textures naturelles », par exemple les effets de brume, de nuage, de lumière diffuse, ou encore les formes élémentaires du paysage : relief, végétation, étendues d'eau… On dira au contraire que ce qui autrefois paraissait irréductiblement désordonné est aujourd'hui, grâce à la théorie du chaos déterministe, « rentré dans l'ordre ». Et c'est bien là le paradoxe : le désordre apparent était un ordre caché, et la thèse de l'intelligibilité ultime du monde gagne un point, notre modèle de ce monde étant devenu considérablement plus puissant.

Granger (1998) a bien montré que l'acceptation de l'irrationnel est toujours considérée par la pensée humaine comme un pis-aller temporaire. Toujours on espère « réduire » ultimement les phénomènes réfractaires, et bien souvent, comme en attestent de nombreux exemples, ce fut le cas. Dans le domaine de la physique et des mathématiques, l'histoire des fractales est un nouveau cas d'« obstacle irrationnel » rencontré et surmonté.

Personnellement je suis convaincu qu'on arrivera à démontrer que l'irrationnel est *impossible*, qu'aucun fragment de l'univers, aucun phénomène, ne peut échapper à l'emprise déterministe. S'il semble le faire c'est simplement parce que sa complexité (momentanément ou pour toujours ?) nous dépasse. Le plus grand titre de Benoît Mandelbrot à notre reconnaissance est, à mes yeux, d'avoir montré qu'une rationalité, un ordre précis, peut se dissimuler dans les phénomènes à première vue les plus désordonnés, et que la science avait jusqu'alors pour cette raison, bien à contrecœur, laissés de côté.

Mais tout ceci ne concerne pas l'art, qui n'a aucunement pour objectif de simuler le réel de façon illusionniste : cette fausse route a été désertée depuis la trop belle histoire de Zeuxis, qui démontre par l'absurde que l'art comme simulacre s'anéantit dans sa propre perfection. De plus la nature n'appartient pas au domaine de l'art, lequel est proprement celui d'une catégorie d'artefacts humains, et comporte toujours l'expression, directe ou indirecte, d'une subjectivité.

C'est pour ces raisons qu'on peut, sans excès de légalisme mais sans hésitation, exclure du domaine de l'art celles parmi les images de synthèse qui ne visent, par des algorithmes de plus en plus raffinés, qu'à imiter la nature de façon illusionniste et convaincante.

Chirollet (1994) par exemple estime qu'il est abusif de voir du préfractalisme chez un Tobey ou un Pollock : pour lui le terme est éclairant mais reste métaphorique parce que manquent chez ces artistes l'échelle continue et le processus infini. Cette sévérité, trop rigoureuse à mon gré, et qu'il semble avoir abandonnée ultérieurement, pourrait aussi s'appliquer aux artistes postfractalistes (comme Ginzburg) qui pratiquent une auto-similitude par paliers ou échelons. La position de S. Condé (2001) est finalement plus sage : pour elle tous ces artistes font simplement *allusion* au fractalisme et se placent « dans la perspective » d'un « complexe chaotique ». Il semble en tout cas aveuglant que de nombreux artistes, et parmi les plus grands, ont été sensibles à une composante désordonnée des spectacles naturels : Léonard de Vinci et ses tourbillons, Vermeer et son mur, Reynolds et ses frondaisons, Turner et ses nuages, Bresdin et ses halliers (fig. 3), Mondrian et ses pommiers… C'est cette composante que nous appelons aujourd'hui *fractale*. La coupure entre l'ère pré- et post-fractale n'est donc pas radicale. Ce qui est radical c'est la thématisation du problème, permise grâce à sa nouvelle formulation mathématique.

Barnsley (1983) confirme d'ailleurs qu'il est licite d'appliquer une analyse fractale à des œuvres, figuratives ou non, anciennes ou contemporaines. Il fournit même la méthode pour y déterminer la valeur de la dimension fractionnaire D, qu'il s'agisse de « courbes » ou de « poussières ». L'outil employé est le *Box-counting* ou comptage des cases, qui demande de la patience et du soin mais est d'application très générale. Il en existe d'ailleurs d'autres, telles la méthode des « boules disjointes » ou celle du « compas » (voir Gouyet, 1992 : 7-8). Je n'ai cependant trouvé nulle part une interprétation de la valeur numérique de D en termes esthétiques.

2. Le geste

Nous retiendra également le problème de la disparition du geste. Jusqu'aux époques les plus récentes, la création d'une œuvre d'art s'est toujours accompagnée d'une prestation corporelle physique. Même si un instrument prolongeait le bras et la main[3], c'était une énergie musculaire qui dirigeait le mouvement qui trace. Le cas le plus direct, le plus immédiat, était celui du modeleur travaillant la glaise. Presque partout le repentir, sans être interdit, était à éviter parce qu'aussitôt sanctionné. Dans les images de synthèse au contraire on peut à l'infini tâtonner, revenir en arrière, sans qu'il en subsiste la moindre trace. La médiatisation entre le geste et l'œuvre est devenue telle, que le rapport entre les deux est totalement modifié. La nature même des interventions est fondamentalement différente, car dans l'œuvre

[3] Instrument lui-même fruit de technologies toujours plus « révolutionnaires » : photographie, holographie, aérographie, couleurs fluo…

traditionnelle elle est strictement *locale* (un trait de crayon, une touche de pinceau, un coup de ciseau ou de gouge…) alors que dans le travail à l'ordinateur elle est toujours *globale* : modifier un paramètre d'une fractale modifie d'un seul coup la fractale toute entière.

Peut-on invoquer ici une méfiance vis-à-vis des pulsions corporelles qui animent le geste ? Le souci de contrôler les désordres de la sensibilité ? Le rejet du romantisme et de son exhibitionnisme ? Cette démarche d'instrumentalisation, de remplacement de la main par une machine, a en tout cas son pendant à d'autres époques (p.ex. chez les *Puristes* des années 20), où on recommandait, pour ces raisons, l'usage systématique de la règle, du compas et du rapporteur.

Le problème est ici de savoir si cela suffit pour exclure l'image de synthèse du domaine de l'art. Il convient d'associer à ce débat le cas de l'art dit conceptuel, où la beauté est censée se loger dans un concept abstrait plutôt que dans une œuvre matérielle physiquement construite. Dans le cadre d'une esthétique évolutive, on admettra que le beau n'est pas lui-même un concept défini de façon immuable. Il a connu et connaîtra encore de singulières mutations. C'est pourquoi nous retiendrons les images de synthèse comme pleinement artistiques, dans la mesure où leur créateur les accepte, les revendique comme siennes, et leur prête par projection ce caractère expressif qui, lui, est un trait immuable. Comme toute autre image elles témoignent, à leur façon, de son rapport symbolique au monde. Le cas n'est pas différent de celui des « pierres de lune » étudiées par Caillois (1960, 1970) : des artistes chinois recueillaient des pierres naturelles, élues pour tel ou tel aspect, *et les signaient*. Une fois adoptées, quoique non façonnées par l'artiste, elles devenaient des œuvres à part entière. La subjectivité, ici, se manifeste de façon indirecte, et un « geste intellectuel » se substitue au geste corporel.

Dans l'engendrement informatique d'une courbe fractale, et une fois choisi son type mathématique (Mandelbrot, Julia, Newton…), l'opérateur dispose de trois commandes sur lesquelles il peut jouer (à peu près) librement pour obtenir une image qui le satisfasse :

- les valeurs limites de la fenêtre des paramètres,
- le nombre d'itérations,
- la mise en couleurs.

De ces trois commandes la dernière est la plus arbitraire et la plus subjective. Elle n'engage que des choix chromatiques tout à fait classiques. Les deux premières ont ceci de particulier qu'elles ne permettent nullement d'obtenir telle image qu'on aurait en tête (comme c'est le cas pour les commandes musculaires dans les formes d'art traditionnelles). Il y a toujours un élément d'imprévu dans l'image obtenue, le programme vous « force la main », une image entière surgit, dont on peut seulement sélectionner un segment, lequel sera finalement le résultat d'un compromis entre la volonté du créateur et la forme de l'algorithme. Il est impossible de simuler *telle* montagne que l'on a en tête (par exemple, les Pyrénées), mais seulement *une* montagne acceptable mais de nulle part. On travaille par tâtonnement, c'est une mathématique expérimentale.

On voit à quel point les conditions du travail diffèrent du modèle classique.

Quel serait alors l'intérêt de ces figures de synthèse par rapport aux approximations qu'on peut en faire à main levée ? Dans la mesure où l'artiste vise à provoquer, comme le suggère Chirollet, une impression de complexité extrême, un vertige devant la possibilité illimitée de changer d'échelle sans sortir de cette complexité, la conviction quasi-mystique que tout est gouverné par les nombres, elles sont en effet plus efficaces. Par contre c'est une pétition de principe que d'affirmer « Une sélection *esthétique* s'est opérée assez spontanément en fonction de la *beauté* des images »[4] si on ne précise pas aussitôt ce qu'on entend par beauté… ce qu'on tentera de faire ci-après dans la section "Ethos". Mais d'importantes nuances doivent d'abord être formulées :

a – Il n'est pas surprenant de découvrir l'influence des nombres dans une œuvre résultant d'un algorithme lui-même constitué de nombres : on y retrouve circulairement ce qu'on y a mis.

b – Cette suprématie des nombres dans les images fractales de synthèse ne constitue pas une preuve qu'il en aille ainsi dans la nature entière. Sous sa forme pythagoricienne naïve, une telle affirmation serait de toute façon aujourd'hui triviale.

c – L'artiste qui souhaite exprimer sa conviction que la nature est chaotique ne peut le faire de façon convaincante qu'à partir d'exemples extraits figurativement de la nature et non d'une machine.

d – Dans le cadre d'une révision de la notion d'objet, impliquant d'y voir, dans une large mesure sinon totalement, une création de notre esprit à partir de nos sens, la distinction entre image de synthèse et image issue de nos impressions sensorielles s'estompe. Le réel et le virtuel tendent à se rejoindre, et ce qui vaut pour l'un vaut pour l'autre. Le créateur d'images de synthèse peut estimer jouir là d'un véritable pouvoir démiurgique en faisant apparaître, en mettant au monde, de nouveaux « objets ». Corrélativement, comme y insiste Tacussel (1989) l'image de synthèse-simulacre ne se ramène pas à un trompe-l'œil réussi : elle affirme au contraire la facticité du VOIR, son absence (totale ?[5]) d'objectivité.

---

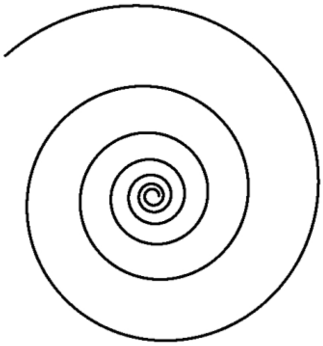
[4] Je souligne.

[5] Je me refuse cependant à adopter une position totalement constructiviste et anti-réaliste. Sans que les mécanismes en soient encore parfaitement éclaircis, il me semble que les phénomènes de sémiose ne peuvent se comprendre, complètement et dans toutes leurs variétés, qu'à partir d'une conception co-ontogénétique, c'est-à-dire d'un couplage réciproque entre le langage (ou tout autre système de signes) comme représentation et le langage comme production. Voir à ce sujet, par exemple, K. Mandoki (1997).

3. L'éthos des fractales

Dans son étude de 1994, Chirollet énumère les traits en quoi s'analyserait la beauté fractale : lyrisme, complexité microscopique, aléatoire maîtrisé, suggestion de « l'infini » et d'une « profondeur abyssale ».

Il est permis de revenir sur ce vertige devant une profondeur abyssale, que Chirollet invoque comme éthos nucléaire à l'appui des fractales. Le même pouvoir est en fait exercé, depuis longtemps et aussi puissamment, par une figure bien plus simple, non fractale mais néanmoins scalante : la spirale logarithmique[6] (fig.6).



« eadem mutata resurgo »
« simillima filia matri »

Figure 6. Spirale logarithmique ou de Bernoulli (les fractales ne sont pas les seules figures à présenter une autosimilitude)

Par un jeu à la fois mathématique et perceptif, cette spirale renvoie aux trois infinis : l'infiniment petit, l'infiniment grand et l'infiniment lointain (Edeline, 2001). D'où son emploi abondant dans la symbolique universelle.

À l'appui de la position constructiviste on soulignera ce mécanisme perceptif, inscrit dans le système neuronal de la vision (périphérique et central), par lequel les irrégularités fractales sont automatiquement gommées au profit d'une forme-enveloppe. C'est ainsi que l'on construit l'« arbre en boule » ou l'« arbre en torche » à partir d'un feuillage proprement fractal lui aussi. Boule et torche sont précisément des formes que l'arbre *n'a pas.* C'est pourquoi apprécier les images fractales implique un apprentissage de la vision.

Au chapitre de l'éthos on devrait sans doute citer l'opinion de Susan Condé (2001) pour qui l'art fractal manifeste la « lutte » dans le monde entre le hasard et l'ordre. C'est malheureusement un exemple de ces malentendus

[6] Celle qui émerveillait le mathématicien Bernouilli (1692) et dont il disait « Eadem mutata resurgo » et « simillima filia matri ».

que j'ai déplorés plus haut. En effet cette conception agonistique et spiritualiste est une pure projection. Ce que nous appelons hasard n'est que l'ignorance ou la non perception d'un ordre, et non l'inexistence d'un ordre et moins encore la reconnaissance d'un « principe de désordre » hypostasié[7]. D'ailleurs il ne s'agit pas de hasard mais de chaos *déterministe*… qui est finalement une forme d'ordre, alors que l'ordre est réduit par Condé à ce qu'il y a de plus trivial.

Dans une de ses études, Chirollet (1992) tente d'asseoir la métaphore de l'ontogénèse et le rapprochement des fractales avec le code génétique. D'une part on a un être qui croît à partir de son code génétique, basé sur l'agencement séquentiel d'unités en nombre réduit (4), et permettant la réplication des molécules de matière vivante. D'autre part on a une équation mathématiquement très simple et que l'on applique de façon « autoréférentielle » (chaque valeur repose sur la valeur précédente). Des deux côtés une étonnante variété de formes est produite. Les formes engendrées mathématiquement n'étant pas sans évoquer des formes naturelles, on en vient à attribuer au programme, à l'algorithme, le statut de « matrice génétique ». Il serait rien moins qu'une « idéalité formatrice et informatrice »… Enfin la variation scalaire « équivaudrait » aux « paliers, stades, étapes d'un développement biologique ».

Cette mise en parallèle m'apparaît tout à fait forcée et difficile à défendre car il y a au moins autant de différences que de ressemblances. Tout d'abord il ne s'agit pas d'autoréférentialité mais de récursivité[8], et à chaque itération le tracé change, alors que dans la réplication génétique les molécules restent identiques sauf erreur, c'est-à-dire mutation. Ce n'est donc pas la réplication qui engendre la multiplicité des formes : c'est la mutation, donc la non-réplication. L'itération est interminable dans les deux cas, mais elle s'effectue dans l'évolution pour le premier et dans la constance pour le second. On serait également bien en peine de préciser ce qu'il faut entendre par « idéalité informatrice ». Quant au caractère scalant il est continu et ne comporte pas de paliers au sens où de tels niveaux s'aperçoivent en biologie : ensembles de molécules, ensembles de cellules, ensembles d'organes, ensembles d'individus…

Les difficultés proviennent de ce qu'on a rabattu les uns sur les autres trois domaines distincts :

a – la récursivité des algorithmes fractals ;
b – l'auto-référentialité de certains énoncés logico-linguistiques ;
c – la réplication des chaînes d'amino-acides via le code génétique.

---

[7] Aussi mythique, faut-il le dire, que la « loi de la vexation universelle » ou la « loi de Murphy ».

[8] La simple suite des nombres entiers deviendrait autoréférentielle, puisque chaque nombre est obtenu en ajoutant 1 au précédent. Sur l'autoréférentialité, voir par exemple Hofstadter, 1985.

Il est donc sage de conclure que biologie, mathématique et esthétique restent en cette matière des champs absolument différents. Ce sont les artistes qui se sont emparés de la théorie fractale (car on ne voit guère de mathématiciens s'emparer d'un manifeste artistique…), pour des raisons que l'on peut conjecturer.

- Les fractales alimentent un réservoir inépuisable de formes visuelles ; elles augmentent de ce fait le répertoire des formes disponibles pour une élaboration esthétique.
- L'appellation violemment oxymorique de *chaos déterministe* relance et stimule les spéculations sur la nature, vis-à-vis de laquelle les artistes toujours se positionnent. En particulier elle semble apporter une issue synthétique à l'antithèse ordre / désordre, qu'une philosophie naïve, quasi biblique, voit volontiers comme deux « principes » antagonistes en lutte perpétuelle (voir Condé, 2000).

4. Archétype *vs* algorithme

Il convient enfin d'approfondir la différence entre les structures plasmatrices à l'œuvre respectivement dans l'art traditionnel et dans l'art numérique. Le premier est régi par l'*archétype*, conçu ici comme structure mentale abstraite (non réalisée mais réalisable) et virtuelle, sise à la fois dans l'imaginaire personnel et collectif. C'est une « structure organisatrice des images » (voir par exemple Durand, 1960 ; Tacussel, 1989). Le second est régi par l'*algorithme*, c'est-à-dire une procédure numérique couplée à un matériel d'exécution. Toute l'information est concentrée dans l'algorithme. Sa transcription sous forme d'un tracé visuel est déjà une métaphore, bien que notre vieille habitude de représenter une équation par une courbe tende à nous le faire oublier (Nuñez, 1997). Si l'archétype est mental l'algorithme ne l'est plus : il est parfaitement objectivé.

Un trait commun unit cependant l'archétype et l'algorithme : tous deux sont des syntaxes, c'est-à-dire qu'ils prescrivent des rapports entre des éléments discrets. En tant que « forme fournie par l'inconscient » (Tacussel, 1989) l'archétype fonctionne par analogies et associations de contiguïté, le plus généralement selon des modèles simples : couples d'opposés, parallélismes[9]. L'algorithme fractal travaille lui aussi sur des entités, puisqu'il n'est que fractures, itérées à partir d'une entité de départ (courbe de Koch, triangle de Sierpinski, poussière de Cantor… voir fig. 1). Il prescrit non seulement l'emplacement respectif des fragments mais aussi leur engendrement interminable par itération. En ce sens on devrait toujours considérer une image fractale comme une étape dans un processus infini. La fractale qu'on voit n'est jamais la fractale théorique, laquelle est une limite[10].

---

[9] Voir évidemment G. Durand (1960) sur ce sujet. On trouvera quelques archétypes formalisés dans Edeline (2000).

[10] Laquelle à son tour rencontre, en pratique et bien avant, la limite des décimales et des pixels…

Ainsi la dimension temporelle est en quelque sorte implicite et sous-entendue dans ce type d'image.

L'aspect le plus fondamental et épistémologique de ce débat est celui du statut de la syntaxe et des entités. La perception nous offre le modèle de l'information visuelle élémentaire (Edeline, 1991) : percevoir c'est segmenter un champ, et par le fait même dégager simultanément deux entités *et* leur relation spatiale (c'est-à-dire leur syntaxe). Un raisonnement analogue vaut pour les autres modalités sensorielles.

Le processus de segmentation peut se poursuivre indéfiniment, ce qui a pour effet de fragmenter toujours plus avant, de diminuer la taille des entités et de faire proliférer la syntaxe. La syntaxe prend ainsi en charge une partie de plus en plus grande du sens alors que les entités tendent à s'évanouir : les entités se résorbent peu à peu dans la syntaxe (Edeline, 2002).

Apparaît alors cette convergence étonnante que si l'archétype est un mode de segmentation grossier, préservant une répartition équilibrée du sens entre entités et syntaxe, l'algorithme fractal effectue le passage à la limite de cette segmentation, et appauvrit intégralement les entités, dont le sens se délocalise vers la syntaxe.

5. Une rhétorique du désordre

En produisant des icônes nous « manipulons » des entités formelles construites à partir des stimuli du sensible. Elles font système et ont leur autonomie. Ces manipulations se font dans deux directions opposées (comme suggéré plus haut), correspondant, dans le cas de l'art, à la recherche d'un plaisir spécifique, accompagné d'une imposition de sens.

La première voie consiste à créer une certaine lisibilité, afin de satisfaire le désir de comprendre la nature ou les spectacles artificiels. Ce souci d'intellection représente un primat endogène, à travers la proposition d'un modèle. La seconde voie, au contraire, essaie de recréer dans un spectacle artificiel une certaine « fraîcheur » fractale et traduit un primat exogène. Ce sont là deux pôles, mais il n'est pas prouvé qu'ils s'excluent dans un énoncé donné.

Une question intéressante posée par ce modèle est de savoir si les écarts présentés par les spectacles artificiels par rapport aux spectacles naturels, sont ou non de nature rhétorique. S'ils sont rhétoriques, ils représentent alors des cas particuliers de suppression-adjonction par rapport à un degré zéro qui serait constitué par le spectacle naturel. Nous aurions ainsi deux opérations rhétoriques qui seraient :

– la suppression d'hétérogénéité (adjonction d'ordre et de lisibilité),
– l'adjonction d'hétérogénéité (suppression d'ordre, augmentation de l'illisibilité).

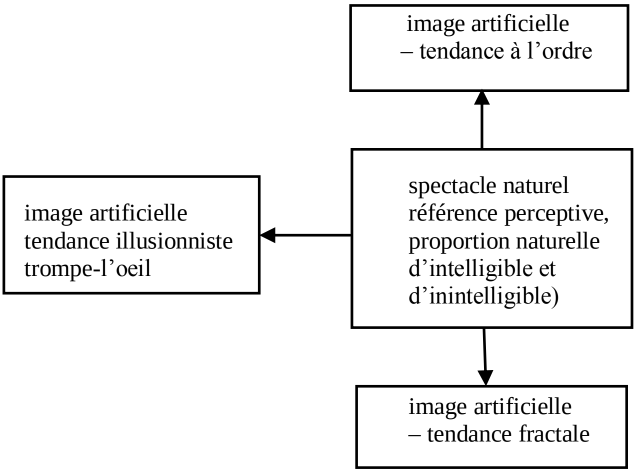


Fig. 7. Rhétorique du désordre

On peut élaborer davantage les deux tendances. Si l'on passe au plan des effets, on remarque que la tendance endogène crée un modèle euphorisant de l'univers, procure l'apaisement de la compréhension, et offre une médiation entre l'homme et le monde : c'est une tendance apollinienne. Par ailleurs, la tendance exogène, qui engendre une fraîcheur fractale, propose le spectacle d'une nouveauté absolue et irréductible, une sorte de transcendance inexhaustible, qui désarme d'emblée nos outils de compréhension et nous laisse dans un état dionysiaque[11].

L'opposition des tendances ainsi isolées est polaire, mais dans chaque œuvre les suppressions et adjonctions sont seulement partielles. Il restera donc toujours un peu d'hétérogénéité, même chez des peintres comme Piet Mondrian et, réciproquement, il subsistera de l'homogénéité chez les artistes du touffu et de l'illisible. Ceci est capital, pour la critique d'art en tout cas, car cela a pour effet de dissoudre le problème des éléments pertinents et non pertinents d'un message visuel. Il n'y a plus d'arbitraire à isoler certains traits parce qu'ils entrent dans le schéma de lecture, et à ignorer les autres parce qu'ils n'y entrent pas. Car la peinture, qui est une variation sur la perception, modifie simplement les proportions du mélange « naturel » dans un sens ou dans l'autre, c'est-à-dire qu'elle feint ou simule la toute-puissance de la perception, ou au contraire son impuissance radicale. En toute circonstance, le spectacle naturel reste la référence implicite, le degré zéro, lui qui est un mixte de traits lisibles — selon les montages de nos sens aidés par ceux de notre culture — et de traits illisibles, résistant à l'analyse et à l'interprétation. On sait les réserves qu'appelle en général le concept de degré zéro : dans le

[11] Ce mécanisme de dismutation opère aussi dans le domaine non figuratif : pensons au costume d'Arlequin d'une part et au charme du papier marbré de l'autre…

cas présent un argument fort en faveur de son existence est le fait que l'acceptabilité d'une fractale comme relief montagneux (ou nuage etc.) est toujours décidée visuellement et de façon subjective. Chez les peintres, à partir du même donné (un arbre), Friedrich reste neutre et observe strictement la nature sans l'interpréter, alors que Bresdin augmente délibérément la fragmentation et que Cézanne ou Braque la diminuent.

Ordre et hétérogénéité sont comme le fond l'un de l'autre, fond indispensable sur lequel l'un ou l'autre se détache et peut être perçu, respectant le caractère contrastuel de toute perception.

Un tel modèle rend compte du plaisir apporté par les écarts, dans l'un ou l'autre sens, par rapport au degré zéro naturel : il s'agit bien dans les deux cas d'une « caresse des neurones ». Il laisse cependant intact le problème de la soi-disant beauté de la nature, comme de ses fac-similés aussi bien manuels qu'informatiques. Cette beauté-là est d'une autre sorte, et semble ne pouvoir s'expliquer que dans le cadre d'une théorie évolutionniste et adaptative de la perception et de la cognition : les mécanismes de perception et de décodage se seraient établis, au cours de l'évolution des espèces, en liaison avec l'univers qui les entoure et en raison de leur valeur de survie.

Le cerveau possède un système de discrimination étonnamment précis pour évaluer la vraisemblance d'un littoral, d'un nuage, d'un relief montagneux synthétique. On peut supposer qu'il a acquis cette expertise par la longue fréquentation d'accidents naturels qui, bien que d'une complexité irréductible à des figures simples (contrairement à ce que pensait Cézanne), est néanmoins fidèlement enregistrée et mémorisée. Je suis prêt à parier qu'un Ecossais a une meilleure appréciation des fractales qu'un Flamand, dont le littoral est rectiligne, et dont l'horizon est une ligne droite.

6. Conclusions

On doit donc distinguer finalement plusieurs catégories de fractales. Certaines peuvent être qualifiées de scientifiques, d'autres non.

1. *Les fractales qu'on pourrait appeler « d'origine », celles qui sont obtenues dans l'étude de la dimension en géométrie.* Exemple : le « cactus » ou « bonhomme » de Mandelbrot, les ensembles de Julia et Fatou. Elles sont scientifiques.
2. *Les fractales engendrées dans le but de simuler par tâtonnements l'impression produite par divers spectacles naturels réputés complexes,* tels que nuages, fougères, éponges, littoraux, reliefs montagneux… Elles n'ont rien de scientifique car elles ne mènent pas à la compréhension de cette complexité. Aucune connaissance n'est acquise par elles.
3. *Les fractales qui parviennent à reconstituer une structure complexe naturelle à partir des processus physiques sous-jacents.* Par exemple, les phénomènes de percolation dans un milieu poreux, d'agrégation par floculation… Elles ont un caractère hautement scientifique. Certains processus (comme la formation des chaînes de montagnes) résistent encore à cette approche bien qu'on sache qu'un profil montagneux doit

découler d'une théorie adéquate des fractures, encore inexistante. À terme on peut espérer que la catégorie (2) se résorbera dans la catégorie (3).

4. *Les fractales produites gratuitement, à des fins purement esthétiques, et enjolivées par des jeux de couleurs ou des sélections de zones.* Sans la moindre valeur scientifique, elles ont la vertu de stimuler les imaginations et peut-être, plus fondamentalement, de produire une « vacance de l'intellect », une « démission rationnelle », et par là une « régression magmatique » s'apparentant à une cure psychologique, comme tests de projection.

Bibliographie

Didier Anzieu, Catherine Chabert, *Les méthodes projectives*, Paris, P.U.F., Quadrige, 1961.

Michael Barnsley, *Fractals Everywhere*, San Diego, Academic Press, 1988.

Roger Caillois, *Méduse et Cie*, Paris, Gallimard, 1960.

Roger Caillois, *L'écriture des pierres,* Genève, Paris, Skira, Flammarion, 1970.

Jean-Claude Chirollet, « Images fractales. Bio-génétique des images en restructuration continue », *Les figures de la forme,* Etudes réunies par Jean Gayon & Jean-Jacques Wunenburger, Paris, L'Harmattan, 1992, pp. 283-295.

Jean-Claude Chirollet, *Esthétique et technoscience,* Liège, Mardaga, 1994a.

Jean-Claude Chirollet, « Littérature et théorie du chaos », *TLE (Théorie, Littérature, Enseignement),* 12, 1994b, pp. 115-140.

Susan Condé, *La Fractalité dans l'art contemporain*, Paris, La Différence, 2001.

Gilbert Durand, *Les structures anthopologiques de l'imaginaire,* Paris, Bordas, 1960.

Francis Edeline, « Sur la connaissance visuelle », *TLE (Théorie, Littérature, Enseignement),* 9, 1991, pp. 97-112.

Francis Edeline, « The cognitive value of visual signs », *Université de Copenhague,* 2000.

Francis Edeline, « La espiral : un simbolo visual universal », *Un año de disenarte* MM1, 3, 2001, pp. 9-29.

Francis Edeline, « La syntaxe visuelle », *VISIO*, vol. 9, 1-2, 2004, pp. 303-317.

Roland Fivaz, *L'Ordre et la volupté - Essai sur la dynamique esthétique dans les arts et dans les sciences,* Lausanne, Presses Polytechniques Romandes, 1989.

Jean-François Gouyet, *Physique et structures fractales*, Paris, Masson, 1992.

Gilles-Gaston Granger, *L'Irrationnel*, Paris, Odile Jacob, 1998.

Douglas R. Hofstadter, *Metamagical themas: Questing for the Essence of Mind and* Pattern, New York, Basic Books, 1985.

Giorgio Israël, *La Mathématisation du réel (essai sur la modélisation mathématique),* Paris, Seuil, 1996.

Benoît B. Mandelbrot, « Scalebound or scaling shapes: a useful distinction in the visual arts and in the natural sciences », *Leonardo,* 14, 1981, pp. 45-47.

Benoît B. Mandelbrot, « Les fractales, les monstres et la beauté », *Le Débat*, 24, 1983, pp. 54-72.

Katya Mandoki, « Estetica y semiosis de los fractales », *FACE* 2 (Brésil), 1999, pp. 175-185.

Katya Mandoki, « The Dual Constitutive-Representational Nature of Semiosis. *Dominios, modelos y miradas desde el cruce de la naturaleza y la cultura,* Etudes réunies par Adriàn Ginate-Welsh, Benemérita Universidad de Puebla, Asociación Mexicana de Estudios Semioticos, Miguel Angel Porrà, 2000, pp. 641-648.

George A. Miller, « The magical number seven, plus or minus two : some limits on our capacity for processing information » *The Psychological Review,* tome 63, 2, pp. 81-97, 1956.

Marguerite Neveux, *Le Nombre d'or*, Paris, Seuil, coll. Points Sciences, 1995.

Rafael Nuñez, « Conceptual Metaphor and Embodiment : What Makes Mathematics Possible ? », *Métaphore et Analogie dans l'histoire et la Philosophie des Sciences*, Etudes réunies par Fernand Hallyn, Gand, Département de Français, 1997.

Bernard Sapoval, *Universalités et fractales - jeux d'enfant ou délits d'initié ?* Nouv. Bibliothèque Scientifique, Flammarion, 1997.

Patrick Tacussel, « De l'imaginaire numérique à la dimension esthétique et cognitive de l'imaginaire social », *Cahiers de l'imaginaire*, 3, 1989, pp. 95-108.

Remarques sur l'expression de la généralité en mathématiques

Alain HERREMAN[1]
Université Rennes 1 – CNRS
alain.herreman@univ-rennes1.fr

Résumé

Cet article s'attache à dégager sur quelques exemples les conditions de possibilité de l'expression de la généralité en mathématiques. Au cours du XX^e^ siècle les mathématiciens on pu énoncer des théorèmes portant sur la totalité des théorèmes (théorèmes d'incomplétude de Gödel, etc.). L'introduction du théorème de Löwenheim-Skolem nous donnera l'occasion de saisir la mise en place des conditions de tels énoncés généraux. Avec les *Disquisitiones arithmeticae* nous verrons au contraire comment l'impossibilité d'utiliser le mode de représentation qui lui était familier conduisit Gauss à recourir à des ensembles.

Introduction

> On dit qu'à force d'ascèse certains bouddhistes parviennent à voir tout un paysage dans une fève. C'est ce qu'auraient bien voulu les premiers analystes du récit : voir tous les récits du monde (il y en a tant et tant eu) dans une seule structure.

On comprend à partir de ces deux premières phrases de *S/Z* que Roland Barthes n'était pas de ceux qui croient qu'il est possible de voir tout un paysage dans une fève. Il ne nous dit pas si la fève fait partie du paysage ou si une même fève permet de voir tous les paysages. La fève du moine

[1] Les recherches présentées dans ce texte n'ont bénéficié d'aucun financement par l'Agence Nationale de la Recherche. Elles ont pu être menées sur de longues années grâce au statut de maître de conférences à l'université de Rennes 1 et, pour une moindre part, à une délégation d'un an au CNRS durant l'année 2009-2010. Elles ont été présentées au colloque « Visualisation et mathématisation » organisé par l'équipe de sémiotique de l'Université de Liège, les 3 et 4 décembre 2009.

Bouddhiste illustre le pouvoir des représentations qui rendent présent, visible et rassemblent ce qui est autrement absent, invisible et dispersé. Mais son usage effectif est douteux et requiert sans doute une longue ascèse... Elle n'est guère susceptible d'être partagée ou transmise. C'est néanmoins le pouvoir de telles représentations que nous voulons considérer ici à partir du cas des mathématiques.

Nombre d'énoncés mathématiques sont à bien des égards remarquables en raison notamment de leur *généralité*. Un énoncé aussi simple que « toute figure rectiligne peut être transformée en un carré de même aire » (paraphrase de *Euclide* II-14) est un énoncé typique, à la fois commun en mathématiques et sans équivalent ailleurs. Sa généralité est bien différente par exemple de celle d'un énoncé comme « tous les hommes sont mortels ». Celui-ci renvoie à une induction fondée sur le constat selon lequel jusqu'à présent tous les hommes ont bien dû être mortels, celui-là sur une démonstration. Mais si leur différence ressort des justifications qui peuvent être données de chacun, celles-ci ne créent pas tant cette différence qu'elles ne déploient autrement les caractéristiques de chaque énoncé.

Nous nous proposons dans ce qui suit de dégager une condition qui rend compte de la généralité d'une large variété d'énoncés mathématiques.

I. L'expression de la généralité et le théorème de Löwenheim-Skolem

Le théorème de Löwenheim-Skolem est un exemple de ces énoncés que l'on reconnaît comme étant mathématiques. En voici un énoncé :

Si une théorie du premier ordre ayant un nombre au plus dénombrable d'axiomes admet un modèle, alors elle admet un modèle dénombrable.

C'est en tant que tel qu'il nous intéresse ici : un énoncé à la fois d'une généralité étonnante et tout à fait habituelle en mathématiques. Celui-ci porte sur *toutes* les théories (du premier ordre), d'autres portent sur *tous* les nombres, sur *toutes* les fonctions, etc. Les mathématiques ont donc une notion, ici, de *théorie* qui est telle qu'il soit possible de formuler à leur propos des énoncés généraux, mais aussi de les démontrer et en plus de les appliquer à la théorie des nombres entiers, à la théorie des nombres réels, à la théorie des groupes, à la théorie des ensembles etc. C'est une condition assez générale de la possibilité de ces énoncés que nous voulons dégager. Celle-ci une fois repérée, il sera ensuite facile de voir qu'elle est indépendante de l'énoncé choisi, et en particulier de son appartenance à la logique. Cette condition peut être dégagée aussi bien à partir des diverses démonstrations qui ont été données du théorème que de ses applications. Pour éviter les difficultés auxquelles conduirait l'analyse d'une de ces démonstrations, nous dégagerons cette condition à partir d'une des principales applications de ce théorème, ce qui sera l'occasion de rappeler le « paradoxe de Skolem » et de revenir sur son interprétation.

Le théorème de Löwenheim-Skolem

Le théorème de Löwenheim-Skolem s'applique à une théorie comme celle de la théorie des nombres réels ou même de la théorie des ensembles. Il suppose que celle-ci admet un modèle ce qui est *a priori* le cas puisque la théorie aura généralement été développée parce que l'on en a un modèle, au moins intuitif. Il n'est en général pas dénombrable, c'est-à-dire qu'il contient plus d'éléments qu'il n'y a de nombres entiers[2]. Ainsi, puisqu'il y a plus de nombres réels que d'entiers, notre modèle des nombres réels ne sera pas dénombrable. *A fortiori*, un modèle de la théorie des ensembles, qui doit contenir tous les nombres réels, ne sera pas non plus dénombrable. Et pourtant, la conclusion du théorème est qu'*il existe alors un modèle dénombrable de cette théorie*, c'est-à-dire qu'il est possible d'interpréter la théorie de telle sorte qu'il n'y ait pas à considérer plus qu'un nombre dénombrable d'entités. Skolem précisera ce résultat et démontrera que les nombres entiers eux-mêmes peuvent servir d'interprétation, c'est-à-dire que l'on peut remplacer tous les objets mathématiques (nombres réels, fonctions, ensembles, etc.) par des nombres entiers. Un tel énoncé est concevable, énonçable, démontrable et, on le voit, applicable.

Ce théorème a été énoncé et démontré pour la première fois par Löwenheim dans un article publié en 1915 (« Über Möglichkeiten im Relativkalkül », *Mathematische Annalen* 76, 447-470). Löwenheim utilisait le formalisme logique développé par Schröder dans son *Algebra der Logik* (1890-1905). Sa démonstration fait intervenir des développements en sommes de produits de formules, au moyen d'indices d'indices, assortis d'un jeu de recodage assez obscur. En 1920, Skolem généralise le théorème et en donne une nouvelle démonstration, toujours dans la logique algébrique, mais en remplaçant les développements des produits de Löwenheim par des opérations ensemblistes introduites par Dedekind (*Was sind und was sollen* die *Zahlen?*, Braunschweig, 1888) et en recourant à l'axiome du choix. Deux ans plus tard il publie un autre article avec une démonstration simplifiée et ne recourant pas à l'axiome du choix. C'est là qu'il propose l'application que nous voulons considérer et qu'il expose son paradoxe.

Cet article, publié en 1922, est un texte éminemment rhétorique. Son propos est de convaincre les mathématiciens que les mathématiques ne sauraient être fondées sur la théorie des ensembles comme ils semblent généralement enclins à le croire. En effet, le développement de la théorie des ensembles au cours de la seconde moitié du 19ème siècle s'est aussi accompagné de la découverte d'antinomies. Henri Poincaré pouvait ainsi s'exclamer en 1906 : « *la logique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie* »[3]. En 1908, Ernst Zermelo, un élève de David Hilbert, proposa un système d'axiomes *ad hoc* visant à garantir les principales opérations ensemblistes assorties de quelques restrictions pour empêcher la reproduction

[2] i.e. qu'il n'y a pas de bijection entre les éléments du modèle et l'ensemble des entiers naturels.

[3] Poincaré, Henri, « Les mathématiques et la logique », *Revue de Métaphysique et de Morale* 14, 1906, 316 reproduit *in* Heinzmann, Gerhard, *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité*. Paris, Blanchard, 1986, 103,

des antinomies connues. Cette démarche fut semble-t-il couronnée de succès puisqu'en 1922 Skolem constate que les mathématiciens sont devenus nombreux à souscrire à l'idée que la théorie des ensembles offre un fondement satisfaisant des mathématiques. Son article est intégralement consacré à réfuter cette idée au moyen de cinq arguments. Le « paradoxe de Skolem » est l'un d'eux, et c'est pour pouvoir appliquer le théorème de Löwenheim dans ce cadre rhétorique particulier qu'il en donne une deuxième démonstration. L'intérêt de cet argument sur les quatre autres est de viser directement le système d'axiomes de Zermelo. Présentons donc ce paradoxe et l'argument associé. L'application du théorème, sous la forme généralisée par Skolem, aux axiomes de Zermelo établit l'existence d'un modèle dénombrable de toutes les mathématiques. Dans ce modèle, l'ensemble des nombres réels serait dénombrable. Un des premiers théorèmes établis par Cantor, à partir duquel peut se déployer la hiérarchie des cardinaux transfinis, démontre pourtant le contraire. Il s'agit bien seulement d'un paradoxe et non d'une contradiction. En effet, la propriété « être dénombrable » signifie ici qu'il existe une application bijective entre l'ensemble considéré, par exemple celui des nombres réels et l'ensemble des nombres entiers. Pour qu'il y ait une contradiction il faudrait encore que cette application, conçue comme un ensemble, fasse elle-même partie du modèle. Ce n'est en tout cas pas le cas de celle construite par la démonstration du théorème. Autrement dit, de l' « intérieur » du modèle on « ne voit pas » que l'ensemble des nombres réels du modèle est dénombrable, pas plus d'ailleurs qu'on ne voit que le modèle est lui-même dénombrable (il ne peut pas exister d'application *dans* le modèle ayant comme ensemble de départ ou d'arrivée le modèle lui-même). Ni de l' « intérieur », ni non plus de l' « extérieur », il n'y a de contradiction. Skolem ne fait pas passer ce paradoxe, qu'il présente comme tel et qu'il explique parfaitement, pour une contradiction. Son argument est rhétorique, mais pas sophistique! L'argument qu'il en tire contre l'idée que les axiomes de Zermelo fonderaient les mathématiques consiste à observer que *toutes les notions mathématiques deviendraient de ce fait relatives* ; car si l'on accepte cette hypothèse, il existe un *deuxième* modèle des mathématiques et même bien d'autres (seule la pluralité importe pour l'argument, et non plus la cardinalité du modèle). Plus aucun objet mathématique n'a de référence *unique,* toutes les mathématiques deviennent plurivoques. Il serait dès lors établi, avec la certitude d'un théorème, que les mathématiciens ne savent pas de quoi ils parlent, qu'ils ne parlent pas nécessairement de la même chose, et que le savoir n'y change rien. En appliquant son théorème aux axiomes de Zermelo, Skolem peut établir qu'accepter ces axiomes comme fondement des mathématiques conduit à une indétermination des objets et des énoncés mathématiques. Il s'agit donc d'un raisonnement par l'absurde, l'absurdité de la conclusion (la relativité), devant conduire à rejeter la prémisse (l'adoption des axiomes de Zermelo comme fondement des mathématiques). Skolem peut dès lors conclure :

> Le principal résultat obtenu ci-dessus est la relativité des notions ensemblistes [*All. : Mengenbegriffe*]. Je l'ai déjà communiqué durant l'hiver 1915-1916 à Göttingen à Mr le Prof. F. Bernstein lors d'une discussion orale. Il y a deux raisons pour lesquelles je ne l'ai pas publié plus tôt : la première est que j'ai été pris entre-temps par d'autres problèmes, la seconde est que je croyais qu'il était suffisamment clair que cette axiomatique ensembliste [*All. : Mengenaxiomatik*] ne pouvait constituer de manière satisfaisante le fondement ultime des mathématiques et que la plupart des mathématiciens ne s'en soucieraient guère. Mais j'ai été surpris de constater ces derniers temps que de très nombreux mathématiciens considéraient ces axiomes de la théorie des ensembles comme le fondement idéal des mathématiques ; il m'a semblé alors qu'il était temps d'en publier une critique. Skolem 1922, 232.

L'application à la théorie des ensembles

Un tel usage rhétorique d'un théorème est bien sûr remarquable comme est remarquable cette démonstration de l'*illusion référentielle* en mathématiques, et la certitude de Skolem qu'elle amènera les mathématiciens à renoncer à leurs idées sur la théorie des ensembles. En dépit des enjeux sémiotiques évidents de ces considérations, c'est une autre direction sémiotique que nous voulons suivre pour découvrir à partir de l'application de ce théorème une condition d'un tel énoncé. C'est cette condition que nous allons maintenant mettre en évidence.

Cette condition transparaît déjà au travers d'une critique de Skolem à l'encontre de la manière dont Zermelo a formulé l'un de ses axiomes :

> Un point très insatisfaisant dans Zermelo est la notion de « proposition définie». Probablement personne ne pourra trouver satisfaisantes les explications données par Zermelo à ce propos. Pour autant que je sache, personne n'a cherché à formuler correctement cette notion, ce qui est très étonnant car cela est très facile à faire et peut, de plus, être fait d'une manière tout à fait naturelle qui se présente d'elle-même. Afin d'expliquer cela - et compte-tenu des considérations précédentes - je mentionne ici les 5 opérations fondamentales de la logique mathématique, pour lesquelles j'utilise les notations de E. Schröder (*Algebra der Logik*). Skolem 1922

Skolem reproche ici à Zermelo de ne pas avoir défini correctement la notion de « proposition », de s'être contenté d'explications insatisfaisantes. Il oppose qu'il est pourtant facile d'y remédier, tout en notant que cette solution n'a été à sa connaissance reconnue ni par Zermelo, ni par d'autres mathématiciens depuis la publication de ces axiomes. Considérons plus précisément ces axiomes et en particulier celui incriminé pour comprendre à la fois la critique et la solution de Skolem.

Le système de Zermelo comprend sept axiomes : l'axiome d'extensionalité, l'axiome des ensembles élémentaires, l'axiome de séparation, l'axiome de l'ensemble des parties, l'axiome de la réunion, l'axiome du choix et l'axiome de l'infini. La critique porte sur l'axiome de séparation :

> Si l'énoncé ouvert $\mathcal{E}$ est bien défini pour tous les éléments d'un ensemble *M*, *M* a toujours un sous-ensemble $M_{\mathcal{E}}$ qui contient tous les éléments *x* de *M* pour lesquels $\mathcal{E}(x)$ est vraie, et ceux-là seulement » (Zermelo 1908, trad. 373).

Cet axiome affirme qu'étant donné un ensemble, par exemple celui des nombres entiers, et une proposition, par exemple « être un nombre impair », il existe alors un ensemble constitué des nombres entiers impairs. Il s'agit par ce moyen de ne recevoir que des sous-ensembles d'ensembles déjà formés afin d'éviter la formation d'un ensemble comme l'ensemble de tous les ensembles qui conduit à des antinomies. Avec cet axiome, on ne peut tout au plus que définir l'ensemble de tous les *sous*-ensembles d'un ensemble, c'est-à-dire l'ensemble de ses parties. Skolem reproche donc à Zermelo de ne pas préciser ce que sont ces « énoncés bien définis » auxquels cet axiome se rapporte. Il serait en effet assez peu satisfaisant de fonder les mathématiques sur un système comprenant un axiome qui implique la notion de « proposition définie » sans la caractériser d'aucune manière. Mais il paraît inversement exorbitant de demander une telle caractérisation qui revient ni plus ni moins à une description de tous les énoncés mathématiques passés, présents et à venir. Pourtant, sans cela, ces axiomes ne sauraient prétendre servir de fondement aux mathématiques. Si la caractérisation est trop étroite, se satisfaisant de conditions suffisantes, des ensembles admis par les mathématiciens seraient exclus. Si elle est trop large, se satisfaisant de conditions nécessaires, des ensembles exclus par les mathématiciens seraient admis. Il faut ici une représentation exacte de toutes les propositions mathématiques. Formuler et satisfaire une telle exigence n'apparaît possible qu'en mathématiques. Déterminer les conditions qui y répondent doit nécessairement nous conduire à des conditions qui rendent compte de certaines particularités des énoncés mathématiques. Voici donc la « formulation correcte » qui manquait à Zermelo et que Skolem est en mesure de proposer :

> *Par une proposition définie nous pouvons maintenant entendre une expression finie construite à partir de propositions élémentaires de la forme aεb ou a = b au moyen des 5 opérations mentionnées* [conjonction, disjonction, négation, quantifications universelle et existentielle]. C'est une notion parfaitement claire et suffisamment générale pour permettre de mener toutes les démonstrations habituelles de théorie des ensembles. J'adopte par conséquent ce point de vue » Skolem 1922.

Skolem affirme donc qu'avec les cinq opérations proposées il est possible d'écrire *tous* les énoncés mathématiques. Avec des notations un peu différentes des siennes, différence sans importance pour notre propos, cela revient à dire que tous les énoncés mathématiques sont du type :

$\forall x \forall y (\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x=y)$;

$\forall x \forall y \exists z\ (z \in x \wedge y \in z)$;

$\exists x\ (0 \in x \wedge \forall y \in x (x \cup \{x\} \in x))$;

$\forall x \exists y \forall z (z \subset x \rightarrow z \in y)$

Et la réciproque doit aussi être vraie pour que les axiomes puissent remplir leur fonction : toutes les propositions que l'on peut écrire de la sorte doivent être des propositions mathématiques bien définies.

Cette critique adressée à la formulation des axiomes par Zermelo permet à Skolem d'introduire dans ceux-ci une autre représentation des propositions mathématiques. Le recours à cette représentation est aussi la condition pour *appliquer* le théorème de Löwenheim-Skolem à ces axiomes, c'est-à-dire la condition que nous voulions découvrir. En effet, il faut pour appliquer le théorème réécrire ces axiomes comme des «équations» ou des « formules » du type de celles qui interviennent dans ses hypothèses, et qui sont aussi celles qui en permettent la démonstration. Cela doit d'ailleurs être fait pour *chacun* des sept axiomes et non seulement pour l'axiome de séparation. Les formules que nous avons données correspondent respectivement aux axiomes d'extensionalité, de la paire (un des ensembles élémentaires), de l'infini et des parties. L'axiome de séparation visé par la critique de Skolem se distingue néanmoins bien des autres puisqu'il implique la *totalité* des énoncés mathématiques. Sa réécriture ne requiert donc pas seulement comme les six autres que l'on sache mettre sous cette forme *un* énoncé mathématique donné mais que l'on sache effectivement le faire pour *tous* les énoncés mathématiques. L'axiome ne va pas être remplacé par un seul axiome, mais par une liste d'axiomes avec *un axiome pour chaque énoncé mathématique*, c'est-à-dire en écrivant la formule suivante pour chaque énoncé mathématique φ, φ devant être effectivement écrit dans la représentation considérée pour que l'axiome puisse lui-même être écrit :

$$\forall z \forall w_1,\dots,w_n \exists_y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi)$$

Ainsi, l'application du théorème de Löwenheim-Skolem se fait sous la condition *de disposer d'une représentation de toutes les formules mathématiques*. Cette représentation est la fève dans laquelle tous les énoncés mathématiques peuvent être vus. *Sans elle, le théorème de Löwenheim-Skolem ne pourrait être appliqué aux « axiomes de Zermelo ».* Avec elle les sept axiomes sont transformés en une liste infinie (dénombrable) d'axiomes, à laquelle le théorème de Löwenheim s'applique comme l'a démontré Skolem dans son article précédent.

Les notions de thèse et d'énoncé inaugural

L'étude de l'application du théorème de Löwenheim-Skolem aux axiomes de la théorie des ensembles a permis de mettre en évidence l'émergence d'une conviction d'un caractère particulier consistant à considérer que l'on dispose d'*une représentation de toutes les propositions mathématiques*. Nous proposons d'appeler une telle conviction une *thèse* et un *énoncé inaugural* l'énoncé qui énonce une thèse. Cette thèse particulière est la *thèse de Frege-Peirce-Schröder-Whitehead-Russell*, ou plus brièvement la *thèse de Russell*. Le terme de *thèse* a été introduit par Kleene pour désigner la *thèse de Church-Turing* qui affirme que *tous les algorithmes* peuvent être représentés par des machines de Turing (resp. fonctions générales récursives, fonctions lambda-définissables, etc.). C'est le même type d'assertion pour les algorithmes au lieu des propositions. Il existe de nombreuses autres thèses comme celles-ci, comme la thèse de Fourier qui propose une représentation de toutes les fonctions par des séries trigonométriques. Dans *La Géométrie* Descartes introduit aussi la thèse selon laquelle toutes les courbes géométriques peuvent être représentées par des équations algébriques. Une autre thèse consiste à considérer que l'on dispose d'une représentation de toutes les démonstrations, thèse que l'on peut appeler *thèse de Frege-Whitehead-Russell*, et que, pour simplifier, nous inclurons ici dans la thèse de Russell (bien qu'il importe par ailleurs de les distinguer). Ces exemples établissent que la logique n'a ici aucun statut particulier et que ce qui a été dégagé à propos de la représentation des propositions mathématiques vaut de la même manière pour les courbes géométriques, les fonctions, les algorithmes, etc. La similarité de ces diverses thèses n'est pas un fait logique, mais un fait sémiotique[4]. Elle n'atteste pas du caractère logique du développement des mathématiques, mais au contraire d'enjeux proprement sémiotiques.

Chacune des représentations associées à ces thèses est comme une fève qui permet aux mathématiciens de considérer de manière *simultanée* et *uniforme* la *totalité* des propositions mathématiques, des courbes géométriques, des algorithmes, etc. On peut entrevoir que quand on dispose de telles représentations il devient possible de produire des énoncés remarquables, démontrables et applicables. La comparaison avec la fève invite à considérer ces représentations comme des images et à les analyser comme telles. Nous proposons de dégager quelques-unes des caractéristiques des thèses qui nous semblent intéressantes en elles-mêmes et susceptibles de servir, au moins à titre de comparaison, pour une analyse de la visualisation en mathématiques. Nous le ferons en nous en tenant principalement à la thèse de Russell pour ne pas multiplier les références mathématiques et historiques, mais la plupart des remarques que nous ferons sont valables pour les autres thèses. Quelques remarques propres à la logique pourront aussi être faites qui peuvent avoir un intérêt sémiotique.

Une thèse est introduite par un *énoncé inaugural*. L'énoncé inaugural de la thèse de Russell a bien été énoncé par Russell :

> La mathématique pure est la classe de toutes les propositions de la forme "*p* implique *q*", où *p* et *q* sont des propositions contenant une ou plusieurs variables, les mêmes dans les deux propositions, et où ni *p* ni *q* ne contiennent d'autres constantes que des constantes logiques. Et les constantes logiques sont toutes ces notions qui peuvent être définies au moyen de l'implication, de la relation d'un terme à une classe dont il est membre, de la notion de *tel que*, de la notion de relation, et de toutes les autres notions que peut impliquer celle, générale, de proposition de cette forme." *Principa Mathematica*, trad.

[4] Nous reprenons ici quelques résultats d'une étude à paraître consacrée aux textes et aux énoncés inauguraux.

> Russell, Bertrand & Roy, Jean-Michel (avant-propos, traduction), *Ecrits de logique philosophique*. Paris, PUF, 1989, p. 21

Ou encore :

> Au moyen de dix principes de déduction et de dix autres prémisses de nature générale (par exemple, "l'implication est une relation") la totalité de la mathématique peut être rigoureusement et formellement déduite. Et toutes les idées qui figurent en elle peuvent être définies au moyen de celles qui figurent dans ces vingt prémisses. Et ici par mathématique il faut entendre non seulement l'arithmétique et l'analyse, mais aussi la géométrie, euclidienne et non euclidienne, la dynamique rationnelle, et un nombre indéfini d'autres disciplines qui n'ont pas encore vu le jour qui sont dans leur enfance. Le fait que la mathématique n'est dans sa totalité rien qu'autre que la logique symbolique, est une des grandes découvertes de notre temps. Et une fois que cela a été établi, les reste des principes de la mathématique se réduit à l'analyse de la logique symbolique elle-même. *Principia Mathematica*, trad. fr p. 23

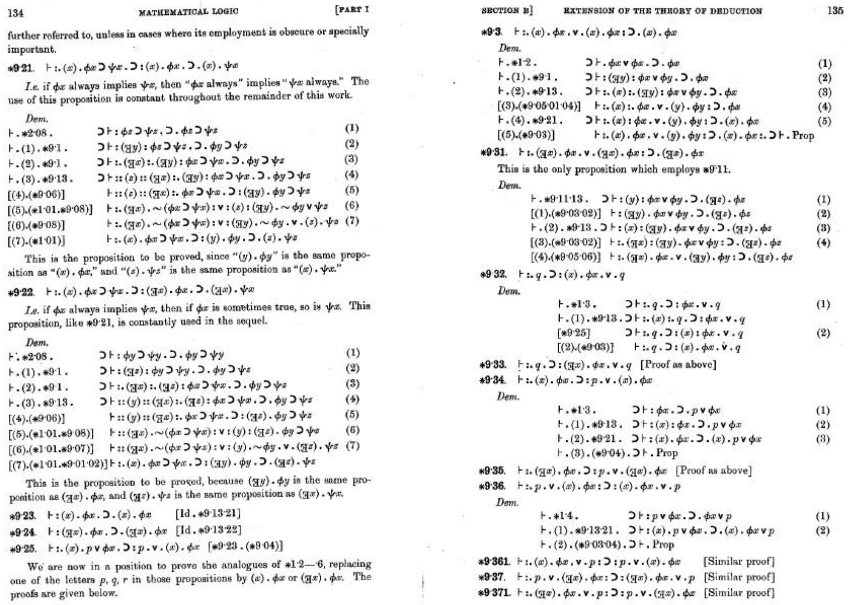
Bien que récurrent, ce type d'énoncé échappe aux typologies logiques ou épistémologiques classiques : axiomes, définitions, théorèmes, hypothèses, lois, etc. Il participe de chacune de ces catégories mais ne correspond à aucune exactement. C'est néanmoins un type d'énoncé caractéristique qui accompagne l'introduction de certaines représentations. Cela ressort des termes employés par Skolem. Il reproche à Zermelo des « explications » peu satisfaisantes, demande une « formulation correcte de cette notion » et introduit la représentation qu'il en propose (reprenant celle introduite par Schröder) sous la forme d'un énoncé qui peut être pris pour une définition mais qui a besoin d'être et qui est bien une thèse. Ainsi sa critique peut sembler dénoncer l'absence d'une définition, mais c'est d'un énoncé inaugural dont il a besoin et c'est bien un tel énoncé qu'il introduit sous l'apparence d'une définition. De même, l'énoncé inaugural pourrait être réfuté, mais il ne peut évidemment pas être démontré. Au contraire, il est comme on l'a vu d'une certaine manière une porte d'entrée qui ouvre sur la possibilité de formuler et de démontrer des énoncés mathématiques. Il marque un moment sémiotique fondateur où une représentation mathématique est introduite. Sa caractéristique est d'affirmer la *conformité* de la représentation proposée avec toutes les instances (considérées comme) intuitives d'une notion. Son énoncé affirme que les entités intuitives considérées sont exactement, terme à terme, représentées par la représentation proposée : toute expression de la représentation a un contenu intuitif et toutes les caractéristiques du contenu intuitif peuvent être exprimées de la sorte. C'est donc un énoncé sur la nature de la représentation introduite et ses caractéristiques sémiotiques, avec en particulier la position explicite de *référents*, nullement tenus pour illusoires, de *signifiants*, avec affirmation de leur *conformité*. Les textes qui introduisent de tels énoncés développent un *réalisme* qui pourrait sembler étonnant en mathématiques mais qui est bien attesté et récurrent. Russell peut ainsi déclarer : « *Logic is concerned with the real world just as truly as zoology* »[5]. On peut citer Joseph Fourier pour montrer que ce réalisme n'est propre ni à Russell, ni à la thèse de Russell et qu'il se retrouve aussi bien par exemple à propos des séries trigonométriques près d'un siècle auparavant :

> L'analyse mathématique a donc des rapports nécessaires avec les phénomènes sensibles ; son objet n'est point créé par l'intelligence de l'homme, il est un élément préexistant de l'ordre universel, et n'a rien de contingent et de fortuit ; il est empreint dans toute la nature. (...) on ne pourrait apporter aucun changement dans la forme de nos solutions, sans leur faire perdre leur caractère essentiel, qui est de représenter les phénomènes. Fourier, Joseph, *Théorie de la chaleur* (2[e] éd.), F. Didot, père et fils, Paris : 1822, p. 17

Il importe, tant pour l'étude des thèses que pour l'étude des conditions de possibilité des énoncés généraux en mathématiques que nous considérons ici de distinguer le moment fondateur, celui où la thèse est énoncée pour la première fois, de la reprise qui pourra ensuite être faite de la représentation que l'énoncé inaugural a servi à introduire et de ses conséquences. La thèse a en effet d'abord besoin d'être soutenue. Les trois épais volumes des *Principia Mathematica* de Whitehead & Russell sont ainsi largement consacrés à soutenir leur thèse, c'est-à-dire à reproduire, pas à pas, une à une, toutes les propositions mathématiques et leur démonstration. Cela donne lieu à un type de texte particulier, les *textes inauguraux*. Indépendamment des démonstrations reproduites, les *Principia* sont surtout eux-mêmes la preuve de ce qu'ils défendent. Ils doivent être *figuratifs* pour montrer qu'ils peuvent reproduire exactement, sans manques ni ajouts, ce qu'ils représentent. Ainsi, attestent-ils qu'il est *effectivement* possible d'écrire toutes les mathématiques, comme nous l'avons fait nous-mêmes pour quelques-uns des axiomes de Zermelo.

---

[5] Russell, Bertrand, *Introduction to mathematical philosophy*. London, New York : Allen and Unwin, Macmilan, 1919, 169.


134 MATHEMATICAL LOGIC [PART I

further referred to, unless in cases where its employment is obscure or specially important.

*9·21. ⊢ :. (x) . φx ⊃ ψx . ⊃ : (x) . φx . ⊃ . (x) . ψx

I.e. if φx always implies ψx, then "φx always" implies "ψx always." The use of this proposition is constant throughout the remainder of this work.

Dem.

⊢ . *2·08 . ⊃ ⊢ : φz ⊃ ψz . ⊃ . φz ⊃ ψz (1)
⊢ . (1) . *9·1 . ⊃ ⊢ : (∃y) : φz ⊃ ψz . ⊃ . φy ⊃ ψz (2)
⊢ . (2) . *9·1 . ⊃ ⊢ :. (∃x) :. (∃y) : φx ⊃ ψx . ⊃ . φy ⊃ ψz (3)
⊢ . (3) . *9·13 . ⊃ ⊢ :: (z) :: (∃x) :. (∃y) : φx ⊃ ψx . ⊃ . φy ⊃ ψz (4)
[(4).(*9·06)] ⊢ :: (z) :: (∃x) :. φx ⊃ ψx . ⊃ : (∃y) . φy ⊃ ψz (5)
[(5).(*1·01.*9·08)] ⊢ :. (∃x) . ∼(φx ⊃ ψx) : v : (z) : (∃y) . ∼φy v ψz (6)
[(6).(*9·08)] ⊢ :. (∃x) . ∼(φx ⊃ ψx) : v : (∃y) . ∼φy . v . (z) . ψz (7)
[(7).(*1·01)] ⊢ :. (x) . φx ⊃ ψx . ⊃ : (y) . φy . ⊃ . (z) . ψz

This is the proposition to be proved, since "(y) . φy" is the same proposition as "(x) . φx," and "(z) . ψz" is the same proposition as "(x) . ψx."

*9·22. ⊢ :. (x) . φx ⊃ ψx . ⊃ : (∃x) . φx . ⊃ . (∃x) . ψx

I.e. if φx always implies ψx, then if φx is sometimes true, so is ψx. This proposition, like *9·21, is constantly used in the sequel.

Dem.

⊢ . *2·08 . ⊃ ⊢ : φy ⊃ ψy . ⊃ . φy ⊃ ψy (1)
⊢ . (1) . *9·1 . ⊃ ⊢ : (∃z) : φy ⊃ ψy . ⊃ . φy ⊃ ψz (2)
⊢ . (2) . *9·1 . ⊃ ⊢ :. (∃x) :. (∃z) : φx ⊃ ψx . ⊃ . φy ⊃ ψz (3)
⊢ . (3) . *9·13 . ⊃ ⊢ :: (y) :: (∃x) :. (∃z) : φx ⊃ ψx . ⊃ . φy ⊃ ψz (4)
[(4).(*9·06)] ⊢ :: (y) :: (∃x) :. φx ⊃ ψx . ⊃ : (∃z) . φy ⊃ ψz (5)
[(5).(*1·01.*9·08)] ⊢ :: (∃x) . ∼(φx ⊃ ψx) : v : (y) : (∃z) . φy ⊃ ψz (6)
[(6).(*1·01.*9·07)] ⊢ :: (∃x) . ∼(φx ⊃ ψx) : v : (y) . ∼φy . v . (∃z) . ψz (7)
[(7).(*1·01.*9·01·02)] ⊢ :. (x) . φx ⊃ ψx . ⊃ : (∃y) . φy . ⊃ . (∃z) . ψz

This is the proposition to be proved, because (∃y) . φy is the same proposition as (∃x) . φx, and (∃z) . ψz is the same proposition as (∃x) . ψx.

*9·23. ⊢ : (x) . φx . ⊃ . (x) . φx [Id . *9·13·21]
*9·24. ⊢ : (∃x) . φx . ⊃ . (∃x) . φx [Id . *9·13·22]
*9·25. ⊢ :. (x) . p v φx . ⊃ : p . v . (x) . φx [*9·23 . (*9·04)]

We are now in a position to prove the analogues of *1·2—·6, replacing one of the letters p, q, r in those propositions by (x) . φx or (∃x) . φx. The proofs are given below.

SECTION B] EXTENSION OF THE THEORY OF DEDUCTION 135

*9·3. ⊢ :. (x) . φx . v . (x) . φx : ⊃ . (x) . φx

Dem.

⊢ . *1·2 . ⊃ ⊢ . φx v φx . ⊃ . φx (1)
⊢ . (1) . *9·1 . ⊃ ⊢ : (∃y) : φx v φy . ⊃ . φx (2)
⊢ . (2) . *9·13 . ⊃ ⊢ :. (x) :. (∃y) : φx v φy . ⊃ . φx (3)
[(3).(*9·05·01·04)] ⊢ :. (x) :. φx . v . (y) . φy : ⊃ . φx (4)
⊢ . (4) . *9·21 . ⊃ ⊢ :. (x) : φx . v . (y) . φy : ⊃ . (x) . φx (5)
[(5).(*9·03)] ⊢ :. (x) . φx . v . (y) . φy : ⊃ . (x) . φx :. ⊃ ⊢ . Prop

*9·31. ⊢ :. (∃x) . φx . v . (∃x) . φx : ⊃ . (∃x) . φx

This is the only proposition which employs *9·11.

Dem.

⊢ . *9·11·13 . ⊃ ⊢ : (y) : φx v φy . ⊃ . (∃z) . φz (1)
[(1).(*9·03·02)] ⊢ : (∃y) . φx v φy . ⊃ . (∃z) . φz (2)
⊢ . (2) . *9·13 . ⊃ ⊢ : (x) : (∃y) . φx v φy . ⊃ . (∃z) . φz (3)
[(3).(*9·03·02)] ⊢ :. (∃x) : (∃y) . φx v φy : ⊃ . (∃z) . φz (4)
[(4).(*9·05·06)] ⊢ :. (∃x) . φx . v . (∃y) . φy : ⊃ . (∃z) . φz

*9·32. ⊢ :. q . ⊃ : (x) . φx . v . q

Dem.

⊢ . *1·3 . ⊃ ⊢ :. q . ⊃ : φx . v . q (1)
⊢ . (1) . *9·13 . ⊃ ⊢ :. (x) :. q . ⊃ : φx . v . q
[*9·25] ⊃ ⊢ :. q . ⊃ : (x) : φx . v . q (2)
[(2).(*9·03)] ⊢ :. q . ⊃ : (x) . φx . v . q

*9·33. ⊢ :. q . ⊃ : (∃x) . φx . v . q [Proof as above]
*9·34. ⊢ :. (x) . φx . ⊃ : p . v . (x) . φx

Dem.

⊢ . *1·3 . ⊃ ⊢ : φx . ⊃ . p v φx (1)
⊢ . (1) . *9·13 . ⊃ ⊢ : (x) : φx . ⊃ . p v φx (2)
⊢ . (2) . *9·21 . ⊃ ⊢ : (x) . φx . ⊃ . (x) . p v φx (3)
⊢ . (3) . (*9·04) . ⊃ ⊢ . Prop

*9·35. ⊢ :. (∃x) . φx . ⊃ : p . v . (∃x) . φx [Proof as above]
*9·36. ⊢ :. p . v . (x) . φx : ⊃ : (x) . φx . v . p

Dem.

⊢ . *1·4 . ⊃ ⊢ : p v φx . ⊃ . φx v p (1)
⊢ . (1) . *9·13·21 . ⊃ ⊢ : (x) . p v φx . ⊃ . (x) . φx v p (2)
⊢ . (2) . (*9·03·04) . ⊃ ⊢ . Prop

*9·361. ⊢ :. (x) . φx . v . p : ⊃ : p . v . (x) . φx [Similar proof]
*9·37. ⊢ :. p . v . (∃x) . φx : ⊃ : (∃x) . φx . v . p [Similar proof]
*9·371. ⊢ :. (∃x) . φx . v . p : ⊃ : p . v . (∃x) . φx [Similar proof]

Exemple de texte figuratif. Pages extraites des Principia Mathematica *de Whitehead & Russell.*

C'est une preuve éminemment singulière qui n'a pas besoin et qui ne saurait être vraiment répétée, et qui n'est pas non plus ouverte à la généralisation. Mais surtout, une fois donnée, elle perd de son intérêt, et avec elle le texte qui la présente. L'accomplissement de sa tache lui fait perdre sa fonction qui est autant son sens que sa raison d'être. Ces textes ont ainsi un caractère performatif dont l'action réside dans la charge qu'ils confèrent à la représentation qu'ils introduisent en établissant sa conformité et en montrant quelques-uns des bénéfices que l'on tire de son usage, propre à chaque thèse et à chaque représentation. Leur performance ne tient pas à des conventions préalables, ce qui ne les exclut pas, et consiste à faire le nécessaire pour l'introduction d'une nouvelle représentation mathématique. Ils ouvrent une porte qui, n'ayant pas ensuite à être fermée, n'apparaîtra pas comme ouverte, ni comme ayant été ouverte et ayant dû l'être. Ils accomplissent malgré eux l'idéal du *hacker*, mais qui n'est que rarement celui attribué au scientifique : pénétrer et transformer un système sans y laisser de trace. C'est le destin tragique des textes inauguraux qui instaurent des représentations qui seront ensuite adoptées, au travers desquelles ils seront ensuite eux-mêmes relus pour de ce fait sembler ne plus rien faire ou faire en trop de mots ce qu'il est possible de faire en peu mais en fait en tirant parti de ce que la représentation qu'ils ont introduit synthétise.

Les textes de Löwenheim et de Skolem, ou encore ceux de Post ou de Gödel où sont démontrés divers théorèmes de complétude ou d'incomplétude sont d'un tout autre genre. Ils peuvent d'emblée déclarer : *voilà toutes les propositions!* Ils bénéficient des possibilités offertes par la représentation devenue disponible. Skolem peut, comme nous l'avons vu, considérer en 1922 qu'il est « très facile » de représenter toutes les propositions mathématiques, que cela peut « être fait d'une manière tout à fait naturelle qui se présente d'elle-même », et reprocher à Zermelo de ne pas l'avoir fait en 1908. De la même manière Löwenheim pouvait en 1915 simplement affirmer dans l'article où il énonce son théorème :

> Il semble que toutes les questions importantes des mathématiques et du calcul logique peuvent être ramenées à de telles équations relationnelles. Löwenheim 1915

Emil Post pourra de la même manière donner à voir toutes les propositions[6] :

> Il est souhaitable dans ce qui suit d'avoir devant nous la vision de la totalité de ces fonctions jaillissant d'une variable inchangée *p* en des formes d'une complexité toujours croissante pour constituer le tableau triangulaire infini
>
> $$\begin{gathered} \mathrm{p} \\ p \vee p, p_1\, p_{2,} \sim p \\ p \vee \sim p,\ \ldots,\ \sim p_1 \vee \sim \vee p_{2,} \ldots,\ (p_1 \vee p_2) \vee (p_3 \vee p_4), \sim(p_1 \vee p_2), \sim(p \vee p), \sim\sim p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{»} \end{gathered}$$
>
> Post 1921

L'article dans lequel Gödel démontre en 1931 ses célèbres théorèmes d'incomplétude peut aussi commencer ainsi :

> Le développement des mathématiques vers plus d'exactitude a conduit, comme nous le savons, à en formaliser de larges secteurs, de telle sorte que la démonstration puisse s'y effectuer uniquement au moyen de quelques règles mécaniques. Les systèmes formels les plus complets établis jusqu'à ce jour sont, d'un côté, le système des *Principia Mathematica* (*PM*) et, de l'autre, le système axiomatique de la théorie des ensembles établi par Zermelo-Fraenkel (et développé par J. von Neumann). » Gödel 1931, trad. 107

Ces citations attestent autant de la réception des représentations associées à la thèse de Russell que de l'oubli des conditions de son introduction. Et les théorèmes énoncés et démontrés dans chacun d'eux exploitent les possibilités offertes par le fait de considérer avoir une représentation de toutes les propositions et, pour les théorèmes de Gödel, de toutes les démonstrations. Et l'on ne saurait trop souligner que ces mathématiciens peuvent avoir à ces représentations, et *à ce qu'elles représentent*, un rapport que ceux qui les ont introduites auraient difficilement pu d'emblée avoir. Whitehead & Russell ne pouvaient disposer de la représentation qu'ils soutenaient. L'introduction d'une telle représentation est un processus. Et si les *Principia Mathematica*

[6] Il se restreint en fait ici à une partie des propositions (appelée calcul propositionnel), mais cette *restriction* atteste aussi bien de la réception de la représentation utilisée, qui et en l'occurrence celle des *Principia,* et Post entendait à ce moment là étendre son théorème à toutes les propositions des *Principia.*

ou l'*Algebra der Logik* perdent une partie de leur sens, inversement, les théorèmes qui exploitent leurs représentations n'y ont pas non plus leur place. Ces théorèmes ne sont pas comparables à ceux qui y sont démontrés, pourtant nombreux et censés les recouvrir tous. Ce ne sont pas des maillons supplémentaires de la chaîne déductive déroulée dans les *Principia* : ce sont pour une part des conséquences de la représentation qui y est soutenue. Reconnaître cette différence c'est en particulier reconnaître que les mathématiques ne sont pas symboliques. Conséquence que renforcent les différences entre les représentations introduites par les divers énoncés inauguraux qu'une conception symbolique est amenée à ignorer. Le choix d'un théorème de logique présente ici un intérêt particulier. En effet, les *Principia Mathematica* constituent sans doute l'un des textes le plus conforme à une conception symbolique des mathématiques. Mais les *théorèmes* qui illustrent par exemple la généralité particulière des énoncés mathématiques, comme celui de Löwenheim-Skolem, ne sont pas de ceux que l'on trouve dans ce texte et les moyens employés pour les démontrer ne sont pas non plus les mêmes. Ils disposent de représentations dont ne disposaient pas de la même manière les auteurs des *Principia*. La critique que Skolem adresse à Zermelo permet aussi de mieux comprendre en quoi la représentation associée à la thèse de Russell intervient comme condition de possibilité de théorèmes et de préciser l'enjeu des changements sémiotiques dans et pour l'histoire des mathématiques. L'article de Zermelo est sans conteste un texte mathématique. Il énonce et démontre divers théorèmes dont on pourrait d'ailleurs aussi chercher à déterminer leurs conditions de possibilité sémiotiques. La reformulation de ses axiomes n'introduit donc évidemment pas les conditions sémiotiques à partir desquelles la formulation et la démonstration d'énoncés généraux deviendrait enfin possible ; elle ne fait pas basculer le texte de l'extérieur vers l'intérieur des mathématiques. En revanche, elle modifie bien comme on l'a vu les possibilités d'énonciation et de démonstration. Le fait qu'il devient dès lors possible, du fait de cette réécriture, de leur appliquer le théorème de Löwenheim-Skolem suffit à l'établir. Bien d'autres développements mathématiques pourraient être donnés en exemples. On voit ainsi de quelle manière des changements sémiotiques interviennent en mathématiques, contribuent à leur évolution et donc participent de leur histoire, en même temps qu'ils passent inaperçus et sont à peu près systématiquement ignorés. En l'occurrence, le fait de (considérer) disposer d'une représentation de toutes les propositions mathématiques permet à Skolem de modifier radicalement le statut des axiomes de Zermelo par une réécriture que sa critique adressée à Zermelo permet de rendre visible. Cette opération sera ensuite encore plus transparente et ses conditions et ses enjeux systématiquement ignorés. La lecture de l'article de Zermelo, et l'évidence aveuglante de la formulation de ses axiomes, ne suffit pas pour découvrir la nécessité d'une réécriture que le lecteur actuel aura tendance à opérer spontanément. Il est pour cela utile de considérer un texte comme celui de Skolem pour saisir, dans le reflet d'une critique, une représentation déjà devenue transparente pour son auteur.

L'exemple du théorème de Löwenheim-Skolem a permis de mettre en évidence l'enjeu et le rôle de la représentation d'une *totalité*, en l'occurrence des propositions mathématiques, dans la possibilité de produire et de démontrer des énoncés d'une généralité qui paraît assez propre aux mathématiques et de dégager quelques éléments de son historicité. Ces représentations n'épuisent pas l'analyse, même sémiotique, des formes d'expression de la généralité en mathématiques. Elles permettent néanmoins de repérer une caractéristique qui se retrouve dans des parties suffisamment variées des mathématiques associée à de nombreux moments fondateurs de leur histoire. Ces représentations ne sont pas le produit d'une analyse de sémioticien. Elles témoignent au contraire d'un enjeu régulièrement thématisé dans les textes mathématiques et repérable par un énoncé inaugural d'un type remarquable justiciable d'une analyse pragmatique. Mais leur évolution indique aussi un oubli tout aussi systématique de leur introduction et de ses conditions, oubli qui se manifeste aussi bien dans les développements mathématiques auxquels elles contribuent que dans les travaux d'histoire des mathématiques qui en rendent compte. L'intervention du sémioticien a ici surtout consisté à ne pas se laisser abuser par la transparence de ces représentations et à en saisir quelques reflets. Loin de confirmer l'idée d'une mathématique symbolique, les thèses et les énoncés inauguraux montrent au contraire l'insuffisance d'une telle conception. Les représentations introduites ne correspondent pas en effet au modèle d'un code, comme un alphabet en serait idéalement un exemple en raison notamment de leur signification d'ensemble à laquelle ne prétend pas un code. Elles ne prétendent pas seulement par exemple permettre la transcription de tous les sons d'une langue, voire de toutes les langues ; les énoncés inauguraux affirment aussi la condition réciproque (et qui est d'ailleurs la partie qui pose au premier abord le moins de problèmes) : tous les sons que l'on peut composer avec la représentation introduite sont effectivement des sons de la langue ou d'une langue. Autrement dit, les énoncés inauguraux introduisent des représentations qui n'excèdent pas ce qu'elles servent à représenter. Ce sont des représentations qui peuvent pour cette raison être tenues pour sans effets, et sembler pour cela totalement et intégralement réalistes. Ce n'est qu'en étant reprises, et de ce fait transformées, qu'elles perdront une part de cette conformité, ce qui ne doit pas pour autant faire oublier que celle-ci aura été la raison de leur introduction. La récurrence tout au long de l'histoire de ces moments réalistes fondateurs contredit aussi l'idée d'un développement des mathématiques suivant une abstraction croissante, qui n'est jamais que le moyen d'ignorer l'histoire des mathématiques et ses conditions sémiotiques.

Enoncé inaugural et théorème de représentation

Revenons maintenant à l'énoncé euclidien qui affirme que « toute figure rectiligne peut être transformée en carré ». Si sa démonstration ne se fait pas par induction, ou par un raisonnement par l'absurde, on peut chercher la *représentation* qui sert de fève et qui permet de considérer *toutes* les figures. La démonstration de cet énoncé ne saurait créer de la généralité et, sauf à croire à quelques effets mystérieux, sur lesquels toute une philosophie des mathématiques pourra ensuite se déployer, la généralité doit y être introduite par une représentation. Quand on sait qu'une telle fève peut exister, il n'est plus difficile de la trouver. La démonstration, dans les *Eléments* d'Euclide, de ce théorème repose sur la possibilité de *décomposer toute figure rectiligne en triangles*. Mais l'énoncé disant que « toute figure rectiligne peut être décomposée en triangles » n'est pas un énoncé inaugural. La représentation d'une figure rectiligne par des triangles n'est pas une nouvelle représentation des figures rectilignes comme les formules des *Principia* le sont des propositions mathématiques. Les formules logiques sont exprimées dans un *autre* système d'expressions que ne le sont les propositions mathématiques (ce qui était plus évident encore avant qu'on ne se mette à les confondre...). Les figures rectilignes décomposées en triangles sont au contraire constituées des *mêmes expressions* que les figures rectilignes. Il ne s'agit pas cette fois d'un énoncé inaugural mais d'un *théorème de représentation*. La fève ne se trouve donc pas là. Elle se trouve en l'occurrence dans la représentation des figures rectilignes au moyen de segments de droites juxtaposés par leurs extrémités. Le mathématicien dispose en effet ainsi d'une représentation de *toutes* les figures rectilignes qui rend possible la formulation et la démonstration d'énoncés généraux, c'est-à-dire de théorèmes.

II. L'expression comme problème

Les thèses et les énoncés inauguraux ainsi que les théorèmes de représentation ont permis de mettre en évidence le rôle joué par des représentations de *totalités* dans l'expression de la généralité en mathématiques. Le rôle de ces représentations se comprend peut-être mieux si on les considère comme des *expressions* d'une totalité, comme la fève en est une d'un paysage. Ainsi, les *Principia Mathematica* introduisent des expressions pour les propositions et les démonstrations mathématiques qui vont ensuite pouvoir être considérées pour elles-mêmes et servir d'expression de la totalité des propositions et démonstrations mathématiques. Leur intérêt réside dans cette représentation totale et dans ses caractéristiques propres qu'il appartient à la sémiotique de définir et de dégager. Une part de la créativité du mathématicien est de les avoir introduites. De la même manière, les équations algébriques de Descartes sont une expression des courbes géométriques, les séries trigonométriques des fonctions, etc. On peut ainsi traiter de manière symétrique les deux termes de la thèse en les considérant l'un et l'autre comme un système d'expressions avec leurs caractéristiques et leur intérêt propre. Les énoncés inauguraux sont dès lors des énoncés qui tout au long de l'histoire des mathématiques accompagnent l'introduction d'un nouveau *système d'expressions* et qui offre la possibilité de nouveaux développements. Réinscrits dans une problématique générale de l'*expression*, ils se distinguent par le fait d'être associés à l'introduction de *systèmes* d'expressions, c'est-à-dire, d'une pluralité d'expressions constituant d'une certaine manière elles-mêmes une totalité autonome, qui peut être considérée pour elle-même, sans doute pourvue d'une syntagmatique et d'une paradigmatique. Ces systèmes déterminent à la fois le pouvoir d'expression et le pouvoir de résolution des mathématiques. Mais les enjeux de l'expression ne se réduisent pas à celui de l'introduction d'un *système*. C'est ce que nous voudrions indiquer en rappelant le résultat d'une analyse sémiotique des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss[7].

Dans ce livre, fondateur de nombreux développements mathématiques du 19e siècle[8], la généralité est systématiquement exprimée au moyen d'expressions du type *2n+1*. Ces expressions ont plusieurs caractéristiques remarquables. Elles expriment une totalité, ici la totalité des nombres impairs. Ainsi, une expression est associée à une infinité d'autres : celles des nombres impairs. Ce que l'expression « nombre impair » fait aussi très bien. Mais en substituant au *n* de *2n+1* toutes les expressions pour les nombres on obtient toutes les expressions des nombres impairs (on notera l'intervention de l'énoncé inaugural affirmant que l'on dispose d'une expression pour tous les nombres entiers) ; l'expression *2n+1* est une expression d'invariante au moyen de laquelle on peut dériver par substitution toutes les variétés dont elle est l'invariante. Cette fois, l'expression « nombre impair » ne fait pas cela. Ce n'est pas tout : *2n+1* est aussi un nombre impair au sens où il est aussi possible de faire avec cette expression toutes les opérations arithmétiques qu'il est possible de faire avec un nombre impair particulier sans faire intervenir sa valeur particulière. Autrement dit, l'expression de l'invariante est telle que l'on peut lui attribuer la propriété dont elle est l'expression d'invariante. Ce n'est à nouveau pas le cas de l'expression « nombre impair » qui n'est pas un nombre impair. L'expression d'invariante génératrice est un nombre impair sans être aucun nombre impair particulier. Ainsi, *2n+1* peut à la fois représenter les nombres impairs et en avoir la propriété, mais sans en faire partie. Ces expressions peuvent être comparées aux expressions d'invariante représentantes dont elles sont proches tout en s'en distinguant nettement. Ce dernier type d'expression est aussi souvent utilisé, y compris en mathématiques, et consiste à prendre l'expression d'un nombre impair, par exemple « 9 » ou « neuf », mais à ne faire intervenir que les propriétés communes à tous les nombres impairs, en faisant abstraction de sa valeur particulière (on peut parler ailleurs de *specimen*, de prototype, de modèle etc.). Une variété sert ici d'invariante, et donc l'invariante est aussi dans ce cas une variété comme pour l'expression *2n+1* à ceci près que celle-ci a une expression propre et qu'elle a la propriété d'engendrement des variétés par substitution indiquée plus haut.

---

[7] Voir Alain Herreman, « Vers une analyse sémiotique de la théorie des ensembles : hiérarchies et réflexivité ». *Philosophia Scientia* 9 (2), 165-187, 2005 (http://perso.univ-rennes1.fr/alain.herreman/hte.pdf).

[8] Voir Catherine Goldstein & Norbert Schappacher & Joachim Schwermer, *The Shaping of Arithmetic after C.G. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer Verlag, 2007.

Bien sûr, les expressions considérées par Gauss sont bien plus complexes, mais ce sont bien là leurs caractéristiques sémiotiques communes. Néanmoins, il lui arrive aussi d'avoir des problèmes d'expression... Il lui arrive par exemple d'avoir à considérer des familles de nombres pour lesquelles il ne dispose pas d'expression de ce type. Si par exemple au lieu de considérer seulement la propriété « être un nombre impair » on ajoute aussi celle d'« être un carré » pour considérer la propriété « être un nombre impair et être un carré », on a encore dans ce cas une expression d'invariante génératrice : $(2n+1)^2$. Il se trouve en effet que cette expression donne exactement tous les nombres carrés impairs. Cela tient en fait aux valeurs particulières « 2 » et « 1 ». Si on remplace maintenant celles-ci par deux nombres quelconques x et y et que l'on souhaite à nouveau trouver une expression unique pour les nombres de la forme $xn+y$ qui soient aussi des carrés, alors l'expression $(xn+y)^2$ ne convient plus. Que fait Gauss dans ce cas ? Il considère l'*ensemble* des nombres carrés de la forme $xn+y$ et le désigne aussi par une lettre, par exemple ω. Cette lettre, considérée comme un symbole, est un symbole comme un autre, mais elle n'a plus du tout les remarquables propriétés sémiotiques des expressions d'invariante génératrices. Son introduction traduit une sorte de dépit sémiotique. Ainsi, Gauss utilise un mode d'expression dont il a hérité, mais l'usage qu'il en fait l'amène à avoir un *problème d'expression*, c'est-à-dire que le mode d'expression reçu, qu'il exploite magistralement, ne lui fournit pas toutes les expressions dont il a besoin. Il y a des éléments du paysage qui n'entrent pas dans la fève. Gauss doit renoncer ou trouver des expédients sémiotiques et, *bien malgré lui*, recourir à d'autres expressions. Il recourt alors *systématiquement* à des *ensembles*. Ainsi, les ensembles s'introduisent dans les *Disquisitiones*, c'est-à-dire dès 1801, comme la solution systématique aux problèmes d'expression rencontrés par Gauss dans l'usage de son système d'expression. Ce recourt ne s'accompagne d'aucun énoncé inaugural. Il n'est pas thématisé, il reste subreptice et les ensembles ne constituent pas ici un *système*. En particulier, ils ne définissent ni une syntagmatique, ni une paradigmatique et ne conduisent pas à considérer les problèmes qui le sont quand c'est le cas. Compte-tenu de l'importance souvent accordée à l'infini dans le développement de la théorie des ensembles considéré à partir des travaux de Cantor, il convient peut-être de remarquer que les raisons de recourir à des ensembles sont en l'occurrence indépendantes de leur caractère fini ou infini : le problème d'expression peut se poser et se pose effectivement aussi avec des ensembles finis (il suffit de considérer les nombres entiers carrés de la forme $xn+y$ *et plus petits*, par exemple, *que* $(x+y)^2$). On observera enfin à nouveau qu'une conception symbolique des mathématiques conduit encore à ignorer à la fois les différents types d'expressions que nous avons distingués et le rôle dans l'histoire des mathématiques des problèmes d'expression auxquels ils donnent lieu ou qu'ils résolvent, avant d'en poser de nouveaux..., et qui sont autant d'obstacles et de tremplins sémiotiques objectifs et repérables.

D'autres expressions de la généralité en mathématiques ont été diversement décrites et restent à décrire. Mais il appartient aussi à la sémiotique de les décrire qu'elles aient ou non été introduites par des énoncés inauguraux. Nous nous sommes délibérément contentés ici du terme générique de « représentation », et nous n'avons en quelque sorte fait que montrer celles-ci (ou leur description) du doigt. Elles doivent bien sûr être décrites, caractérisées pour ainsi mieux mettre en évidence leurs différences et le rôle spécifique de chacune dans le développement des mathématiques.

Mathématisation, visualisation : entre transduction et traduction

Vivien LLOVERIA
CeReS, Université de Limoges,
Ecole Nationale de l'Aviation Civile

Introduction

Cette étude vise une contribution à la question du rapport entre mathématisation et visualisation par l'étude d'une image scientifique, la radioscopie numérique (figure 1), engagée dans une situation concrète de pratique d'inspection-filtrage en sûreté du transport aérien. Partant de la définition générale de la pratique de sûreté, nous tenterons d'identifier et de décrire le lien entre les propriétés actorielles de l'image et ses fonctions actantielles au sein de la scène pratique.

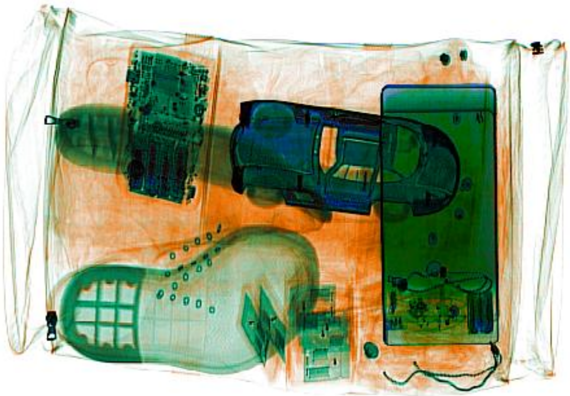


Figure 1. Radioscopie numérique. École Nationale d'Aviation Civile (ENAC).

Il s'agira de préciser, par l'étude des empreintes du mode opératoire de la production de l'image, quelle place accorder à la mathématisation face au rendu visuel et comment elle s'instaure à la fois comme lieu de constitution des virtualités de l'image et comme instance de contrôle de leurs actualisations et réalisations dans la visualisation radioscopique.

Pour cela, nous aborderons premièrement sa fonction de « transduction » qui, proche de « l'autographie », vise à « identifier et fixer » le phénomène de traversée des corps des rayons X. Dans un deuxième temps nous déterminerons son rôle de « traduction », apparentée cette fois-ci à « l'allographie », lieu de conjonction et d'ajustement entre l'expérience scientifique et les « expériences de pensée »[1] qui soumettent l'image au /devoir faire/ de la pratique et au /pouvoir faire/ de son opérateur humain. Dans cette image hybride, nous nous focaliserons sur les tactiques interprétatives et sur le passage d'une pseudo « authenticité » à une « reformulation stratégique » qui ne sera pas sans conséquence sur les régimes de croyance de l'image.

Pour terminer, nous détaillerons le rôle de la mathématisation dans le maintien de la relation fiduciaire entre un énonciateur « machine » et l'observateur-énonciataire humain.

Nous observerons comment les données mathématiques conservent et compensent « numériquement » des détériorations pourtant matérielles, illustrant ce glissement, décrit par Fontanille et Zilberberg[2], de la fiabilité des « états de choses » à la fiabilité d'un « état d'âme ».

La pratique de sûreté du transport aérien

Si nous nous référons à la réglementation de l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale (OACI), la sûreté est définie comme « la protection de l'aviation civile contre les actes d'intervention illicite »[3]. Partant de cela nous pouvons d'ores et déjà constituer une scène prédicative[4] composée d'au moins trois actants : 1) un actant source de l'acte illicite (un malfaiteur), 2) un actant cible (l'aviation civile) et 3) un actant de contrôle de type « obstacle » (la sûreté).

L'actant source apparaît ici comme un nuisible[5] pour l'existence de l'aviation civile qui viserait en celle-ci un /faire ne pas être/. Cette « menace » peut à son tour se démultiplier en une scène prédicative comprenant l'opérateur de l'acte (p. e. les terroristes), des objets (p. e. les armes), des textes (p. e. des lettres de menace) et des actes (p. e. prendre en otage). L'actant cible de la même manière que l'actant source peut s'assimiler à une scène prédicative, celle d'un transport de passagers et d'objets dans un avion. La transformation est ici un déplacement spécifique qui requiert la « médiation » d'un avion apportant son lot d'avantages (p. e. la vitesse) et d'inconvénients (p. e. la vulnérabilité). Bien évidemment, la visée

---

[1] Je reprends ici les mots de Maria Giulia Dondero sur la distinction de Goodman entre « allographie » et « autographie », pour cela voir Dondero (2009).

[2] Voir Fontanille et Zilberberg (1998, p. 205).

[3] Entrée « Sûreté » des définitions du chapitre 1 de l'Annexe 17 de l'OACI (2006).

[4] Comme plan de l'expression la scène est « l'expérience d'une interaction avec un texte […] ou avec un ou plusieurs objets, et qui s'organisent autour d'une pratique ». Comme plan du contenu elle devient une scène prédicative qui « se compose d'un ou plusieurs procès, environné par les actants propres au macro-prédicat de la pratique ». De plus elle « consiste également en relations entre ces différents rôles, des relations modales et passionnelles, pour l'essentiel ». Voir Fontanille (2008, pp. 25-27).

[5] Défini par Greimas comme un « vouloir ne pas être ». Voir Greimas (1983, p. 99).

de l'aviation civile s'oppose à celle du malfaiteur et consiste en un /faire être/, celui du transport aérien.

Enfin, la visée de maintien associée à l'actant de contrôle pourrait se scinder en deux visées complémentaires : 1) la « lutte » contre le malfaiteur qui relève d'une manipulation de type empêcher /faire ne pas faire/ et 2) la « prudence » vis-à-vis des répercussions de sa propre intervention sur le bon déroulement des opérations de l'aviation civile qui, d'un point de vue modal, relèverait d'un /ne pas faire ne pas être/.

Par conséquent, la scène pratique de la sûreté ne semble pas organisée autour d'une transformation d'un état dans un autre mais par le maintien d'un état initial[6] en empêchant l'émergence d'un « faire » menaçant (action sur sa compétence[7]) et en veillant à la conservation d'un « faire » déjà là (l'aviation civile).

Etant donné que l'arbitrage de cet actant de contrôle se fait entre deux pratiques, nous pouvons maintenant considérer la sûreté comme une pratique « stratégique ». En effet, le niveau de pertinence sémiotique analysé serait donc celui d'une « situation sémiotique » qui contiendrait le niveau des pratiques individuelles et le niveau stratégique de leurs interactions[8]. Enfin, dernier élément : concernant la forme sensible de cet actant, nous avons précédemment cité la notion d'obstacle. Précisons qu'il s'agira ici d'un obstacle « total » et non « partiel »[9] de manière à virtualiser et non potentialiser la présence menaçante. Nous allons maintenant décrire quelle est la place et la fonction de l'inspection filtrage au sein de cette pratique de sûreté.

L'inspection-filtrage

Par rapport à l'ensemble de la pratique de sûreté, l'inspection-filtrage est située en amont du processus de neutralisation de la menace. Du point de vue aspectuel, l'inspection-filtrage se focalise sur la phase d'émergence de la menace (ou phase inchoative) et l'objectif sera ici de « faire sentir » cette présence menaçante pour agir sur elle en l'empêchant de se réaliser. Concrètement, pour l'OACI, elle se présente comme « la mise en œuvre de

---

[6] Nous pourrions reprendre le terme de « transformation stationnaire » utilisé par Landowski pour désigner non pas l'action qui vise la transformation d'un objet déterminé mais « le cas échéant, si cet objet se trouve menacé de quelque transformation tenue pour indésirable, à assurer au contraire son maintien en l'état ». Voir Landowski (2000).

[7] L'être du faire comme « énoncé d'état, hiérarchiquement supérieur, qui rend compte de l'existence virtuelle, logiquement présupposée, de l'instance produisant le faire. Cet être du faire […] peut dès lors être dénommé *compétence* ». Voir Greimas (1983, p. 70).

[8] A la suite de Landowski, Fontanille reprend le terme de situation sémiotique pour associer deux types d'expériences : 1) l'expérience d'une pratique ou de la scène comme décrite précédemment, 2) l'expérience de l'ajustement entre plusieurs pratiques, dénommée « stratégie ». Voir Fontanille (2008, p. 25).

[9] Aux sujets des obstacles voir Fontanille (2004, pp. 213-223).

moyens techniques ou autres en vue d'identifier et / ou détecter les armes, les explosifs ou tous autres engins, articles ou substances dangereux qui peuvent être utilisés pour commettre des actes illicites »[10].

À première vue, cette définition se focalise essentiellement sur le macro-prédicat « inspection » qui laisse place à ses deux sous-prédicats : 1) la détection et 2) l'identification.

La détection

Premièrement, la détection, qui se rapproche étymologiquement de l'inspection[11], fait apparaître un nouvel actant, obstacle à la saisie de la menace, dans la scène prédicative de la sûreté. En effet, l'acte de découvrir présuppose l'existence d'un « couvrant », que nous assimilerons à un « paraître » et qui pose un problème de type véridictoire. Si nous définissons la véridiction comme un « jeu de la vérité » entre deux dimensions de l'existence (le « paraître » qui relèverait de la manifestation, et « l'être » associé à l'immanence), leurs non-correspondances « possibles » nécessitent alors de la part de l'observateur le recours à un jugement véridictoire pour « statuer sur l'être de l'être »[12].

Dans le cas présent, la possibilité d'une « détection » présuppose celle d'un être qui ne paraît pas, ou autrement dit d'un être dont on ne peut sentir la présence (p. e. invisible, inaudible). Nous serions alors dans la position d'une « dissimulation »[13] /être et non paraître/. Mais corrélativement elle présuppose aussi la présence effective d'une « simulation »[14], c'est-à-dire un paraître qui ne correspond pas à l'être visé /paraître – non être/.

La détection s'effectuerait donc à travers deux mouvements complémentaires[15] : 1) une « révélation » c'est-à-dire la transformation d'un état de dissimulation /être – non paraître/ en celui d'une « évidence »[16] /être – paraître/ et 2) une « authentification », c'est-à-dire la transformation d'un état de « simulation » /paraître – non être/ en celui d'une évidence /paraître – être/.

---

10 Entrée « Inspection-filtrage » des définitions du chapitre 1 de l'Annexe 17 de l'OACI (2006).

11 On peut noter la proximité des termes. Le latin *detegere* veut dire « découvrir » (ou littéralement enlever le « toit ») et *inspectare* qui veut dire examiner (ou littéralement in-spectare « voir dans »). L'un se place du côté de l'observateur qui plonge dans l'objet, l'autre du côté de l'objet qui se laisse voir.

12 Sur la véridiction voir Greimas et Courtes (1993, p. 419).

13 J'emprunte ici à Per Aage Brandt le terme moins connoté de « dissimulation » pour désigner ce que Greimas appelait le « secret ». Voir Brandt (1995).

14 « Simulation » vient remplacer « mensonge » ; voir Brandt (1995).

15 Ces mouvements sont précisément décrits dans Flores (1995).

16 De la même manière l'effet de sens « vérité » décrit par Greimas sera remplacé, en référence à Brandt (1995), par le terme moins connoté d'« évidence ».

L'identification

Deuxièmement, l'identification pourrait se résumer, de manière générale, à l'acte d'associer une identité, une expérience déjà vécue à une situation nouvelle. Elle vise dans la saisie à rendre « identique » une forme visée c'est-à-dire à conformer une occurrence sensible à un type « sensible »[17].

L'identification nécessiterait au moins deux conditions : 1) une stabilisation d'une interaction entre matière et énergie de manière à la saisir dans le champ perceptif (stabilisation d'une forme visuelle par exemple), 2) une équivalence entre cette figure externe de la sémiotique du monde naturel (du côté des actants de l'énoncé), avec une figure intériorisée du côté des actants de l'énonciation (expérience sensori-motrice humaine ou artificielle) qui engendrerait l'iconisation des figures, c'est-à-dire l'expression de leur propension à être « reconnue ».

Par exemple pour reconnaître une arme dans une image, il faut que la forme de l'arme soit visuellement saisissable et stabilisée pour poser les conditions d'une équivalence (un ajustement sensori-moteur) avec une expérience antérieure de l'actant d'énonciation qui en autorisera la reconnaissance.

Le filtrage

Troisièmement, le filtrage vient clore le processus. Dans les définitions générales, le filtre est présenté comme un espace « poreux » qui tantôt retient tantôt laisse passer des choses. En conséquence, de l'obstacle « total » nous passons au scénario de l'obstacle « sélectif », c'est-à-dire un obstacle qui nécessite des choix, une sélection parmi plusieurs possibilités de passage. Nous voyons alors clairement s'instaurer un système de valeurs, une axiologie qui fixerait les critères du filtrage. Eu égard à la prise de position et à l'orientation discursive donnée par la sûreté du transport aérien, nous obtenons d'un côté des choses « menaçantes » dysphoriques et de l'autre « l'euphorie » dans les passagers, les bagages et tout ce qui est reconnu comme faisant partie ou pouvant être accueilli par la scène prédicative de l'aviation civile.

En sémiotique plutôt que de filtrage, nous pourrions plutôt parler de tri. Pour Greimas[18], le programme de tri « est caractérisé par la présence de bifurcations ». Le tri peut être réalisé de manière uniquement pragmatique comme cela peut être le cas dans un tamis qui sépare les cailloux et la farine. Cependant il devient cognitif lorsqu'il s'agit d'un tri basé sur un système de valeurs qui présuppose la présence d'un destinateur.

---

[17] L'idée est ici de reprendre la définition du Groupe μ du type comme « intégration » et « stabilisation d'expériences antérieures », tout en substituant l'idée d'une « représentation mentale » proposée par Klinkenberg (1996, p. 385) par une empreinte, une mémoire du corps plus proche des propositions de Fontanille (2004). Dans ce contexte le passage du stimulus au signifiant du Groupe μ correspondrait à notre stabilisation, et le passage du signifiant au type à notre iconisation dans le sens d'une équivalence sensori-motrice.

[18] Sur la définition du programme de tri voir Greimas et Courtes (1986, pp. 181-182).

Dans notre situation nous aurions affaire à deux types d'émetteurs : 1) le flux des passagers qui émet des choses licites et 2) le groupe terroriste qui émet des choses illicites.

Ces deux émissions seraient mélangées au point d'en devenir une masse indifférenciée[19] que l'opérateur de tri devra traiter par des critères de différenciation « de la forme présence d'un trait versus absence de ce trait, de sorte que les catégories manipulées sont des catégories contradictoires ».

Une description en deux étapes, proposée par Fontanille[20], corrobore notre vision de l'inspection filtrage : 1) la première étape est celle du « tri » proprement dit qui correspondrait à « la singularisation individuelle » (notre détection-identification) puis 2) celle de la « séparation » consécutive à « l'instauration de la dualité et de la valeur » (notre filtrage). Pour décrire notre système de filtrage, nous ne retiendrons pour le moment que la simple contradiction « menace versus non menace » comme critère de distinction et de prise de décision. Ainsi du point de vue des prises de décision finales nous obtenons 1) une menace dysphorique retenue à l'extérieure de la scène et 2) une non-menace euphorique autorisée à entrer dans la scène.

L'image radioscopique et la sûreté

La question que nous allons nous poser maintenant est de savoir pourquoi la pratique de sûreté a sélectionné l'objet « image radioscopique ». Pour y répondre, nous tenterons de tisser et caractériser des liens entre les propriétés actorielles de la radioscopie et les fonctions actantielles de la pratique de sûreté du transport aérien.

D'abord, pour prétendre jouer un rôle dans la sûreté, la visualisation radioscopique devrait au moins répondre aux deux fonctions principales de la sûreté que sont la prévention des actes illicites (cf. infra « la lutte ») et le maintien de la performance de l'aviation civile (cf. infra « la prudence »). Pour cela nous pouvons citer l'OACI qui explique que « les images radioscopiques permettent à l'AF [agent de filtrage] de voir à l'intérieur d'un bagage sans qu'il soit nécessaire d'ouvrir et de déranger le contenu en fouillant physiquement chacun des bagages passant par le poste de contrôle »[21].

Ainsi, du côté de la « lutte » contre les actes illicites /faire ne pas faire/, la visualisation radioscopique donne les moyens de vérifier dans les bagages la présence éventuelle d'une menace contre l'aviation civile.

Elle modalise la situation en procurant un /pouvoir faire/ (un pouvoir présentifier et un pouvoir inspecter) identique à celui obtenu par une fouille physique et permet donc de répondre à la fonction d'inspection-filtrage de la sûreté.

---

[19] Ce que Fontanille nomme « la confusion axiologique » comme situation initiale du schéma de tri axiologique. Voir Fontanille (2004, p. 35).

[20] Voir *idem*.

[21] Voir OACI (2002, Appendice D4).

Deuxièmement, du côté de la « prudence », l'exploration par rayons X est plus rapide car elle ne nécessite pas d'ouverture et permet au niveau stratégique une « conciliation entre les inspections et de grands débits passagers »[22]. Enfin dernière qualité, la visualisation radioscopique est moins intrusive car elle ne demande pas l'effraction physique du bagage pour en explorer l'intérieur. Elle a donc un plus haut niveau « d'acceptabilité »[23] pour les usagers, autre objectif stratégique fondamental dans une pratique qui se veut aussi commerciale.

Enfin, pour comprendre plus précisément comment l'image fonctionne au niveau de l'interprétation, il faut en décrire sa production au point d'en analyser les « micro-opérations »[24] qui nous donneront le détail des fonctions actantielles investies par les propriétés qualitatives de l'image. Notre approche se veut inspirée de la « sémiotique de l'empreinte » de Fontanille pour qui « l'interprétation est une expérience qui consiste à retrouver les formes d'une autre expérience »[25]. Partant de ce principe, étudier le mode de production de l'image devrait nous en apprendre plus sur la manière de l'interpréter. Pour commencer nous allons étudier la première étape : celle de la transduction.

Transduction, expérience technologique et authenticité

Le principe de la radioscopie est de rendre visible le contenu d'un corps. Assez simplement, elle permet à la manière d'un photogramme de faire l'empreinte de « l'ombre » des objets qui sont traversés par les rayons X. Selon la densité de ces objets, leur corps absorbe plus ou moins le faisceau qui les traverse de telle sorte que l'empreinte puisse restituer 1) l'intensité des rayons X (et inversement la résistance des objets) et 2) la répartition spatiale de cette variation d'intensité sur un espace délimité du monde naturel. Précisons que, peut-être à la différence de Fontanille, nous attribuons le terme de transduction à une transformation obtenue par le passage d'une substance (les stimulations des rayons X) à une autre substance (l'espace visuel du film radiosensible ou les signaux électriques de la matrice numérique) sans aucune modification intentionnelle destinée à donner de « l'accessibilité » (en améliorant la saisie de l'empreinte).

Bien que nous puissions croire en la conservation de la forme sémiotique malgré le changement de substance de l'expression, nous ne manquerons pas dès lors d'émettre un bémol concernant cette dernière affirmation.

En effet, l'empreinte que nous obtenons ne correspond pas « totalement » et « exactement » à la traversée des rayons X. Elle est obtenue au moyen d'un dispositif technique de captation qui est le fruit d'une organisation spatiale

[22] Voir Légé (2008, p. 14).

[23] Néologisme employé par Philippe Légé pour qualifier l'acceptation des dispositifs sécuritaire. Voir ibid., p. 13.

[24] Nous prétendons ici partir à la conquête de ces fameuses micro-actions, opérations, interactions, si souvent évoquées par Landowski (2009).

[25] Voir Fontanille (2004, p. 265).

des composants sensibles visant une « mathématisation ». En effet, ces composants électroniques, sensibles aux rayons X, sont configurés de manière à « constituer et “cadrer” un phénomène de sorte qu’on puisse le mesurer et le décrire mathématiquement »[26]. Il y a donc une forme de « manipulation » de l’ordre d’un /devoir faire/ (devoir mathématiser) de l’expression d’origine pour la soumettre à des schématisations particulières (mathématiques).

De la même manière, la pénétration des rayons X dans la matière peut être ajustée en fonction des objectifs pratiques. Ainsi obéissant au /devoir faire/ (le devoir inspecter-filtrer) imposé par la sûreté du transport aérien, les valeurs positives de la pénétration se situeraient dans une zone médiane qui produit l’effacement des parois du bagage et maintient visible les corps des objets contenus. Dans une autre pratique telle que l’usinage de pièces métalliques en aéronautique où il serait question de percer les métaux pour en vérifier la structure, la « sélection » du taux de pénétration serait différente.

Par conséquent, l’expression scientifique passe par le filtre technologique qui est lui-même soumis aux exigences de la pratique. Ce n’est pas tant l’expérience « scientifique » de la traversée des rayons X que son expérience « technologique » et « pratique » qui nous est donnée à voir. Bien que l’on observe une perte ou du moins une atténuation de l’authenticité, la présence d’un sujet manipulateur n’est cependant pas affirmée avec force[27]. Nous pourrions ranger ces détériorations de l’authenticité dans la catégorie des « artefacts », c’est-à-dire des expressions dans l’image du « mode opératoire » de la production de l’image.

Du point de vue du plan de l’expression de l’image radioscopique, un artefact se distingue clairement en réduisant la distance à l’image de manière à distinguer « une microtopographie de l’image »[28] que nous appelons communément la « pixellisation ».

Par celle-ci, l’attracteur d’origine qui se concevait comme une figure iconique se fragmente en « une multiplicité d’unités colorées [qui] se laissent décrire comme une pixellisation, une représentation en mode points »[29].

Reprenant une description de Beyaert-Geslin, « le plan de l’expression semble s’emballer, bégayer et se désolidariser du plan du contenu pour déclarer le modèle génératif de l’image et son support numérique »[30].

Cette pixellisation produit deux conséquences pour notre analyse. D’une part, elle « révèle » que le dispositif de prise d’empreinte visait une représentation mathématique (un vouloir faire). Cependant nous ne voulons

---

[26] Voir Lynch (1985).

[27] Ces effets seraient le résultat d’interactions de type « co-incidence », aléatoires ou concertées, car aucun des actants n’est à proprement parlé un sujet. Dans le cas de la manipulation nous passerions à « l’interaction » proprement dite où l’objet est « utilisé » par un sujet. Voir Landowski (2009).

[28] Expression employée par le Groupe µ pour évoquer la texture. Voir Klinkenberg (1996).

[29] Voir Beyaert-Geslin (2003).

[30] Voir Beyaert-Geslin (2006).

pas encore parler d'intentionnalité car cette mathématisation ne pourrait représenter qu'une correspondance de plus dans la transduction des rayons X. D'autre part, en déclarant le modèle génératif de l'image le pixel « trahit l'image et apporte un démenti à son régime de croyance »[31].

La trahison du pixel

Si la radiographie ne présente pas de pixel, c'est que son support et sa prise d'empreinte sont radicalement différents. Selon l'Ecole Nationale de l'Aviation Civile (ENAC)[32], la radiographie est le résultat de la réaction d'un film sensible aux rayons X qui en permet leur visualisation « directe ». Différemment, la radioscopie opère indirectement en deux étapes : il y a d'abord une transformation des rayons X captés par des récepteurs sensibles en signaux électriques mémorisés dans une matrice numérique ; puis une visualisation de cette matrice numérique convertie en combinaison de pixels. Ainsi nous reprendrons de nouveau les mots de Beyaert-Geslin : « échangeur entre l'image et le calcul mathématique, le pixel ne se trace pas mais se "fait" à l'écran, induisant un nouveau rapport à l'énonciation et la médiation d'une interface »[33].

Par conséquent, si précédemment nous étions passés de l'expérience scientifique à l'expérience pratique par une atténuation de l'authenticité, nous passons ici du niveau véridictoire de « l'authenticité » à celui de « l'exactitude » de l'énonciation. Nous référant aux travaux de Per Aage Brandt sur la véridiction, dans la première situation nous étions dans l'authenticité car l'expérience technologique avait le statut d'une observation d'un sujet (S1) qui dirigeait son attention vers quelque chose (q) donnée directement par l'expérience technologique extériorisée.

Son action directe relevait d'une « foi perceptive », d'une adhésion en sa propre perception car il y avait syncrétisme actantiel entre la « prise » d'empreinte et son « énonciation ». Dans le second cas, il y a un acteur pour chaque actant. La prise d'empreinte se fait dans la matrice numérique, la visualisation dans l'image pixellisée.

L'observateur devient ici un « destinataire » (S2), et la matrice numérique son destinateur (S1). Il n'y a plus réellement une vision directe, au plus proche de la source, de type « monstration » mais une « présentation »[34] par

[31] Voir *idem*.
[32] (ENAC Sûreté 2011).
[33] Voir Beyaert-Geslin (2006).
[34] La distinction entre monstration et présentation sera fondamentale dans cette étude. Selon Beyaert-Geslin (2009) la monstration est de l'ordre d'un /faire voir/ qui s'adressant au corps « le livre visuellement au "feu" de l'événement ». Elle conjugue une forte intensité passionnelle et un faible déploiement figuratif. À l'inverse, la présentation, est une visualisation distanciée, qui perdant en intensité « prédicative » gagne en /pouvoir observer/ et permet la description, la lexicalisation du visuel. Autre description intéressante, selon Colas-Blaise (2011), la monstration ne désigne pas, elle « exhibe » au « cœur de l'appréhension sensible ». Inversement, la dé-monstration qui est seconde, vise l'objectivation, « la voie du figement », la neutralisation des effets

une médiation numérique qui « construit » l'image. Dans ce deuxième cas il s'agirait plus d'une adhésion à la parole d'un sujet. Ainsi, le pixel trahit la « simulation » de l'image et transforme la « perception directe » en « dire » qui peut sous ces conditions devenir l'objet de manipulations véridictoires de type « simulation » ou « dissimulation » et mettre en péril les performances de l'inspection-filtrage.

Pour qualifier cette situation de décalage entre le « perçu » de l'observateur machine et son dire, Cotte parle de « régime de la matrice », désignant « un nouveau mode de production-transmission invisible mais matériel ». Dans ces conditions, l'image ou le texte visuel « devient un objet multiple, susceptible d'actualisations très différentes »[35].

Il est maintenant intéressant d'apporter cette précision technique : les données de l'expérience technologique accumulées dans la matrice numérique ne sont pas toutes actualisables dans une seule et même image. Ce cas théorique d'actualisation « totale », nous renverrait au scénario de l'empreinte, c'est-à-dire celui d'une monstration qui déclare l'événement par un « faire voir » sans pour autant offrir un « faire observer ».

Seulement si autrefois l'image radiographique répondait aux exigences de la perception humaine de par son ancrage dans un seul espace-temps, celui d'une prise de vue pareillement à une photographie, les nouvelles prises d'empreintes radioscopiques sont bien différentes.

La machine est capable de mémoriser plusieurs espaces (niveaux de profondeur) et temps (le temps découpé du scanning) dans une seule expression mathématique, celle de la matrice numérique.

Par conséquent ce qui réside dans la mémoire numérique ne relève plus d'un « ça a été » barthésien mais d'un « ça peut être »[36], c'est-à-dire d'un réservoir limité de potentialités visuelles unies par l'expérience technologique d'une même entité du monde. La machine est donc en réalité le seul observateur capable de « saisir » cette « monstration ». Pour un observateur humain le « montré » ne laisserait pas place à « l'observation ». En conséquence nous voyons s'instaurer une tension entre le « voir » de la source et « l'observer » de la cible, entre la détection et son identification, entre l'œil machine et l'œil humain.

D'une part, pour obéir au « pouvoir observer » de l'agent de sûreté, la matrice numérique doit sélectionner /devoir faire/ les données à visualiser. Cette programmation de la matrice consiste à distinguer ce qui doit être « réalisé » dans l'image et ce qui doit être « potentialisé » par la création d'une « fenêtre » de laquelle l'agent pourra observer l'image et la décrire à des fins d'inspection-filtrage. Ce terme de « fenêtre » n'est pas utilisé par hasard puisque l'opération informatique qui vise ce contrôle du champ de

---

« symptomatiques » du montré. En cela monstration et représentation mobilisent les oppositions sensible versus cognitif, visible versus lisible.

[35] Voir Jeanneret (2001).

[36] Nous faisons ici référence à la modalité temporelle de l'éventualité décrite par Edmond Couchot à propos de la matrice numérique. Voir Couchot (1998).

vision est communément dénommé le « fenêtrage ». D'autre part, pour que l'image soit lisible et permette l'identification, la matrice numérique doit contenir toutes les propriétés d'une « textualisation ». Cette remarque est inspirée de celle de Jeanneret à propos des écrits d'écrans pour qui « l'essentiel de la textualisation dans l'écrit d'écran consiste donc à créer des espaces lisibles permettant au lecteur de reconnaître des signes et des formes textuelles présents sur l'écran »[37].

Nous nous retrouverions alors en présence d'un raisonnement concessif : bien que la pratique d'inspection-filtrage veille à maintenir un certain niveau d'authenticité, la radioscopie a été sélectionnée car elle « offre davantage de possibilités pour le traitement de l'image »[38].

De plus, si dans le cas de l'expérience technologique nous avions affaire à une transduction puisque seules changeaient les substances du plan de l'expression, dans celui de l'expérience sensible de l'image radioscopique nous avons affaire à une véritable « traduction », c'est-à-dire à une scène d'interprétation qui vise une transformation intersémiotique entre une expression numérique « source » et une expression visuelle « cible »[39].

L'expression sensible visuelle n'est plus dans ce cas une représentation fidèle de l'expérience de la traversée des rayons X, mais une reformulation « stratégique » pour une pratique cible d'inspection-filtrage. Nous pouvons alors mettre à jour deux grands pôles au niveau de ce que nous pourrions dénommer les tactiques interprétatives : 1) une vision « sourcière » qui privilégie l'authenticité de l'énonciation visuelle, 2) une vision « cibliste » qui se focalise sur les observateurs de l'image qui, rappelons-le, sont engagés dans une pratique d'inspection filtrage en sûreté du transport aérien.

Pour commencer, nous allons explorer ce qui s'apparenterait aux deux positionnements extrêmes : une pure source, et une pure cible. Ainsi, une image uniquement focalisée sur la source correspondrait à l'expression directe de la matrice numérique sous la forme « d'une série d'impulsions énergétiques traitées par la machine […] ce niveau le plus bas est celui dans lequel tous les autres modes d'existence du texte doivent être finalement traduits pour être traités par la machine »[40]. Cette figure serait, selon Jeanneret, « a-sémiotique » car « le code binaire n'est lu par personne »[41]. Aux antipodes, ce qui apparaitrait comme naturel à l'écran relèverait véritablement d'une « traduction » c'est-à-dire d'une entière construction du texte visuel dont les règles seraient « autant d'instrumentalisations secrètes, de la lecture »[42].

---

[37] Voir Jeanneret (2001).
[38] Voir ENAC (2011).
[39] Pour une description de la scène interprétative voir Fontanille (2008).
[40] Voir Jeanneret (2001).
[41] Jeanneret (2001) aurait pu ici évoquer l'exception que représente « Néo » le héros du film *Matrix* des frères Wachowski. Ce dernier se libère d'une matrice invisible (ou visible seulement par les initiés) par l'acquisition des compétences démiurgiques de lecture/écriture.
[42] Voir Jeanneret (2001).

Dans sa vision extrême, la visualisation ne peut être uniquement déterminée par la cible, car si l'objectif unique est le « pouvoir observer », le fait de rendre reconnaissable et descriptible la visualisation garantit seulement la performance d'identification (la reconnaissance) mais ne garantit plus celle de détection (la valeur d'indice de l'image). En effet, l'application des normes de « lisibilité » de l'image pourrait se révéler tellement envahissante (par exemple en sélectionnant d'office des formes canoniques à partir de quelques données sources compatibles) que la visualisation en question n'aurait plus rien à voir avec la forme sensible de l'objet contenu dans le bagage. Nous pourrions, à titre d'illustration, imaginer un delirium machinique qui conduirait à l'iconisation parfaitement réussie de quelque « éléphant rose ». Il y a donc là un problème d'authentification de l'horizon des images, c'est-à-dire selon Bordron de « ce dont ils sont l'indice »[43].

La pratique de sûreté doit donc trouver un compromis entre les données issues de l'expérience technologique, garantes de l'authenticité et son accessibilité facilitant l'observation et la description.

Pour cela, la matrice numérique doit contenir des actants de contrôle de l'interaction entre source et cible que nous rangerons sous l'expression « tactiques interprétatives ».

Pouvoir observer et imitation numérique

Pour engendrer le « pouvoir observer », il faut que l'image puisse générer une reconnaissance du côté de l'observateur : nous appelons « iconisation » cette fonction de l'image. Reprenant l'analyse de Fontanille qui cite Eco et Greimas, l'iconicité de l'image d'une part « s'explique par l'équivalence entre l'expérience sensible qu'on peut en faire et celle qu'on pourrait en faire dans des conditions adaptées, de son propre référent » et d'autre part « cette équivalence est en général remplacée ou complétée par des systèmes de correspondances réglées et conventionnelles »[44]. Ainsi nous retrouverions dans nos images un mélange de ces deux manières d'iconiser. Pour regarder cela d'un peut plus près nous allons passer de la « figure » iconique au texte plastique qui la détermine.

L'image radioscopique se présente d'abord comme un système semi-symbolique « reposant sur la relation entre deux contrastes, entre le clair et le sombre d'une part, le plein et le vide d'autre part »[45].

/Sombre/	versus	/Clair/
« Plein »	versus	« Vide »

Ici une lecture structurale de l'image suffit à « présentifier » pour permettre la détection c'est-à-dire la révélation d'un objet dans un bagage

[43] Voir Bordron (2009).
[44] Voir Fontanille (2009).
[45] Voir Fontanille (2007).

sans pour autant statuer sur cet objet. Cette interprétation se rapprocherait du système de correspondances réglées et conventionnelles évoqué par Fontanille.

Par ailleurs, les coordonnées spatiales de chaque stimulation des rayons X ont été mémorisées et sont actualisées dans l'image. La reconstitution s'effectuant sous la forme d'une juxtaposition de pixels qui imite la configuration spatiale initiale de l'ensemble des stimuli physiques sur la surface technologique sensible, cette pixellisation disparaît avec la distance (nous l'avons vu précédemment), au point de devenir une totalité de type « fusion »[46] et fait émerger des formes par la variation de ses contrastes. Par conséquent nous glissons d'une lecture « structurale » de l'image (qui sera potentialisée) à une lecture « iconique » du contenu du bagage visualisé.

Dans notre image, l'opération première serait donc assimilée en une ségrégation de type figure / fond qui enclencherait la « quête sémantique par laquelle le regard cherche à mettre à jour [...] les formes du monde en faisant de la ressemblance iconique un critère d'élection de la figure »[47].

Comparable au « fond » décrit par le Groupe µ[48], le blanc qui domine l'image ne connait comme limite que celle de l'objet « écran » de la machine et donne ainsi l'impression de s'étendre au-delà. De la même manière, il est « indifférencié », c'est-à-dire sans variation interne et semble exister « sous » une figure qui est poussée vers l'observateur. Les stimuli sombres que nous associerons à un « non-blanc » font émerger un nouveau système semi-symbolique qui stabilise et spatialise les figures :

/Blanc/	versus	/Non-blanc/
« Fond »	versus	« Forme »
« Derrière »	versus	« Devant »

Ainsi l'actualisation de la matrice numérique use des procédés d'iconisation pour recréer l'expérience sensible du monde naturel destinée à favoriser la reconnaissance. Dans cet ordre d'idée nous pouvons évoquer rapidement d'autres « traitements » de l'image qui visent eux aussi cette persuasion par « l'imitation » du monde naturel. D'abord la transformation « renforcement de contour » renforce la schématisation déjà effectuée par les contrastes en y ajoutant une ligne épaisse, un cerne, qui délimite et renforce l'émergence et la reconnaissance des figures. Les fonctions de renforcement de contrastes visent le même objectif en travaillant sur les différences de luminance accentuant les différences locales.

Par ailleurs, si l'image radioscopique est si facilement reconnaissable et lisible, c'est aussi parce que la matrice numérique contient en elle des programmes de génération d'un genre textuel. Pour ressembler autant à

---

[46] Dont les parties ne sont séparables que par analyse. Voir Bordron (2004).
[47] Voir Beyaert-Geslin (2010).
[48] Voir Groupe µ (1992).

l'image de Wilhelm Röntgen[49], les concepteurs de la visualisation numérique ont dû expliciter les propriétés du genre « radiographique » pour cette fois encore se focaliser sur une reconnaissance de type « règle conventionnelle ». Ainsi le cadrage, le centrage des formes sont autant de manières de /faire voir/ associées au genre visuel « radiographique ».

Si l'image des années 2010 ressemble donc à celle de 1895, c'est bien la conséquence d'une imitation intentionnelle[50] du processus d'engendrement de cette image pour en faciliter le transfert des connaissances interprétatives accumulées (p. e. dans la culture médicale).

Par conséquent la matrice numérique apparaît non seulement comme le lieu de mémorisation des données source sur l'intensité et la répartition de l'énergie des rayons X, mais aussi comme le lieu de mémorisation des règles et des conventions, des processus d'engendrement qui permettent l'imitation de segments visuels du monde naturel et celle des genres visuels. Elle devient l'espace de conjonction entre une numérisation destinée à reproduire une expérience scientifique (celle de la traversée des rayons X) et celle destinée à imiter des modes génératifs.

Cependant nous avons toujours un problème véridictoire. Si l'imitation vise la révélation de l'expérience scientifique, la reproduction de l'expérience scientifique est en quelque sorte immergée voire noyée dans la visualisation. Le système de visualisation doit donc mettre en place des stratégies d'authentification pour discriminer dans le paraître ce qui relève de l'être de la source.

Un espace proxémique contrôlé

Avant de parler directement de stratégie d'authentification, nous pourrions évoquer un moyen de contrôle de la visée. Si la pixellisation déclare le mode génératif de l'image, les processus associés à son « lissage » apparaissent comme autant de camouflages destinés à maintenir une visée iconique « globale » et « distanciée » de l'image.

Dans notre image radioscopique, il n'y a pas à proprement parler d'effet de lissage de l'image. Par contre ce camouflage est bien présent dans la « limitation » du zoom (à deux fois la taille d'origine). Celle-ci trahit le besoin de maintenir l'agent de sûreté dans l'espace « global » de l'iconisation du monde naturel et du genre textuel. La pixellisation représente une menace pour la pratique d'inspection-filtrage dans le sens où, reprenant les mots de Beyaert-Geslin, « recouverte de gros pixels » la figure est « fragilisée et transformée en hypoicône »[51] (l'en deçà de l'icône) ce qui fait « résister » l'image à la « ressemblance ». Le pixel crée des effets de « masquage », il incruste le « caché » dans le « montré ».

---

[49] La première radiographie date de 1895, elle est l'œuvre de Wilhelm Röntgen, un physicien Allemand.

[50] L'imitation est différente de la reproduction dans le sens où le modèle n'est pas un énoncé mais le processus d'engendrement de l'énoncé. Pour cela voir Bordron (2004).

[51] Voir Beyaert-Geslin (2004).

De plus, cette limitation du zoom montre aussi que notre image n'échappe pas à cette « dramaturgie, où l'épaississement (pixel épais) précède la réduction (pixel fin) et pose la fine granulosité du corps mince comme visée du programme aspectuel ». Cette limitation du zoom révèle par conséquent une axiologie et une orientation discursive (le grain épais est tout autant dysphorique que le grain fin est euphorique).

Cet empêchement /faire – ne pas faire/ d'explorer la sphère intime de l'image est bien une programmation contenue dans la matrice numérique pour un maintien de la visée « pratique » d'inspection-filtrage. C'est un contrôle de « l'image événement »[52], c'est-à-dire en quelque sorte de l'instance d'énonciation (forme de la traversée des rayons X versus forme des artefacts ou du dispositif de prise d'empreinte).

Authentification, métadiscours et relecture structurale

Précédemment la mathématisation avait pour but de rapprocher / conformer l'expérience de l'image à l'expérience du monde sensible. Cependant, la matrice numérique doit contenir des tactiques pour rapprocher l'expérience de l'image de l'expérience scientifique afin de ne pas faire de fausses reconnaissances. Ces dernières rendent compte de l'existence d'une catégorie d'objets formels que nous pourrions, reprenant la métaphore de la traduction, qualifier de « faux amis » visuels. Selon Fontanille, ce problème des faux amis est décrit par celui des « types iconiques dérivés » qui se comportent comme des « attracteurs » offrant « à moindre coût cognitif » une immanence sensible erronée issue de l'expérience sensible du monde naturel au « détriment du contenu scientifique »[53]. Il faut donc que l'image mette en place des stratégies de contrôle de l'iconisation et de l'interprétation de manière à désambigüiser les figures et disqualifier les faux amis.

Une manière de les disqualifier serait par exemple de forcer l'observateur à une relecture « structurale » de l'image qui viendrait compléter et critiquer la première lecture. Ce réglage structural est l'œuvre des fausses couleurs qui viennent en quelque sorte « décoller » l'observateur de la visée iconique pour effectuer un jugement comparatif à l'aide de cette visée structurale.

Mobilisant des données présentes dans la matrice numérique, la visualisation s'engouffre dans la faille laissée par la visualisation monochrome de la radiographie classique. En effet, une dimension plastique restait inexploitée jusque là, celle de la dimension chromatique de la dominance[54].

L'image radioscopique s'est donc dotée de trois nuances : le bleu, l'orange et le vert. Ces couleurs sont toutes de saturation maximale et seule leur luminance varie pour la production des contours des figures et la lecture structurale précédemment décrite.

---

[52] Voir Bordron (2009).
[53] Fontanille (2009).
[54] Voir Groupe µ (1992, p. 227).

Du point de vue de la mathématisation, une généralisation a été effectuée visant à repérer dans les occurrences radiographiques les niveaux de gris (variation de luminance) associés à des catégories de matière.

Ainsi, si l'œil humain n'est pas capable de distinguer un niveau de gris parmi d'autres, la machine peut le mettre en valeur par une colorisation, discrétisant alors les variations continues en trois catégories : 1) les faibles densités associées aux matières organiques sont codées par de l'orange, 2) les fortes densités des matières métalliques sont bleues, 3) les densités indéterminées (situées entre ces deux extrêmes) sont vertes.

Nous obtenons alors le système semi-symbolique suivant :

/Vert/	versus	/Non-vert/
« Indéterminé »	versus	« Déterminé »
/Orange/	versus	/Bleu/
« Organique »	versus	« Métallique »

Ces fausses couleurs doivent se détacher des figures iconisées, car lors de l'interprétation l'opérateur doit différencier la visée iconique des formes de la visée structurale des couleurs. Par exemple dans une situation d'interprétation du monde naturel, cela équivaudrait au raisonnement suivant : C'est une tomate (iconisation à partir de la forme) « et » elle est rouge (saisie structurale) qui s'opposerait à « et » elle est verte.

1/ C'est une tomate	/forme tomate/	versus	/autres formes/
2/ « Et » elle est rouge	/rouge/ (réalisé)	versus	/verte/ (actualisé)
	« maturité »	versus	« non-maturité »

Ce serait vrai si, comme dans le monde naturel, il y avait une correspondance entre la couleur et la forme. Dans notre cas, celle-ci n'est pas assurée et c'est précisément cet effet rhétorique exprimé par l'image qui engage l'agent de sûreté dans une quête de vérité. Ce fonctionnement des fausses couleurs donne des propriétés factitives à l'image, celles de /faire faire/ la vérité. Si dans certaines visualisations scientifiques la colorisation vise l'imitation du monde naturel, comme c'est le cas dans la colorisation des vues du ciel obtenues par les images satellitaires (océan en bleu, forêts en vert, terre en ocre), nos couleurs se déclarent ici comme des couleurs artificielles et déclarent de la même manière leur interprétation ou lecture « structurale ». Pour exprimer cette distinction, Beyaert-Geslin emploie les expressions de « fausses vraies couleurs » (qui décrivent notre exemple des images satellitaires) et « vraies fausses couleurs » (celles de notre image radioscopique)[55].

[55] Voir Beyaert-Geslin (2009).

Ainsi une orange (le fruit) dans le monde naturel sera reconnue par sa forme ronde irrégulière et sa texture (peau d'orange) mais aussi par sa couleur typique. Cependant, dans notre image, notre fruit sera aussi de couleur orange, mais pour des raisons bien différentes car dans ce cas précis la couleur ne se veut pas un « montré » conforme à l'expression sensible du monde naturel, mais un « dire » conforme aux conventions « d'écriture »[56] de l'image radioscopique. La couleur orange devient ici le code couleur correspondant aux matières organiques qui constituent le fruit.

Un exemple simple dans la sûreté du transport aérien illustre cette fonction d'authentification par la relecture structurale de l'image. Imaginons un agent de sûreté qui reconnait la forme iconisée d'une arme à feu. Cette forme est colorisée en orange. En conséquence, le sème « matière organique » de la couleur /orange/ entre en conflit sémantique avec la forme /arme à feu/ qui contient le sème « matière métallique ». Les données ontologiques de la colorisation étant hiérarchiquement plus fiables que les iconisations, l'agent de sûreté doit de nouveau catégoriser l'expression sensible en présence. Par exemple il pourra classer l'arme à feu dans la catégorie « jouet pour enfant » ou du moins « arme factice »[57]. La lecture structurale a donc le dernier mot dans l'interprétation de l'image.

Fiabilité du dire machinique et patine numérique

Un dernier point pose problème. Comment faire confiance dans le « dire » de la machine et comment établir un lien entre « foi perceptive » de l'observation directe et « adhésion » à la parole de la machine ? Cette question nous amène à celle plus générale de la fiabilité.

La fiabilité repose d'abord matériellement sur « les changements d'équilibre entre les forces de cohésion, qui pérennisent, et les forces de dispersion, qui détruisent »[58]. Seulement, si la fiabilité en une machine relève bien de sa capacité fonctionnelle à reproduire de l'identique corrélativement à la capacité de résistance de ses constituants matériels, dans le cas présent nous observons une véritable « contamination » qui partant de la résistance des matériaux se communique à la résistance du lien entre l'énonciateur machine et l'énonciataire humain, un glissement de la fiabilité d'un « état de chose » vers un « état d'âme »[59].

Dans la pratique d'étalonnage[60], nous assistons littéralement à un déplacement du lieu de l'événement visé par l'observateur de l'image. Il ne s'agit plus ici de repérer les objets formels de l'image ni d'évaluer leur correspondance avec les « fausses couleurs » mais d'appréhender le niveau

[56] Voir l'image « écriture » dans Bordron (2009).
[57] Dans la règlementation, le traitement d'une arme factice sera le même que pour celui d'une arme réelle pour diverses raisons (p. e. utilisation d'une arme factice pour terroriser les passagers, ou arme à feu réelle en carbone).
[58] Voir Fontanille et Zilberberg (1998, p. 205).
[59] Voir Fontanille et Zilberberg (1998).
[60] On emploie aussi l'anglicisme « calibration » qui est différent du « calibrage » français.

de fiabilité du « dire » radiographique qui équivaudrait à une forme de « patine numérique ».

En effet, dans cette situation nous disposons d'un étalon, c'est-à-dire un objet réel déjà connu (une expérience sensible du monde naturel stabilisée) dont l'expression radiographique est tout aussi stabilisée et partagée au sein de la communauté des interprètes de l'image. On en déduit donc que « le lien » entre l'expérience sensible de l'objet du monde naturel et l'expérience de l'image radioscopique de l'image est, lui aussi, définitivement stabilisé. Ainsi, cette situation convoque une « image écriture »[61] dans laquelle l'opérateur va chercher un « écart » avec la norme d'écriture (l'étalon). Cet écart qui sera quantifié visuellement constitue en quelque sorte une empreinte de l'usure des composants électroniques de la machine mais aussi celle de la dégradation du lien fiduciaire entre l'énonciateur et son énonciataire.

Ici, visualisation et mathématisation sont intimement mêlées. L'écart est tout d'abord visuel (un écart d'une dimension plastique avec celle prototypique de l'étalon), mais son réglage par l'étalonnage engage des transformations qui relèvent de la mathématisation. Il peut donc être quantifié, objectivé par les données fournies par la matrice.

Pour prendre un exemple plus accessible, certains modèles de scanner demandent à leurs utilisateurs de redéfinir régulièrement le niveau de « blanc »[62]. Plus précisément, pour établir la correspondance entre l'affichage de l'écran et la valeur dans le monde naturel, on demande à l'utilisateur de mettre une feuille blanche dans le scanner. Si l'affichage apparaît en gris, l'utilisateur doit alors régler par une interface la couleur jusqu'à l'obtention d'un blanc conforme à sa « foi perceptive ». Ce déplacement « dans l'écran » se double alors d'une transformation des données conservées dans la matrice numérique. L'écart au blanc est donc évalué visuellement et ajusté mathématiquement. Par conséquent la matrice numérique est bien la garante du lien fiduciaire entre l'énonciateur et l'énonciataire.

Conclusion

Adaptée aux exigences globales de prudence et d'inspection-filtrage de la sûreté, l'image radioscopique répond plus précisément aux objectifs de détection et d'identification. Si le premier a rapidement été associé à la prise d'empreinte et à la dimension « autographique » de la visualisation, le second s'intègre dans un objectif « d'accessibilité » ou de lisibilité de l'image. Du côté de la détection, l'espace vide du « blanc » est contredit par la présence indicielle du « gris ». La matrice numérique opère là une « transduction », c'est-à-dire une communication fidèle des niveaux d'énergie des rayons X sur la surface des capteurs électroniques.

---

[61] Voir Bordron (2009).

[62] Vous trouverez un exemple p. 19 d'un manuel utilisateur situé à l'adresse web suivante : http://g-ecx.images-amazon.com/images/G/08/electronics/manuals/jennanth/new/Plustek_Opticard820._V173884577_.pdf (consulté le 25 mai 2011).

Seulement, cette transduction ne peut être totale, car le « pouvoir voir » du montré radiologique doit laisser place au « pouvoir observer » de la pratique d'inspection-filtrage. Pour cela la matrice numérique opère donc une « traduction », c'est-à-dire une conjonction de la mathématisation de l'expérience scientifique « occurrence » et de celle d'une expérience sensible « type ». Dans ce rôle d'iconisation, la matrice numérique vise tant l'imitation de la sémiotique visuelle du monde naturel que celle du genre textuel « radiographique » de manière à engendrer la reconnaissance et le transfert des savoir-faire. C'est précisément dans cette opération que nous avons décrit le mieux cette hybridation du sensible et du numérique, cette commutation décrite par Couchot qui « corporéise le monde » et « scientifise » l'expérience sensible[63]. Ceci étant, nous avons pu relever la nécessité de réguler le rapport entre cette transduction et cette traduction pour obtenir le meilleur compromis entre « authenticité » et « accessibilité ». Ce troisième rôle joué par la matrice est celui des tactiques interprétatives permettant de contrôler et protéger l'iconisation de la production des « faux amis » par un commentaire critique « structural » effectué par les fausses couleurs, mais aussi de maintenir l'interprète « à distance » dans l'espace de l'iconisation des figures du monde naturel par la limitation du zoom et enfin de vérifier et maintenir l'adhésion de l'interprète en la parole de la machine par l'opération d'étalonnage qui vise la fiabilité du lien entre visualisation et mathématisation.

Comme l'histoire des techniques nous informe sur la manière de dépasser les limites physiques et mentales de l'homme, le programme informatique que l'on pourrait comparer à une prothèse (remplacement) et orthèse (correction) de nature conceptuelle, pourrait dans ce cas précis nous apprendre beaucoup sur ces expériences scientifiques situées en dehors de nos sens humains. En effet tous les algorithmes nécessaires aux ajustements, à l'accessibilité de l'empreinte du phénomène scientifique ne font que mettre en évidence les différences entre les expériences sensibles du monde naturel et les expériences scientifiques de ce même monde.

Cette construction par contraste pourrait, on le suppose, donner accès aux propriétés syntaxiques de ce qui s'apparenterait vraisemblablement à un champ sensoriel des expériences scientifiques. Ce serait alors une démarche réellement fascinante que cette description de nouvelles formes de sensibilités « extensives » réalisées par l'interaction entre l'homme et la machine.

Bibliographie

Anne Beyaert-Geslin, « L'esthétique du pixel (l'accentuation de la texture dans l'œuvre graphique de John Maeda) », *Communication et Langage*, 138, 2003, pp. 23-37.

—, « Crénelage, capiton et métadiscours (où l'image numérique résiste à la ressemblance) », *Protée*, 32-2, Université du Québec à Chicoutimi, 2004, pp. 75-83.

[63] Voir Couchot (1998, p. 155).

—, « Faire un point », *Nouveaux Actes Sémiotiques. Actes de colloque Arts du faire : production et expertise.* Université de Limoges, 2006. http://www.revues.unilim.fr/nas/.
—, *L'image préoccupée,* Paris, Hermes – Lavoisier, 2009.
—, « La photographie aérienne, l'échelle, le point de vue », *Protée. Regards croisés sur les images scientifiques*, 37-3, Université du Québec à Chicoutimi, 2009, pp. 57-64.
—, « La figure, le fond, le gouffre (En hommage au Groupe µ) », *Nouveaux Actes Sémiotiques.* Université de Limoges, http://revues.unilim/nas/, 2010.
Jean-François Bordron, « L'iconicité », *Ateliers de sémiotique visuelle,* Anne Hénault et Anne Beyaert (dirs), Paris, P.U.F., 2004, pp. 121-154.
—,« Expérience d'objet, expérience d'image », *Visible. Images et dispositifs de visualisation scientifiques*, 5, PULIM, 2009.
Per Aage Brandt, « Nouvelles remarques sur la véridiction », *Nouveaux actes sémiotiques. Niveaux et stratégies de la véridiction*, PULIM, 1995.
Marion Colas-Blaise, « L'énonciation à la croisée des approches, comment faire dialoguer la linguistique et la sémiotique ? », *Signata. Annales des sémiotiques. Cartographie de la sémiotique actuelle*, 1, 2010.
Edmond Couchot, *La technologie dans l'art : de la photographie à la réalité virtuelle*, Nîmes, Jacqueline Chambon, 1998.
Maria Giulia Dondero, « L'image scientifique : de la visualisation à la mathématisation et retour », *Nouveaux Actes Sémiotiques. Recherches sémiotiques,* Université de Limoges. http://revues.unilim/nas/, 2009.
ENAC Sûreté, « Connaissances techniques », *Certification des formateurs. Domaine imagerie*, Toulouse, ENAC, 2011.
Roberto Flores, « Les jeux de la véridiction dans l'interaction », *Nouveaux actes sémiotiques. Niveaux et stratégies de la véridiction,* PULIM, 1995.
Jacques Fontanille, « Les systèmes d'imagerie scientifique. Questions sémiotiques », *E/C. Rivista dell'Associazione Italiana di Studi Semiotici on-line*, 2007. http://www.ec-aiss.it/pdf/fontanille_2_5_07.pdf.
—, *Pratiques sémiotiques*, Paris, PUF, 2008.
—, *Soma et sema,* Paris, Maisonneuve & Larosse, 2004.
—, « Le "réalisme" paradoxal de l'imagerie scientifique », *Visible. Images et dispositifs de visualisation scientifiques,* 5, PULIM, 2009.
Jacques Fontanille et Claude Zilberberg, *Tension et signification,* Liège, Mardaga, 1998.
Algirdas Julien Greimas, *Du Sens II,* Paris, Seuil, 1983.
Algirdas Julien Greimas, et Joseph Courtes, *Sémiotique, dictionnaire raisonné de la théorie du langage,* Paris, Hachette, 1993.
—, *Sémiotique, dictionnaire raisonné de la théorie du langage, Tome 2,* Paris, Hachette, 1986.
Groupe µ, *Traité du signe visuel, Pour une rhétorique de l'image*, Paris, Seuil, 1992.
Yves Jeanneret, « Informatic literacy : manifestations, captations et déceptions dans le texte informatisé », *Spirale. Revue de recherches en Education*, Lille, 2001.
Jean-Marie Klinkenberg, *Précis de sémiotique générale,* Paris, Seuil (= Points Essais), 1996.
Eric Landowski, « Avoir Prise, donner prise », *Nouveaux Actes Sémiotiques, 112,* Université de Limoges, 2009. http://revues.unilim.fr/nas/.
Philippe Légé, *Sécurité et sûreté des transports. Etat de l'art,* Bron, INRETS, 2008.
Michael Lynch, « La rétine extériorisée. Sélection et mathématisation des documents visuels », *Culture technique,* 1985.

OACI. *Annexe 17 à la convention relative à l'aviation civile internationale.* Montréal, OACI, 2006.

—, Les facteurs humains dans les opérations de sûreté de l'aviation civile, Montréal, OACI, 2002.

Mathematical Infinity « *in prospettiva* » and Spaces of Possibilities[1]

Giuseppe LONGO
CNRS, CREA, École Polytechnique, et CIRPHLES, ENS, Paris

A Short Introduction to Infinity

There is no space in ancient Greek geometry. By tracing lines, using the ruler and compass as we would say today, measurements are made, *figures* are constructed, but without an « infinite container » that would be « behind » them. Symmetries – rotations and translations – produce the proof, in the finite. And potential infinity (*apeiron*, unbounded) is constructed by means of *extensions* and *iterations*. The segment is *extended without a finite boundary* into a straight line *eis apeiron* – towards infinity, or with no limit (Euclid's second axiom). If we give ourselves a collection of prime numbers, we can construct a new number which is larger than any element of that collection (Euclid's theorem on the infinitude of prime numbers) ; an extension and an endless *iteration* of the finite, from the gesture which traces the line to the construction of integers. Time is infinite in this sense, never being present in our mind in its whole totality. Infinity is not that beyond where there is nothing, says Aristotle in his *Physics*, but that beyond where there is always something. It is a potential.

Paolo Zellini[2] explains that the Aristotelian distinction between this mathematical infinity to be constructed step by step and the infinity which is « already » there, actually, and which encompasses everything, will be revived with intensity during the medieval period's metaphysical debate. God is an infinity that is all-encompassing and beyond which there is nothing. But this concept of actual infinity is not so simple. Aristotelians understand it through negation, following Aristotle. But God cannot have a negative

[1] Original version, in French, in *Le formalisme en action : aspects mathématiques et philosophiques*, J. Benoist, T. Paul (eds), Hermann, 2012.
[2] P. Zellini, *A brief History of Infinity*, New York, Penguin, 2005 (in Italian : Adelphi, Roma, 1980).

attribute. What St-Thomas will do is to exclude the existence of such actual infinity *except* as attribute of God and of God alone. And this concept of actual infinity will be reinforced ; it will take form *positively* in the minds of men. To a point where the Bishop of Paris, Etienne Templier, will decree in 1277 that actual infinity constitutes a positive attribute of God and of Creation. God, when He so desires, also introduces actual infinity into the world, for example by bestowing Full and Infinite Grace upon a finite woman, Mary – and the stakes were ready for anyone who would disagree. This firm « axiomatic posture » certainly contributed to stabilize the concept of infinity.

Zellini is correct in emphasizing the importance of this debate with respect to the birth of a cosmology of infinity which will reach its plenitude, at first mystical, and then scientific, in the infinite Universe and « *gli infiniti mondi* » of Nicholas of Cusa (1401-1464) and Giordano Bruno (1548-1600).

Infinity in Painting[3]

The concept of actual infinity is therefore shaped by a metaphysical debate, which circumscribes infinity into a single « thing », forcing the mind to conceive of it in its totality. How will it be picked up by Mathematics, which will make of it a rigorous object of discourse, or even a component of proof ?

The passage will occur with the invention of perspective (« *prospettiva* ») in Italian Renaissance painting.[4]

The issue of the representation of the space within which to set narrative figures will become a central concern for painters from the end of the XIIIth century onwards. Giottesque « boxes » (those « doll houses », lacking a wall, exposed to the spectator) are settings, in a « local space », that have for purpose to contain the *historia* and to make intelligible the theological teaching. Yet, there is no global organization of space in the painting, no projective line or point, proposing a « perspective ». And Giotto’s bodily masses construct/force tri-dimensional space as « depth » also as a tool for representing suffering : the green heavy body at the lower center, the movements of the arms, the desperation of the angels (Figure 1) :

---

[3] This section is mostly the work of my daughter Sara Longo, whom I thank for everything she has taught me on the subject as well as for her contribution to this article. Please refer to her Doctoral Thesis in Art History *Voir et savoirs dans la théorie de l'art de Daniel Arasse* (in progress) and to her works, in particular *L’annonciation en Italie. Enjeux méthodologiques et historiographiques, autour du colloque florentin de 1986*, ‘*La perspective de l’Annonciation’, présentation d’une étude de Daniel Arasse* and « L’intervalle sacré », project for *Studiolo*, revue de l'Académie de France à Rome (to appear), for a much deeper reflection on these topics (see also : http://hicsa.univ-paris1.fr/page.php?r=23&id=216&lang=fr).

[4] In Italy, there was at the time a heated debate regarding which name to attribute to this new technique : « perspettiva », « seeing through », which will pass into other languages or, more relevantly, a choice of *viewpoint*, a « prospettiva », as we will see.

Figure 1. Giotto, *Deposizione*, Cappella degli Scrovegni, Padova, 1303 – 1306.
Reproduit avec l'aimable autorisation de la commune de Padova,
Ministère de la Culture.

The geometric perspective, closely experimented by Filippo Brunelleschi in 1417, was defined in 1435 by Leon Battista Alberti as the result of a construction where man is at the origin of all measurement (see Alberti, *De pictura*, I, 19) and where infinity, the convergence point for the orthogonal lines at the base of the painting, is contained, enclosed within the representation. Since the '80s and in reaction to the inaugural article by Erwin Panofsky (*Perspective as Symbolic Form*, 1925), art historians, such as Hubert Damisch and Louis Marin in Paris, highlighted the importance of the pictorial revolutions constituted by the invention of *costruzione leggittima*.

If Erwin Panofsky had designated Ambrogio Lorenzetti's *Annunciation* (figure 2) as being the first geometric construction where vanishing lines converge not towards a single point, but towards a single vertical axis (the column separating Gabriel and Mary), Daniel Arasse will go further to extend this intuition to the quite particular surge in complex geometric constructions to be found in annunciation scenes. His argument is quite relevant with respect to our topic : the particular affinity which existed, during the XVth century, between the Annunciation and perspective, is due to the fact that in Christian history, the moment where infinity entered the realm of the finite was that of the miraculous arrival of the son of God born into a human body, Full of infinite Grace. To support his argument, the author bases himself also on a sermon pronounced by Saint Bernardino of Siena, spoken in the Campo in Siena in 1427 : the Annunciation is the moment where « immensity comes in measurement […], the unfigurable in the figure, the uncircumscribable in place, the invisible in vision [...], length in brevity, breadth in narrowness, height in lowness »[5], a number of conceptual paradoxes which are at the origin of spatial paradoxes produced by painters, who brought infinity in the painting, as stressed by Alberti. Daniel Arasse highlights how the most skillful perspectivists play with the rules of geometric perspective in order to show the paradoxical entry of infinity into the finite.

Figure 2. Ambrogio Lorenzetti *Annunciazione*, Pinacoteca Nazionale di Siena, 1344. Reproduit avec l'autorisation du Ministère des arts et des activités culturelles. Photo de la BSAE, Sienne et Grosseto

In Lorenzetti's *Annunciation*, a column, often a symbol of Christ, very tangible near the ground, is attenuated towards the top where it overlaps and hides the vanishing *axis* of perspective, at infinity, an explicit reference to God. In 1344, this was an extraordinary innovation : a rigorously drawn projective space. And then, by the effect of the geometry of this floor that goes from man to God, a new space is deployed : God is present in the story being told, albeit hidden, far away at infinity. And the Madonna has a new human dimension : her solid, three-dimensional body accompanies the expression of a nascent humanism. Perspective introduces God as the actual limit, at infinity, therefore as the limit of a space which encompasses everything, including the human spaces which are renewed. And all of the first paintings with *prospettiva* will be annunciations, this unique locus of the meeting between infinitude and finitude. Then, with Piero della Francesca, this painterly exposition of a metaphysical position will also become a technique, without necessarily loosing its religious undertone. Piero's book,

[5] Saint Bernardino of Siena, *De triplici Christi nativitate*, in *Opera omnia*, Venice, 1745, IV, p. 3, quoted in *San Bernardino de Siena, Pagine scelte*, Milan, 1950, p. 54.

De prospectiva pingendi, is a real practical geometry treatise, the most important mathematical text of its time as Vasari will state.

Now *prospettiva* enables the painter to organize the space of men and things as well as to select a point of view. The choice of the location of the vanishing *point* determines the spectator's *point of view* ; it proposes/imposes the way the scene is gazed upon, for example humbly from a low standpoint as in this representation of Saint Sebastian the martyr by Antonello da Messina (1476).

Figure 3. Antonello da Messina, *San Sebastiano*, Gemäldegalerie, Dresden.

And so this metaphysical and religious cosmology becomes a geometry of space : God, the stars and men will find a new position within it, organized by means of a unifying and *modifiable* point of view. We are quite far from the absolutes beyond the world and beyond space that we had with Byzantine mosaics, for instance in Ravenna.

This (re-)organization of space, this new talent for choosing a *prospettiva*, a technique that will soon become widespread in Europe, will help Copernicus, Kepler and Galileo to « see » the solar system from the « point of view of the Sun », the new *prospettiva* of modern science[6].

Intermezzo : the Boundary of Time and Algebra

Since Aristotle, time is considered as a paradigmatic form of potential infinity, because it is never present in its totality in our mind. In fact, which

[6] This is a remark in B. C. van Frassen, *An introduction to the Philosophy of Space and Time*, Random House, New York, 1970.

« temporal » sense would have its projective limit[7] ? However, it is interesting to see that this new arrival, in mathematics, the concept of actual infinity, was constituted through a religious debate, and came to be through painting, the latter being explicitly mathematized, in particular by the great painter and geometer Piero della Francesca. Note though that the conceptual and geometric construction of an infinite space does not necessary base itself on actual infinity : Descartes' space can very well be conceived of as potential infinity produced, in principle, by an endless extension from its point of origin. Yet, infinite spaces were first conceived in paintings, by « projection ». Clearly, actual infinity is inherent to projective construction, when it is used for the two-dimensional representation of a three-dimensional space. And the projective point *objectivates* actual infinity : it *shows* it, there, in the depths of the painting. One may dare to summarize this process as follows. In the Renaissance, space was described in mathematics, by first drawing it in two dimensions. This made it intelligible by the actual infinity of the projective point – the result of a metaphysical debate.

Two centuries later, Desargues will render this projective synthesis between actual infinity and geometry fully mathematical. By the Differential Calculus, Newton and Leibniz will propose the analytic notions of derivative and of integral as operations at the infinite limit.

Cantor, in the 19th century, will further objectivate actual infinity, by means of a syntax, by giving it a name and associating a symbol to it. By manipulating it algebraically, up to the invention of an Arithmetic of infinites, of ordinals and of transfinite cardinals. Nothing is better for stabilizing a concept than a mathematical praxis, a technical usage of a sign for the concept of which the meaning will be enriched by this very usage. The debate on the infinity of God will also be of interest to Cantor, a deeply religious man : God will be (at) the limit of all limits, beyond these transfinites.

It must be noted that, in all of these cases, mathematical infinity is a tool for the intelligibility of the world. In Renaissance painting, projective geometry, this mystical decision, organizes the space of man, for a fuller humanity. From Descartes to the actual infinity of Newton and Leibniz, mathematical physics will make intelligible finite movements around us by means of infinity. In logic, from Gentzen (1935) onwards, the ordinal analysis of proof will be based on Cantor's Arithmetics of Infinity[8]. Besides,

---

[7] In the attempt to make Relativity compatible with the Big Bang theory, some physicists think of the origin of time as an asymptotic inverse limit, in inversion with the temporal order given by the expansion of the Universe. In fact, Noether's theorems in particular (the conservation of energy as invariant of the equations of movement by temporal translations) are at the core of the relativistic turn and are incompatible with an origin of time, see F. Bailly, G. Longo, *Mathematics and Natural Sciences : the Physical Singularity of Life*, Imperial College Press, London, 2011 (translation and revision of the book for Hermann, Paris, 2006).

[8] Infinity becomes part of proof, in fact, as infinity between algebra and geometry, that of the « well-order » of integers, G. Longo « Reflections on Concrete Incompleteness » *Philosophia Mathematica* 19(3), pp. 255-280, 2011.

as Galileo explained to Simplicius, in the analysis of a mathematical sphere based on a plan, « Mathematics is a science at the infinite limit ».[9] The finite fetichizes iteration and remains its prisoner[10]. Infinity organizes the finite. The finitist formalist who rejects infinity by declaring it beyond the world and Physics does not understand the *human sense*, with respect to our *designs* and praxis, of this gesture which sets infinity in the world, by structuring it through language, geometry and writing. The epistemology of this organizing concept must first be « historical » : a history of ideas and of the constitutive praxes, a dynamical history, to be always re-thought.

The Rational Spaces of Commerce and Physics ? [11]

The birth of modern science was achieved by the construction of an infinite space of *possibilities*, a space and time within which any possible phenomenon or physical dynamic may exist. Choosing the origin of Cartesian coordinates proposes the reference system within which physics after Galileo will be constructed. In fact, Descartes' analytical approach sets the origin and measurement of space, it gives it a *prospettiva*, enabling to frame and understand the world.

In the rich and novel Galilean relationship between experiments and theories, physical theorizing is meant to provide intelligibility of phenomena as well as predictability : one first observes and measures, then the theory should produce a prediction capable of confirming it. The scientifically, or mathematically, expected future was set at the core of the understanding of modern science. And predictions are made in the space and time of physical events, mathematically described by the Cartesian analytic representation of space enriched by Galileo's relativity : the modern space-time of phenomena is born from an analysis on how to go from one (Cartesian) reference system to another while preserving physical laws, inertial movement in particular. More precisely, in the *pre-given infinite* space-time of possible trajectories, the invariants are described as symmetries by Galileo's group.

Once again, however, I would ascribe the turning point towards the myth of a scientific *expectation of a possible* (and predictable) future to the early Italian Renaissance. The audacity of seeking for a *rational* insight into the future, within a given space of possibilities, goes back to the appreciation of progress and of possible estimates of it, in Italy, in the XIVth and XVth centuries. This is when artisan technologies, even great productive structures (the *Arsenale di Venezia* to which Galileo refers), began to change the relationship to Nature itself. And this is also when the *bank credit* was invented, at the time of Lorenzetti's painting, also in Tuscany. Mathematics

---

[9] A story which serves as starting point for a great little book, A. Gargani, *Il sapere senza fondamenti*, Einaudi, 1975.
[10] G. Châtelet, *Les enjeux du mobile*, Seuil, Paris, 1993.
[11] A preliminary version of this section appeared in blog interview form in National Public Radios (NPR, USA), http://www.npr.org/blogs/13.7/2011/06/13/137154418/are-financial-and-scientific-views-of-the-world-similar#more

will come to play a massive part in this progress : from Fibonacci da Pisa (1170 - 1250) to Luca Pacioli (1445-1517), mathematicians proposed their calculi to merchants. Pacioli, in particular, with his *Summa de Arithmetica, Geometria* and other writings, considerably developed the Arithmetics of Fibonacci and invented the « *partita doppia* », a fundamental tool for finance and commerce.

Lending money was finally allowed around the mid-XIVth century in Italy, under the form of the « letters of credit » or early paper money. No more a sin, one could *bet on possible future progress*, obtain money from a bank, then invest, *expect* the return of the money, plus interest, and also obtain personal gain. This novelty was an economic and a conceptual revolution. There was no more need for magic or divination in the expectation of progress and in the capacity to foresee the future, but instead rational, even mathematical knowledge. Of course, hazards were possible, but within a *perfectly pre-given space of possibilities* : like throwing dice—it is a risk, but within the six possible outputs, no more, no less — and the symmetries of the dice determine the probabilities. *Having expectations and betting is rational :* within a pre-given space, one can compute the probabilities and evaluate the risk.

And thus arose the society of an expected future progress, in a *predetermined list* of possible worlds — the society where one can dare to borrow and lend money as well as to construct scientific knowledge within a mathematically pre-determined albeit infinite space-time ; a science, where it is possible to predict an economical or commercial action or, by a scientific theory, the output of an experiment.

Later on, Newton and Laplace will give us the mathematics of modern « state determined systems ». Indeed, by solving Newton’s equations in the spaces of Descartes « one must be able to *predict* all future events of mechanics » (celestial mechanics, said Laplace, but he was actually thinking of the entire physical world). Pascal’s and Laplace's mathematical analysis of probabilities scientifically deal also with *unpredictability*, but randomness *is extraneous to mathematical determination* and must be analyzed statistically. In any case, for them, unpredictable events happen within the infinite but pre-determined Cartesian space of all possible trajectories and facts. This space of observables which will be successively generalized to the *phase space* (that is, of relevant observables and parameters).

In such spaces, Poincaré will integrate unpredictability with determination, by showing us the unpredictability of perfectly deterministic dynamics. Much later, quantum mechanics will integrate randomness into the theory, in the form of intrinsic indetermination. However, the space of possible « trajectories » and events will still be mathematically predetermined, whether they are infinite, from Descartes to Poincaré, or even infinite dimensional — Hilbert and Fock spaces in quantum mechanics. In these spaces, the trajectory of a law of probability, determined by Schrödinger’s equation outside of ordinary space-time, will *determine* the quantum dynamics ; the measurement, by projecting onto a real number this dynamic of a density of probability, will cause the indeterministic character of quantum mechanics. Consequently, this theory also gives, *a priori*, the spaces of all possible evolutions, which may have infinite dimensions, but will accommodate the most unpredictable quantum event, including the creation/annihilation of a quanton.

Note now that the *finite description* of these possibly infinite spaces, from Descartes to quantum spaces, is made possible by their regularities: they are given in terms of mathematical symmetries (as sets of invariants and invariant preserving transformations). Symmetries thus allow describe these strongly infinite spaces synthetically, in finite words, possibly axiomatically.

What Possible Spaces for the Evolution of Life Phenomena ?

I think that this is where we are stuck now : in the analysis of the living, both as biological and as societal entities, we understand that there is no way to (mathematically) pre-define the very space of possible evolutions, of the « phases » of life phenomena. Let's try to further clarify this claim. The randomness of dice or coin flipping, of a quantum event, as said earlier, takes place in a *pre-given* space of possible dynamics. We are able to give ourselves mathematical infinity at once, by geometry, analysis and algebra, since Lorenzetti and Piero della Francesca, and use it in physics, since Descartes, Desargues, Newton and Schrödinger's Hilbert Spaces. Their symmetries (the mathematical invariants) enable to define geometrically and formally these spaces (of phases, of possibilities).

In contrast to this mathematical predefinability of physical phase spaces, there is no way to predetermine the space of possible future phenotypes (biological forms) along evolution — and phenotypes, or even organisms, *constitute the biologically relevant observables*[12]. By no means was there a sign of the nose of mammals in the bacterial DNA of 600 million years ago, no more than there was in their forms. And we could not have placed into a list of possibilities the internal bones of their ears, as derived from the double jaw of a few vertebrates from 200 million years ago (an example of Gould-type "exaptation"). Any phenotype is the result of a vast genetic network as well as evolutionary and changing epigenetic and ecosystemic interactions.

Even next century's list of possible biological events, eukaryotes' forms for example, is not in mathematically pre-given spaces. Along evolution, phenotypes and ecosystems *co-constitute* themselves and *jointly produce* the space of possibilities. And the slightest fluctuations in these interactions within, or even between, various levels of organization do not only change « trajectories » within the phase spaces, as in physical dynamics, but change these spaces themselves. The symmetries that beautifully ruled physics are continually changed : as we summarize elsewhere, biology is *a never identical iteration of a morphogenetic process*, which simultaneously shapes the ecosystem. Structural stability preserves some global symmetries (e.g.

[12] See a soon available paper with S. Kauffman and M. Montévil for technical arguments.

basic bodily bauplans), but each mitosis is a symmetry change : the two novel cells are never identical, not even to the mother cell. This « never identical » is a change of symmetry. Typically, after a mitosis in a multicellular organism, it is due to a diversity of the proteome, of DNA, of the membranes, of chromatin …, of the reconstitution of the matrix of a tissue.

And this is fundamental for the variability and diversity that are at the core of evolution and ontogenesis. The permanent changes (in symmetry), in particularly with respect to *relevant observables*, the phenotypes, are at the basis of variability, hence of diversity, and of the very possibility of the living state of matter. They enable selection among new forms, create adaptability and contribute to the modification of the ecosystem itself.

In short, *the phylogenetic and ontogenetic trajectory of an organism is a cascade of symmetry changes*[13].

Of course, then, the exclusively molecular analyses, of which the observables are pre-definable, are intrinsically *incomplete*, albeit very useful : they do not even manage to describe the hereditary transmission of certain acquired deformations in the membrane of ciliates, nor the dynamics of the proteome during modifications induced and inherited from the lactose operon — so in this case, at a purely molecular level.

Mathematics is a science of invariants and invariant preserving transformations, hence of symmetries. Will we be able to invent new mathematics to deal with continual symmetry changes ? Why not ? The founding fathers invented their tools, the mathematics of invariance, from Euclid to Newton and Riemann and Grothendieck (a topos, a categorical notion, is the actual maximum of a philosophy of mathematics as science of invariants and invariant preserving transformations).

In any case, we need to dare, in order to deal with life as well as with economics, far away from the absurd theories of equilibrium : there is no ecosystem nor a society « at equilibrium », unless everybody is dead, not even tending or close to equilibrium. Life is not only a dynamic, a process, far away from equilibrium. It is always in « transition », on a critical threshold : from a mathematical standpoint, it is (in) an « extended critical transition » (see the book with Bailly and the paper with Montévil, both quoted). And the economy is always « in crisis ».

Intermezzo : the Possibilities of Finance

The need for change in our conceptual frameworks comes also from the recent crisis of the bank lending system, a system which contributed largely in starting the whole story six centuries ago, in Toscany : that is, the notion of progress, rational and scientific prediction, and the mathematics that will ensue. These audacious and once fruitful bets on a foreseeable future, described in a mastered list of possibilities, have now become the pure

[13] G. Longo, M. Montévil, « From Physics to Biology by Extending Criticality and Symmetry Breakings », Special issue of *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, n° 106 (2), pp. 340-347, 2011.

transferal of wealth towards the richest, totally disconnected from the work-value. The mathematics of finance provides the tools, without any further correlation with any sort of industrial or social productivity. Their objective is not prediction, but an *invention of possibilities*, that is, of constructing new possibilities for these investments/bets — the derived products, or derivatives. Its aim is not just to estimate probabilities, but more to *construct* new possibilities for bets, to shape unforeseeable markets and to distribute the risk maximally throughout the world, so that workers in China will buy the debts caused by risks taken by American finance.

Financial mathematicians have played a major role in this process. « Derived financial instruments » have been invented as « derivatives » in the mathematical sense (first, second order...) : they express tendencies. They were then combined, creating new « correlation surfaces », which compare and relate rates. The latter are also evaluations of the *tendencies* of a price, of a good, of a derived product. And the predictions which are associated with them have shaped the markets : these analysis surfaces *determine* the rates to come, because they are expected. Note that by mathematically analyzing the planets, in principle, we do not change their trajectories. In quantum physics, the instrument of measurement indeed serves as an interface with « reality » and creates a new object. But this is a « constitution of physical objectivity », always identical in principle — the experiments can be iterated. On the financial markets, predictive mathematics creates values by proposing predictions : the stock market prices largely depend on the prediction, which is a mathematical result, because they have little or no correlation to any « intrinsic » value whatsoever (work-value, typically - the value of a good as sum of all the work meant to produce it).

To summarize, in the absence of a pre-given phase space and therefore of the possible pre-definable economic evolutions, the mathematics of finance was able to play the game of inventing, without limit and outside of any shared meaning and value, possible observables and to mix them in an always new and creative way (for example, by securitization — the endless mix and embedding of securities, obscure to the buyer).

As a mathematician, I feel deeply offended by this immoral use of our beautiful science, bought with money in order to organize theft and the transferal of wealth towards the richest 1% of the world (during the Bush years, 80% of the GDP's growth was transferred to the richest 1% of Americans - an extraordinary political and mathematical feat !). We must react from both an ethical and a scientific standpoint - as, historically, mathematics has been shaped through its use. Yet we do not react.

Back to Science

So apart from mathematically organized financial swindles, rich in auto-predictive symmetries, in what concerns biological evolution, we must face a major challenge : the emergence of new « phase spaces » or, more specifically, of new observables which could require their own mathematical dimension. To give a very simple example, biological rhythms (respiration, heartbeats... invented by animals and very different from clocks and physical rhythms) are better understood by setting them in a second temporal dimension, thus by proposing a new observable. The time of life phenomena then becomes two-dimensional. Maybe we could all encode within one dimension : encoding, encoding… and loss of meaning as with all reductions, when they work.

In a book and in several downloadable papers, with Francis Bailly and Maël Montévil (see http://www.di.ens.fr/users/longo), we hinted at novel conceptual (and mathematical) structures which aim at a better understanding of the physical singularity of the living state of matter : the change of perspective regarding symmetries is at the core of our scientific proposal. The idea of a pre-given space of possibilities in which, since Lorenzetti, it is even possible to set God, no longer suffices. Predictability, not even of the space of possibilities, is no longer at the center of knowledge construction, in biology. This construction aims at the understanding of the historical contingency of life (and, eventually, society — but we will not develop our analysis that far). This must not hinder our awareness of the role of our action in a totally unpredictable world, where we judge for the better, by making explicit the perspective (and values) that guide our actions.

In short, the theoretical challenge is to invent tools for understanding, but not necessarily for prediction, as René Thom was already saying. Darwin's Theory of Evolution predicts nothing — yet it provides an extraordinary framework for knowledge. So, qualitative estimates regarding the effects of an activity may allow us to act in the world, if these estimates are grounded on criteria of robustness of development, as (increasing) *diversity* and *adaptability*. These words, in a societal context, mean justice (which alone makes a society « robust », by diversity in particular) and democracy (adaptation through change).

Science is one of our active forms of being in the world, between knowledge and praxis. We construct knowledge also to act within this world and we indeed need predictability, but it is possible that it is provisional and qualitative, that we will be required to free ourselves from the myth of these pre-given possibilities, a myth as beautiful and soothing as Piero spaces.

The only assurance we could have regarding weather an action works for the best (or according to expectancies) resides in taking an ethical stance : to be critical regarding the very principles of knowledge we employ, in science ; always maximizing democracy and justice, both locally and, as much as possible, in perspective, in societies able to change course by means of democratic control.

The Transferal of Mathematical Tools

The power and elegance of these mathematical frameworks for the intelligibility of the world, the infinite pre-given spaces, from the projective spaces of painting to the most complex phase spaces of theoretical physics, as well as their symmetries, are not adapted to phylogenetic and ontogenetic dynamics. It is therefore necessary to gain some perspective before transferring tools from the physico-mathematical to biology (and to the social sciences) and to reflect about these tools. One can get the impression that too many colleagues prefer their equations and techniques to the biological (and social) phenomena they claim to study. This was not the attitude of the revolutionary thinkers who made science by inventing their own mathematics.

In this radical lack of rational predictability, historical knowledge in biology, such as Darwinian evolution, provides the tools for understanding and acting on nature. As for societal knowledge, where decisions must be made, if an action aiming for justice produces the opposite effect (this can happen), democracy, we say, is there to ensure the adjustments, to impose a correction : it is adaptive. But this requires critical thinking, which must be at the heart of science and constitute its relationship to philosophy. This is why one of the projects of neo-liberalism is to obliterate or dilute the latter and to subordinate the former to the « market of knowledge ». Knowledge in this market must absolutely not be critical, but subordinated to expectancies and to evaluations exclusively in terms of possible applications : « there is no more difference, today, between theory and application », we are told — with the objective of breaking any theory, especially if it is critical and original, beyond of any foreseeable application. Such knowledge would be evaluated the way agencies evaluate markets : in compliance with dominant theories - and in science, by means of bibliometric indices.

To summarize and to conclude, biological and human evolution clearly produces lots of non-linear effects, upon which several mathematicians are working (and among which a rare few consider them far from equilibrium, dissipative systems, or even in critical transitions). But there is much more than that, since evolution creates new observables, in particular by permanent changes of symmetries, in fact of phase spaces. Yet, even with a minimal understanding of evolution and history, the latter being an extension of evolution through language and its writing (unexpected when looking at the first tetrapods), we can hope to better our actions, if we do it in a critical and adaptive manner. Moreover, mathematics and thought are not « already there », before our historical praxes ; they are rather co-constituted with our changing activities in this very world.

Les mathématiques,
un pont entre le visible et l'intelligible

Solomon MARCUS
Académie Roumaine

La tradition du visuel en mathématiques

Le visuel a une longue tradition et une riche motivation en mathématiques. Les *Eléments* d'Euclide abondent en représentations géométriques, bien que la méthode axiomatique déductive utilisée par Euclide ne repose pas directement sur l'aspect visuel. Mais l'intuition visuelle est essentielle dans son choix des axiomes (appelés par lui des « notions communes ») et des postulats et dans sa façon d'introduire des définitions (qui sont, en fait, ou bien des notions primitives, dont le poids intuitif fait inutile leur définition, ou bien un mélange d'intuition et de logique du sens commun). Ses preuves utilisent aussi, assez souvent, un support visuel. Le visuel, le rationnel et l'intuitif se trouvent toujours chez Euclide dans une collaboration étroite.

Les mathématiques islamiques et de la Renaissance commencent au VIII^e^ siècle, avec Al-Khwarizmi et vont jusqu'au XVI^e^ siècle, avec Cardano ; c'est une période où se manifeste une tendance d'algébrisation qui va réduire la place du visuel, mais on pratique la justification d'une formule par des moyens géométriques ou appelant à des diagrammes.

Le XVII^e^ siècle connaît deux changements majeurs : la création du calcul infinitésimal, par Newton et Leibniz, et l'algébrisation de la géométrie (source de diminution du rôle du visible), par Descartes. Un exemple typique de la nouvelle façon de faire appel au visuel est l'utilisation par Fermat d'un diagramme pour calculer l'aire délimitée par une hyperbole. On a ici une continuation des tentatives des vieux grecs de capturer des processus d'approximation à une infinité d'étapes (le cas de l'aire d'un segment de parabole), mais maintenant on est dans une situation bien plus avancée. La situation est symptomatique pour la manière dont le visuel est impliqué : plus on avance dans le processus d'approximation, plus le visible cède la place à l'intelligible dépourvu de visibilité.

Le XVIII^e^ siècle, avec Euler, D'Alembert et Lagrange, marque une orientation clairement algébrique, au détriment de la géométrie, donc du visuel. Mais, d'autre part, Kant accentue la place centrale des diagrammes et des intuitions visualisables, en mathématiques.

La rupture entre le visible et l'intelligible : le XIXe siècle

Le XIXe siècle est dramatique par au moins trois événements : l'émergence des géométries non euclidiennes, le décalage considérable entre les faits de l'analyse mathématique et notre intuition visuelle et les surprises fournies par l'exploration de l'arithmétique transfinie. On assiste à une véritable rupture entre le visible et l'intelligible, en contraste avec le développement antérieur, caractérisé par une relative concordance entre l'aspect logique et l'aspect intuitif, visible des notions et des théorèmes. Cette rupture va s'accentuer au XXe siècle, de plus en plus nombreux sont les résultats qui se trouvent en conflit avec nos attentes, avec nos représentations intuitives. La possibilité des géométries autres que celle d'Euclide est venue comme un choc logique (mettant en doute la logique d'Aristote), un choc philosophique (mettant en doute les idées de Kant), une contestation de la nature exclusivement déductive de la géométrie, qui se montre dans une dépendance essentielle de la physique. La confiance dans une séparation nette entre le sujet et l'objet, attribut important de la mentalité galiléo-newtonienne, ne résiste plus. On voit maintenant les limites du visuel. Les représentations, dans le monde euclidien, des géométries non euclidiennes, appartiennent à la stratégie de Platon proposant la métaphore de la cave. Nous sommes des êtres euclidiens, nos intuitions sont celles d'Euclide et de Newton. John Wallis [1663] a montré que le postulat des parallèles est équivalent à l'existence des figures similaires qui ne sont pas congruentes. Donc le fait que tous les cercles sont similaires est le privilège de la géométrie d'Euclide. Il s'ensuit que l'existence d'une constante universelle de la circularité est limitée à la géométrie euclidienne, par exemple, toutes les mathématiques utilisant le nombre pi sont valables seulement dans le contexte euclidien.

En ce qui concerne l'analyse mathématique, la surprise a été fournie par les fonctions continues partout non différentiables, par les fonctions jouissant de la propriété de la valeur intermédiaire (propriété de Darboux), mais partout discontinues, par la non-concordance entre les notions d'intégrale et de fonction primitive. La bataille pour la rigueur dans la définition des notions de base de l'analyse mathématique a été gagnée en payant un prix très cher : le divorce entre l'aspect logique et le support intuitif et visuel, entre signification et rigueur, entre sémantique et syntaxe. La dynamique des infinitésimaux a été remplacée par la vision statique, atemporelle du jargon epsilon-delta.

En ce qui concerne l'arithmétique transfinie de Cantor, on a adopté, par la quasi-totalité des mathématiciens, l'hypothèse de Cantor d'un isomorphisme entre cette arithmétique et l'arithmétique ordinaire, bien que les résultats de Gödel et Cohen concernant l'axiome du choix et l'hypothèse du continu réclamaient une attitude plus réservée. Mais les résultats récents mettent en doute la consécutivité du dénombrable et du continu (le premier problème de

Hilbert ; voir Woodin [1999]). On attend une nouvelle axiomatisation de la théorie des ensembles ? Il s'ensuit que l'on ne sait pas encore si la nature visible de séquence associée aux nombres naturels se retrouve dans l'ensemble des cardinaux transfinis.

Et pourtant, le visible reste très important

Si Kant restait au XVIII[e] siècle, avec son accent sur l'intuition visuelle, une île de résistance contre la domination de l'esprit algébrique, Ch. S. Peirce a joué le rôle de défendre dans le XIX[e] siècle, l'importance du visuel, avec sa pensée diagrammatique. En essence, cette pensée repose sur une métaphore qui allait avoir un rôle essentiel au XX[e] siècle : la métaphore de la flèche ; voir la théorie des catégories d'Eilenberg & McLane. Cette métaphore semble exprimer un aspect essentiel de notre approche du monde ainsi que de l'architecture de notre cerveau car cette architecture fait l'objet des mathématiques dans la même mesure que le monde qui nous entoure. Par les mathématiques, notre pensée se rapporte non seulement à la réalité extérieure, mais aussi à elle-même. C'est ici à la fois sa faiblesse et sa force.

Si la forme principale du langage naturel est la variante parlée, la variante écrite étant secondaire, pour le langage mathématique c'est l'opposé. Sans sous-estimer l'importance du discours parlé du mathématicien, c'est seulement la variante écrite qui permet la validation d'un résultat mathématique. Mais cette variante appartient au visuel. Il faut aussi souligner que les mathématiques sont usuellement présentées, pour des raisons d'économie, sous une forme linéaire, mais dans leur vraie nature elles sont bidimensionnelles et parfois tridimensionnelles, si l'on tient compte de la nature de tous les symboles et de toutes les expressions, ainsi que de toutes les représentations graphiques et parfois des programmes de calculateur appartenant à la composante artificielle du langage mathématique. Le discours mathématique, dans sa forme la plus complexe, est aujourd'hui une véritable *polyphonie* (Bakhtin), une *orchestre* (Pontriagin), un *montage vertical* dans la façon proposée par Eisenstein pour le film. A. J. Greimas a proposé la distinction entre le *linéaire* et le *modulaire*, en ce qui concerne la poésie, tenant compte de sa tendance (manifestée par les divers aspects de la prosodie) à s'évader du linéaire du langage commun et à s'inscrire dans une structure polydimensionnelle. C'est exactement la même tendance, bien que pour des raisons différentes, qui se manifeste en mathématiques. Mais, à vrai dire, l'explication de cette similarité est très simple. La poésie et les mathématiques sont des produits de la créativité humaine, qui a besoin de la contribution des deux hémisphères du cerveau. Il est vrai que les structures logiques et du langage sont le privilège de l'hémisphère gauche du cerveau, mais ça concerne seulement la façade des mathématiques. Dans leur laboratoire de création, les mathématiques ont besoin de l'intuition et de l'imagination qui se trouvent sous le contrôle de l'hémisphère droit du cerveau. Il semble que la psychologie de la créativité est la même pour les sciences et pour les arts (Hadamard, Poincaré 1963).

Un autre argument fort en faveur du visuel est sa priorité par rapport à tout autre sens, dans le domaine de la synaesthesia ; voir, par exemple, Erzsebet [1970]. Tout autre sens fait appel au potentiel métaphorique du visuel.

Le visible stimule la vocation anaphorique et cataphorique du langage mathématique

Etant donnée la nature écrite, graphique, donc visible du langage mathématique, ce langage a une fixité et une stabilité qui permettent facilement de regarder le développement antérieur du discours mathématique, qui est l'objet des relations anaphoriques et, pour des raisons de symétrie, on peut aussi faire référence au développement ultérieur, qui est l'objet des relations cataphoriques. Les structures anaphoriques et cataphoriques sont systématiquement utilisées. Les références peuvent concerner des parties situées à une distance arbitraire, à gauche ou à droite, fait dicté par la manière de construction en étapes du texte mathématique, où chaque étape est explicitement basée sur les étapes antérieures. Ces flèches allant de droite à gauche sont la source des structures anaphoriques du texte, tandis que celles allant de gauche à droite sont la source des structures cataphoriques. Pratiquement, il faut fréquemment tourner les pages, lorsqu'on lit un texte mathématique. Le renvoi est une de ses marques caractéristiques. Ce fait donne aux textes mathématiques un statut de lien organique entre le local et le global, entre la partie et la totalité, impliquant la possibilité et le risque d'invalider un texte très long comme effet d'une erreur locale.

Les métaphores visuelles de la composante artificielle

Le besoin de donner aux acquisitions antérieures une expression aussi simple que possible mène à l'introduction de certains symboles artificiels qui vont remplacer des constructions compliquées en langue naturelle. Ainsi prend naissance la composante artificielle du langage mathématique, qui est essentiellement visuelle. Cette composante imite, à certains égards, la structure du langage naturel ; par exemple, elle utilise systématiquement des métaphores visuelles qui s'organisent dans une suite de métaphores. Les signes + et – connaissent un transfert métaphorique des nombres naturels aux nombres entiers, puis un autre transfert, allant des nombres entiers aux nombres rationnels, puis un troisième transfert métaphorique, allant des nombres rationnels aux nombres réels et on peut aller plus loin. Il y a ensuite des analogies menant à ce qu'on pourrait considérer des *semi-métaphores***,** par exemple, le passage des signes de réunion et d'intersection des ensembles aux signes de disjonction et de conjonction des propositions logiques ou le passage allant de la lettre S (somme) au signe de l'intégrale de l'analyse mathématique. Voir mieux dans Marcus [1973, 1990].

On voit seulement ce qui est continu, on comprend seulement ce qui est fini

C'est la remarque de René Thom (1993 : 85-86). Il y a un conflit entre le visible et l'intelligible, ces deux attributs ont besoin l'un de l'autre, mais en même temps sont incompatibles. On comprend seulement ce qui est fini, mais on voit effectivement seulement ce qui est continu. Le fini est un cas particulier du discret, qui est le contraire du continu. Bertrand Russell attirait l'attention, il y a plus d'une centaine d'années, sur le fait qu'une discipline ne peut pas devenir une science si elle n'est pas capable de quantifier son domaine, en partant d'un inventaire d'unités de base. Ferdinand de Saussure avait la même conception, avec application à la linguistique, où il a montré comment, partant de la phonétique, qui est le domaine du continu, on peut arriver à la phonologie, qui est le domaine du discret. Le continu sonore est perceptible et visible dans une représentation graphique, il est le point de départ pour construire le domaine plus abstrait de la phonologie. Les phonèmes sont des unités invisibles, mais intelligibles. L'itinéraire menant du continu sonore de la parole au discret abstrait de la langue est justement l'action du linguiste. Réduire le nombre des paramètres d'un problème à un nombre fini aussi petit que possible c'est le but de toute recherche scientifique.

On comprend ainsi pourquoi on donne une attention systématique à l'étude du continu à l'aide du dénombrable et à l'étude du dénombrable à l'aide du fini. Dans ces processus d'approximation, leur compléxité est essentielle ; si elle est trop grande, l'approximation respective est compromise.

Mais il y a aussi maintenant l'approximation du fini à l'aide du dénombrable. Par exemple, un fragment fini d'un langage est prolongé en une suite infinie, dont la structure générative et analytique est attribuée, par approximation, au fragment envisagé. Cette opération est appelée *inférence grammaticale*. On doit choisir une variante parmi une infinité de variantes possibles. Ce choix décide notre lecture du fragment envisagé.

On constate donc que la tendance d'interpréter « voir » comme « comprendre » (surtout en anglais, « I see » signifie souvent « I understand ») est en conflit avec la réalité.

Le désordre n'est jamais total

Le paradoxe de la situation présentée ci-dessus est le fait que le fini est dépourvu de structure. Dès qu'on cherche à transgresser la nature amorphe du fini, on va introduire une règle, qui conduit inévitablement à un ensemble infini ou à une suite infinie. La façon humaine de lire le fini est de le plonger dans une entité infinie, afin de lui attribuer un ordre. C'est la façon d'utiliser les grammaires formelles dans l'étude des langues naturelles.

D'autre part, il semble que le désordre total n'est pas accessible à un être humain. La théorie de Ramsey a comme slogan la remarque de T. S. Motzkin : « Le désordre complet est impossible. À l'intérieur de chaque structure assez large il y a une plus petite structure très régulière » ; voir la

Préface du livre de Graham-Rothschild-Spencer (1990). On cite à cet égard le théorème de Van der Waerden (Si les entiers positifs sont coloriés avec un nombre fini de couleurs, alors il y aura une classe d'entiers de la même couleur, contenant trois nombres x, y, z tels que x + y = z) et le théorème de Ramsey (Si un graphe G a un nombre assez large de sommets, nombre qui dépend de k, alors il y a dans G un sous-ensemble de k sommets qui est ou bien complet, ou bien indépendant).

L'arbitraire, lui aussi, peut nous tromper. Des expressions comme « ensemble arbitraire » et « fonction arbitraire » sont au-delà du visuel. Tracer un triangle arbitraire c'est impossible. Il y a des théorèmes qui confirment les contraintes d'un ensemble arbitraire de points sur la droite (Lebesgue) ou d'une fonction réelle arbitraire d'une variable réelle (Blumberg, Sierpinski).

L'aléatoire (au sens de Kolmogorov & Chaitin) aussi implique un ordre. On donne d'habitude l'exemple frappant suivant. Un mot infini aléatoire sur l'alphabet du français inclut comme un sous-mot fini « Les fleurs du mal » de Baudelaire. Le chaotique, à son tour, révèle un ordre caché, qui se manifeste dans la structure, souvent visible, des attracteurs du système dynamique envisagé.

Mais l'ordre mathématique peut manifester une opposition brutale avec notre intuition et avec notre perception visuelle. Presque tous les systèmes dynamiques sont chaotiques, presque toutes les fonctions continues dans un intervalle I ne sont monotones dans aucun intervalle contenu dans I.

Il semble parfois que l'intelligible et le visible sont dans un état de guerre.

La géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses

Cette remarque, attribuée à Henri Poincaré, mérite une attention spéciale, elle est d'ailleurs en connexion avec la remarque de Thom, discutée ci-dessus et avec l'interaction du discret avec le continu. Prenons les définitions 1 et 2 du *Livre I des Eléments d'Euclide* : un point est ce qui n'a pas de parties ; une ligne est une longueur sans épaisseur. Deux choses sont importantes ici ; les objets mathématiques appartiennent à un univers de fiction (il n'y a pas dans l'univers observable des points et des lignes d'Euclide) ; dès qu'on veut les représenter visuellement, on va les falsifier, le point aura des parties et la ligne aura une épaisseur, donc on arrive à la situation signalée par Poincaré.

Ce scénario se répète toujours ; le cas le plus significatif est celui des objets fractals. Comme objet mathématique, un fractal est le résultat d'un comportement asymptotique, la limite d'une suite infinie dont les premières étapes admettent une représentation visuelle ; mais cette représentation devient de plus en plus faible et disparaît totalement à la limite. De cette façon, un objet fractal au sens mathématique du mot est parfaitement intelligible, mais totalement invisible. Pour combler ce contraste, on adopte comme un compromis la représentation d'un objet fractal par ses approximations visibles. Les boules de neige (courbe de Koch) deviennent ainsi des objets fractals visuellement très beaux. On est ainsi exactement dans la situation de Poincaré. Malgré la fausseté de la représentation, on ne peut pas nier l'avantage de cette démarche, car on est toujours dans la situation d'utiliser l'approximation. La plupart des nombres réels sont connus seulement d'une façon approximative.

Le sens commun et l'intuition arrivent parfois en conflit avec la vérité

C'est la remarque de Bertrand Russell. L'espace euclidien à trois dimensions défend parfois ses mystères mieux que dans le cas des dimensions supérieures à trois (voir la conjecture de Poincaré). Des questions apparemment très claires, comme la longueur d'une courbe et l'aire d'une surface, où la représentation visuelle semble simplifier les choses, se sont montrées être un piège très dangereux. L'itinéraire de Jordan à Lebesgue et Fréchet est significatif à cet égard. Les difficultés viennent du fait que l'intuition visuelle couvre seulement une petite partie de tels concepts comme fonction continue, fonction différentiable, courbe, surface, etc. On est ainsi toujours en danger de se tromper.

La gloire des mathématiques est leur capacité à nous dévoiler des faits qui sont bien au-delà des frontières du visible, en assurant une interaction permanente de l'intelligible avec le visible : leur mariage est solide et essentiel pour le progrès de la connaissance, une preuve claire de la force de l'intelligence humaine. Toute tentative de fixer des limites aprioriques aux mathématiques risque d'être infirmée.

Références

Dombi P. Erzsebet (1970), « An indicator of incompatibility for synaesthesia », *Revue Roumaine de Linguistique*, 15.

Richard L. Graham, Bruce L. Rothschild, Joel H Spencer (1990), *Ramsey Theory*, New York, John Wiley & Sons.

Jacques Hadamard, Henri Poincaré (1993 [1963]), *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Sceaux, Editions J. Gabay.

Solomon Marcus (1973), « The mathematical metaphor », *Computational Linguistics* (Budapest) 9, 1973, 151-161.

Solomon Marcus (1990), « Why expressive and suggestive metaphors in the scientific language ? » *Revue Roumaine de Linguistique – Cahiers de Linguistique Théorique et Appliquées* 27, 1990, 1, 25-42.

Henri Poincaré (1993 [1908]), *L'invention mathématique*, Sceaux, Editions Gabay.

René Thom (1993), *Prédire n'est pas expliquer*, Paris, Flammarion.

Hugh W. Woodin (1999), *The Axioms of Determinacy, Forcing Axioms, and the Non-stationary Ideal*, Berlin, Walter de Gruyter.

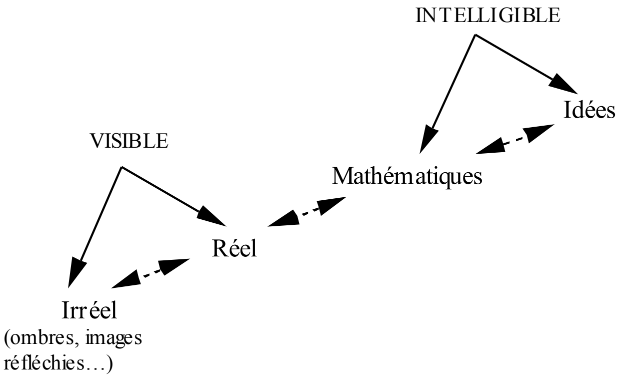
Mathématiques, de l'action à la vision

Olivier REY
CNRS, École polytechnique

Mathématiques et action

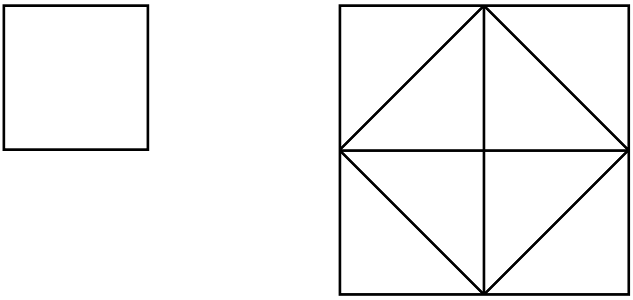
Une conception naïve et répandue des mathématiques veut que les notions qui ont cours en ce domaine soient engendrées par abstraction et idéalisation à partir de l'observation de la nature. Par exemple : les notions de droite ou de plan seraient induites à partir des portions plus ou moins étendues de ligne ou de plan dont le monde nous offre le spectacle. En réalité, ce processus d'abstraction suppose son résultat déjà acquis pour pouvoir se déployer. Entre le lac et l'idée de plan, c'est la seconde qui se projette sur le premier, non le premier qui engendre la seconde (un signe en est que les paysages maritimes et lacustres sont très répandus sur la terre, mais ne suffisent pas à transformer leurs spectateurs en géomètres) ; de même, il faut déjà pratiquer la numération pour qu'une collection d'objets puisse évoquer un nombre. Par ailleurs, la quantité de notions mathématiques susceptibles d'être mises en rapport visuel avec des éléments du monde environnant est assez réduite, voire très réduite par rapport à l'ensemble de ces notions.

Cette conception des mathématiques comme abstraites du spectacle du monde s'accorde avec les doctrines sensualistes, selon lesquelles les idées ne sont que des sensations transformées, et avec le nominalisme, qui veut que nos concepts ne soient que des étiquettes plus ou moins commodes pour découper et appréhender la réalité. Elle s'oppose aux différentes formes d'innéisme et d'universalisme, et, en particulier, à la conception « platonicienne » des mathématiques. Selon Platon, le monde matériel dont nous faisons l'expérience n'a pas plus de consistance ontologique que des ombres chinoises sur la paroi d'une caverne : ce qui est vraiment, ce sont les Idées, dont tout ce que nous expérimentons par les sens n'est qu'un reflet, sans plus de consistance par rapport à elles que l'image d'un arbre à la surface d'une mare par rapport à l'arbre lui-même. Ce à quoi nous assistons à l'intérieur de la caverne du monde est incapable, en soi, de nous conduire aux Idées. Mais l'âme humaine a, à des degrés divers, recueilli quelque chose de ces Idées avant d'être incarnée sur la terre, et c'est ce savoir enfoui, atteint par la réminiscence, qui permet de saisir le sensible comme il convient. Quant à l'opérateur de projection des Idées sur le monde ambiant, qui permet, en retour, de reconduire le monde ambiant vers les Idées, ce sont les mathématiques.



Pour essayer de mieux saisir ce qui conduit Platon à faire jouer aux mathématiques un rôle aussi exorbitant, il est utile de se rappeler la façon dont les Grecs, autant que nous puissions en juger, ont été conduits aux mathématiques. Ni en scrutant leur âme, ni en contemplant le monde, mais en s'interrogeant et en réfléchissant sur ce que c'est qu'apprendre, sur l'acte d'apprendre en lui-même (la *mathesis* est d'abord un apprendre, avant que son sens ne se spécialise avec ce qu'on appelle les mathématiques). Que découvrirent-ils ? Entre autres, que nulle connaissance n'est possible qui ne soit, en partie au moins, une *reconnaissance* ; qu'un certain savoir doit toujours précéder l'apprendre pour qu'un apprendre soit concevable. Ce qui est déjà là, en tant qu'il permet l'appréhension de ce qui est à connaître, n'est autre, pour parler en termes modernes, qu'un cadre transcendantal : non pas ce qui est directement expérimenté, mais la structure qui permet l'expérience et dans laquelle elle s'inscrit. Pour le pythagorisme, comme pour le platonisme qui, sur ce point, en est l'héritier, ce cadre transcendantal est mathématique. Les mathématiques sont toujours déjà là, antérieures à toute expérience sensible, qui ignore leur présence mais leur doit d'être elle-même présentifiée. Il en résulte que ce n'est pas de l'expérience mondaine en tant que telle que sont à même d'apparaître les mathématiques mais, en quelque sorte, d'un pli de cette expérience sur elle-même, quand, au lieu d'être tournée vers l'objet d'expérience, elle évacue cet objet et se retourne vers sa propre structure.

Pour montrer que le savoir géométrique n'est pas un savoir qui s'acquiert, mais un savoir qui est déjà là, et dont il s'agit de se ressaisir dans la réminiscence, Socrate entreprend dans le *Ménon* de montrer qu'un jeune esclave sans instruction est un géomètre qui s'ignore. À cette fin, il lui fait (re)trouver, par ses questions et le dessin, la solution du problème de la duplication du carré (c'est-à-dire : étant donné un carré, construire un carré d'aire double au premier). La démarche consiste à juxtaposer quatre exemplaires du carré initial, d'aire A, de manière à former un grand carré, d'aire $4A$; en divisant chacun des petits carrés par une diagonale qui joint les milieux des côtés consécutifs du grand carré, on construit un carré central dont l'aire est égale à quatre fois la demi-aire des petits carrés, c'est-à-dire $4\times(A/2) = 2A$, le double de l'aire du carré initial[1].



Qu'est-ce qui a provoqué la « réminiscence » ? Non pas une méditation introspective, mais l'évidence se dégageant des figures successivement tracées au sol par Socrate. Plutôt que de conclure, comme dans le dialogue de Platon, que la démonstration fait découvrir quelque chose que le jeune esclave savait déjà, il est possible d'imaginer que ce savoir est l'œuvre même de la démonstration. Nous n'entendons pas entrer, ici, dans le débat sur le statut d'existence des idéalités mathématiques, et la part qui revient à l'activité du mathématicien vis-à-vis d'elles, entre dévoilement et constitution. Notre propos est uniquement de souligner que l'interprétation des réponses de l'esclave en termes de réminiscence n'a rien d'inévitable, et que l'on peut tout aussi bien considérer que la démonstration, au lieu de révéler un savoir déjà là, le constitue.

Mathématiques implique démonstration. « Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration ; certains doutent même qu'il se trouve, en dehors des mathématiques, des démonstrations au sens précis et rigoureux que ce mot a reçu des Grecs »[2]. C'est au point qu'on pourrait définir les mathématiques ainsi : comme le domaine où ont cours les démonstrations. Une démonstration a ceci de particulier qu'elle appelle l'assentiment par un enchaînement d'arguments qui s'impose à tout esprit disposé à faire l'effort de le suivre. De là une grande partie de la séduction exercée sur Platon : dans une cité athénienne déchirée par les conflits internes, où les discours entretenaient et envenimaient la discorde au sein du peuple au lieu de le réconcilier, se montraient incapables de rétablir la concorde, les propositions

[1] Cette construction fournit la démonstration du théorème de Pythagore, $a^2+b^2=c^2$ quand a, b, c mesurent les côtés d'un triangle rectangle, a et b les côtés adjacents à l'angle droit, c l'hypoténuse, dans le cas particulier $a=b$; le cas général s'obtient par une légère adaptation de l'argument.

[2] Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Paris, Hermann, 1970, Introduction E I.7.

mathématiques avaient cette merveilleuse propriété d'être soustraites à la controverse, d'obliger les esprits sans qu'il soit nécessaire de recourir à la force, ni à l'autorité, ni à la persuasion. Celui qui élabore une démonstration s'adresse à un autre, présent ou non, réel ou fictif, mais à un autre particulier : un autre en qui n'est supposé, pour juger des arguments présentés, aucune sympathie, aucune connivence[3]. À cet égard, le développement de la rigueur démonstrative doit certainement beaucoup à l'esprit agonal des Grecs. Cela étant, cette rigueur ne peut s'exercer pleinement que sur un certain terrain. Alors que toute monstration est monstration de quelque chose, la démonstration est monstration d'elle-même : quand on pointe l'index dans une certaine direction, le sens est d'inviter à regarder de ce côté ; quand Socrate divise un carré en deux par la diagonale, le sens de son geste au sein de la démonstration est de diviser le carré en deux par la diagonale. Voilà pourquoi la démonstration force l'assentiment : il n'y a pas de distance entre la monstration et ce qui est montré. Mais la démonstration ne peut se déployer que si les objets et notions qu'elle fait intervenir ont ce même caractère de se montrer eux-mêmes entièrement – ce qui délimite exactement le domaine des mathématiques. Un objet concret, tangible, tel un rocher, a une réalité que la définition en tant que « masse de matière minérale dure » ne capte qu'en partie. L'ajout de caractéristiques supplémentaires comme la masse, les dimensions, la couleur, la composition chimique, la résistance à l'écrasement, au cisaillement, etc. ne parviendra jamais à épuiser cette réalité. Un cercle de rayon R, en revanche, n'est rien d'autre que l'ensemble des points d'un plan dont la distance à un point donné est R. La coïncidence de l'objet avec sa définition est possible dans la mesure où l'objet et sa saisie ne font qu'un – dans la mesure, donc, où la définition est purement fonctionnelle. Les mathématiques ne procèdent ni du sujet explorant les

[3] « Lorsqu'on dit que le dialogue est profondément impliqué au cœur des mathématiques, il ne faut donc pas oublier qu'il s'agit là d'une forme extrêmement particulière. Ce *n'est pas* le dialogue ordinaire, comme on le croit souvent, c'est un *autre dialogue* tel que le “il”, ordinairement exclu, soit *inclus dans l'interlocution*. Si le “il” rentre dans l'interlocution, on s'aperçoit par contrecoup que celui qui en est expulsé est le “tu”. Le fameux *tiers exclu*, qui caractérise la logique binaire du même nom, c'est le “tu”. Ce tiers expulsé, c'est l'instance complaisante qui renvoyait indéfiniment la balle en échangeant sa position avec celle du “je” » (Dany-Robert Dufour, *Les Mystères de la trinité*, Gallimard, coll. Bibl. des sciences humaines, 1990, p. 394). L'instance objectante de l'autre est bien entendu susceptible d'être intériorisée. Evert Beth écrit : « Une certaine culture mathématique et un certain entraînement permettront au mathématicien d'*anticiper*, dans une certaine mesure, les “contre-exemples” que son adversaire pourrait utiliser. […] Notons que la structure d'une telle anticipation est transférée du niveau de la discussion à celui d'un raisonnement formel. Si l'on introduit un raisonnement déductif par les mots : “Soit ABC un triangle quelconque” ou : “Soit ABC un triangle arbitraire”, c'est, pour ainsi dire, qu'on laisse le choix de ce triangle à un opposant imaginaire » (Evert W. Beth et Jean Piaget, *Épistémologie mathématique et psychologie – essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle*, PUF, coll. Bibl. scientifique internationale, 1961, p. 11).

replis de son âme (la définition mathématique du cercle ne jaillit pas de l'introspection), ni des objets matériels idéalisés (elle ne jaillit pas davantage des formes plus ou moins circulaires présentes dans la nature), mais de l'action en direction de l'objet (délimiter une aire circulaire), quand action et objet parviennent à s'identifier dans une définition fonctionnelle. L'action, repliée sur elle-même, révèle sa structure, devient schème opératoire.

Poincaré fait remarquer que pour un être immobile, il n'y aurait pas d'espace, pas de géométrie[4]. L'espace, avant que s'y déploient nos actions, est engendré par elles. Et c'est lorsque de ces actions considérées en elles-mêmes, intransitivement, se dégagent des structures opératoires, que l'espace devient mathématique – topologique, quand il s'agit d'intérieur, d'extérieur, de frontière, de voisinage, de limite, géométrique quand il s'agit de mesures de longueur, d'angle, de courbure, etc. Les *variétés*, ces nouveaux types d'espaces apparus en mathématiques à partir du XIX[e] siècle (*Mannigfaltigkeit* en allemand, *manifold* en anglais), concevables à partir du moment où étaient dissociés un substrat topologique, support de différentes géométries possibles, et la structure géométrique proprement dite, peuvent à bon droit être renommés dans certains ouvrages *espaces de configuration* : appellation qui a le mérite de faire entendre que l'espace n'est pas un contenant universel totalement indépendant des objets qu'il contient et des phénomènes qui s'y produisent, mais toujours l'ensemble des lieux qu'un certain système est susceptible de visiter.

Certes, les mathématiciens n'ont pas besoin de se mouvoir pour faire de la géométrie. Mais si le géomètre peut rester immobile, c'est que l'expérience l'autorise à se mouvoir sur le mode virtuel[5]. Encore ne reste-t-il pas toujours si hiératique. Poincaré remarquait qu'un mathématicien à l'esprit géométrique, dans ses explications, « est toujours en action, tantôt il semble aux prises avec quelque ennemi extérieur, tantôt il dessine d'un geste de la main les figures qu'il étudie. Évidemment, il voit et il cherche à peindre, c'est pour cela qu'il appelle le geste à son secours »[6]. Cette attitude justement observée invite à comprendre que l'expérience fondamentale en géométrie ne tient pas à la « vision » de figures, mais à leur *tracé*. D'où s'ensuit l'embarras des explications une fois que la figure est là, sur le tableau : le moment décisif est passé. Certains font alors des gestes de la main pour reproduire, dans l'air, l'expérience du tracé, d'autres se censurent moins et repassent sans cesse la craie sur la même figure, jusqu'à ce que les traits soient si épais que la figure devient illisible. La première attitude semblerait relever d'un réalisme « platonicien », la seconde d'un réalisme « physicien ». En fait, au-delà de leur opposition apparente, elles traduisent le même phénomène : à

[4] Voir *La Valeur de la science* (1905), Paris, Flammarion, coll. Champs, 1999, I, chap. III, §5.
[5] Pour le dire en termes contemporains : ce n'est parce que l'on ne bouge pas que les neurones relatifs au mouvement ne sont pas activés : il y a seulement inhibition des influx moteurs – comme c'est le cas, par exemple, dans le rêve.
[6] *La Valeur de la science, op. cit.*, I, chap. I, §1.

savoir les limites d'une identification des « actions » géométriques avec leurs résultats pris pour objets. Et cela, même si l'expérience géométrique ne réside pas dans le fait de tracer, mais *à l'occasion* de cette action[7].

Procédant de l'action, les idéalités mathématiques ne sont pas consignables telles quelles dans l'étant. Pour s'inscrire elles ont besoin d'un système symbolique propre. L'absence, à l'origine, d'un tel système, aurait dû toujours empêcher le développement des mathématiques, confinées à des expériences de pensée individuelles et fugitives, à des illuminations isolées et sans suite – inchoatives faute d'un marquage des étapes antérieures, incommunicables durablement faute de ce même marquage. Mais il y eut la géométrie plane, où un système symbolique est pour ainsi dire donné d'emblée, parce qu'il y a *homogénéité*, caractéristique de ce que l'on nomme « espace », des opérations auxquelles on y procède, et de leurs résultats constatables[8]. Le propre de l'opération spatiale, c'est de se montrer elle-même dans son résultat, de sorte qu'on peut oublier la différence entre la figure et ce qu'en vérité elle désigne, c'est-à-dire les opérations ayant présidé à son tracé – entre le *carré* tracé et *tracer* un carré. S'il y a une différence, la relation entre les deux termes est parfaitement déterminée, rigide et univoque, *canonique*, permettant sans conséquences l'identification. (Cela n'est pas vrai par exemple de l'action de compter : n'étant pas une opération spatiale, elle ne se projette pas canoniquement dans l'espace – le nombre deux n'est pas homogène à deux objets. Il y a un espace physique, mais pas de logique ou de nombres physiques).

L'identification spontanée entre l'opération spatiale et son résultat, la notion géométrique et une figure idéale à laquelle les figures réelles peuvent

[7] Il en va de même dans tous les domaines des mathématiques. À propos de l'arithmétique, Piaget écrit : « Que l'expérience soit psychologiquement indispensable à la construction du nombre ne prouve nullement que celui-ci soit extrait des objets, sous une forme ou sous une autre. […] En d'autres termes, un sujet agissant de façon empirique peut utiliser les objets à titre de simples supports ou d'occasions de l'action, mais expérimenter en réalité sur lui-même, c'est-à-dire sur la coordination de ses propres actions plus que sur les objets sur lesquels elles s'appuient » (*Introduction à l'épistémologie génétique, I. La Pensée mathématiques*, PUF, 1950, p. 132). « La logique et le nombre sont dus aux coordinations des actions comme telles du sujet, et ne sont pas extraites de l'objet, quand bien même ce n'est qu'à l'occasion des actions sur les objets que ces coordinations se manifestent » (*id.*, p. 261). Pour compter il faut opérer sur des objets. Mais la notion mathématique de nombre ne peut se former que lorsque les objets se résorbent en tant que tels pour ne plus être que de purs supports de l'action de compter, l'attention se portant intransitivement sur ce que c'est que compter, sur les schèmes opératoires du comptage.

[8] C'est cette caractéristique qui conduit René Thom à écrire : «Je pense que les concepts que l'on peut considérer comme scientifiques sont justement ceux pour lesquels il est possible de donner une traduction univoque dans toutes les langues du monde et que c'est possible, à mon avis, parce qu'on peut spécifier leur signification par référence à des transformations qui peuvent être considérées comme des transformations spatiales » (*Paraboles et Catastrophes* (*Parabole e Catastrofi*, 1980), Paris, Flammarion, coll. Champs, 1983, p. 121).

servir de symbole, est ce qui a permis, en l'absence de langage formalisé, la naissance de la géométrie mathématique. C'est aussi ce qui a trompé sur son essence. Platon – qui certes n'était pas à titre personnel un très bon mathématicien – croyait toujours avoir affaire, au bout du compte, à une « vision ». Faute d'un langage symbolique approprié la figure idéale, dont les figures réelles étaient l'évocation, demeurait le référent ultime – et c'est sans doute l'une des raisons qui empêchèrent les Grecs de tirer tout le parti possible de la nature opératoire des concepts mathématiques. C'est à l'Europe moderne que cette tâche revint, à partir de Descartes qui, grâce à l'algèbre, put rendre virtuelle la figure par une équation. Pour écrire une équation cependant, un langage symbolique était nécessaire, dont l'élaboration ne fut pas le moindre enjeu des travaux mathématiques des XVII^{e} et XVIII^{e} siècles. Remarquons que cette élaboration n'était possible que dans une culture de l'*écrit*, ce qui n'était pas le cas dans la Grèce antique où la plus haute dignité restait à la parole. Peut-être même une culture de l'écrit *imprimé* était-elle nécessaire, où le signe manuscrit devient imitation du signe imprimé, toujours reproduit à l'identique, qui le stabilise et l'objective. Si aujourd'hui les étapes qui ont marqué la mise au point d'une écriture formalisée peuvent sembler anecdotiques dans l'histoire des mathématiques, elles représentent en réalité un aspect décisif de cette histoire. Outre les facilités d'emploi qu'une telle écriture offre, et les opérations de l'esprit qu'elle simplifie, elle est le seul moyen de consacrer l'indépendance de l'être mathématique par rapport à l'étant, tout en permettant de capitaliser un acquis et en préservant les conditions d'un accord intersubjectif.

Là où Platon marquait une opposition, entre le *logos* et l'écrit, entre l'intuition vive de l'idée dans la pensée, l'expérience du vrai dans la présence, et son abolition dans les signes duplicables indépendamment de toute pensée, Husserl a identifié une *tension*. D'une part, l'idéalité géométrique (et, plus généralement, l'idéalité mathématique) a absolument besoin de l'expression linguistique écrite pour que son objectivité soit constituée, indépendamment des activations et des communications immédiates ; d'autre part, l'écrit porte toujours avec lui un risque : permettre une transmission purement formelle, une sédimentation des acquis dont le sens s'évapore pour laisser place à un fonctionnement qui, aussi efficace soit-il, a perdu ses ancrages dans la *Lebenswelt*. De ce fait, même si l'écrit permet les communications sans allocution directe, l'enseignement et la discussion de personne à personne – avec l'engagement des corps qu'il implique – demeure essentiel, en mathématiques *plus encore* que dans n'importe quelle discipline de la pensée[9].

[9] De là l'importance particulière, parallèlement aux publications, des conférences, groupes de travail, séminaires. De là également le côté désastreux d'une substitution des présentations par projection (Powerpoint) aux exposés traditionnels, où le mathématicien doit penser à nouveau ce qu'il cherche à expliquer et à écrire au tableau.

Mathématiques et vision

Paradoxalement la géométrie, vouée à l'étude et au déploiement des *opérations* spatiales, a contribué à tenir caché le caractère fondamentalement opératoire des notions mathématiques. Cela, parce qu'on peut *voir* des figures géométriques, c'est-à-dire y accéder sans agir. Plus exactement, on a l'*impression* de pouvoir y accéder sans agir : on peut oublier, une fois la figure tracée, que l'expérience déterminante tient non pas à l'observation de la figure, mais aux principes qui ont présidé à sa construction. Dans le *Phèdre* de Platon, le seul rôle positif accordé à l'écriture est d'ordre mnémotechnique – elle est là pour aider à se ressouvenir de ce qui est déjà su. De façon analogue, les constructions géométriques ne seraient pas la matière même de la géométrie, mais ce qui permettrait de reconduire à la contemplation de la vérité. Une question, toutefois, se pose : pourquoi les géomètres grecs voyaient-il des cercles, des triangles et des carrés, plutôt que d'autres figures ? Parce que, sans doute, ces formes sont plus simples. Mais en quoi sont-elles plus simples ? En ce que leur procédé de construction est transparent à la vision, en ce que de leur vision on infère la possibilité de les reproduire. C'est cela qui les rend directement intelligibles. Autrement dit la contemplation, qui phénoménologiquement s'oppose à l'action, est cependant, en mathématiques, fondamentalement liée à l'action puisque, en définitive, c'est un ensemble d'opérations que l'on contemple. Au demeurant, les mathématiques grecques étaient authentiquement constructives : Euclide, dans ses *Éléments*, indique toujours comment tracer les figures – au point que celles-ci purent être omises des éditions anciennes. C'est en vertu de cet aspect constructif que les *Éléments* ont fourni à Archimède le cadre adéquat pour sa formulation des lois de la statique et, beaucoup plus tard, un modèle dont Lagrange a pu à juste titre se réclamer pour écrire la *Mécanique analytique*, où domine le principe des mouvements virtuels. Par ailleurs, il est remarquable que, lorsque Descartes définira les courbes susceptibles d'être étudiées par la géométrie, il le fera en se référant explicitement à la méthode qui préside à leur construction : « considérant la Géométrie comme une science, qui enseigne généralement à connaître les mesures de tous les corps, on n'en doit pas plutôt exclure les lignes les plus composées que les plus simples, pourvu qu'on les puisse imaginer être décrites par un mouvement continu ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les précèdent »[10]. Ce qui fait la mathématicité d'une courbe est qu'on dispose pour la construire d'un procédé univoque.

Les idéalités mathématiques sont des idéalités *opératoires*. Cependant, en tant qu'idéalités, elles sont constituées *objectivement* et, dans cette mesure, peuvent être appréhendées sur le mode de la vision. D'un point de vue phénoménologique, « le contact tactile est pour nous une manière de nous emparer des choses. La présence visuelle, en revanche, est comme un don qui

[10] *La Géométrie* (1637) Livre II, A.T. VI, p. 316.

n'exige ni lutte ni effort, qui est simplement là »[11]. La vision présente le monde comme si nous n'y étions pas – à travers la vision le monde se donne à nous sans que nous ayons à y être ni à interagir avec lui. En fait, un peu de réflexion suffit à montrer que tel n'est pas le cas : nous ne voyons qu'en tant que nous sommes immergés dans le monde, situés en lui[12] ; et la perception visuelle est action : l'œil accommode, suit des contours, d'infimes déplacements des yeux et de la tête permettent d'apprécier mouvements et distances. En lien avec la proprioception, la vue permet à une certaine représentation du monde extérieur de s'élaborer. Mais cette représentation demande à être articulée à la représentation qui s'élabore à partir de l'appareil sensori-moteur, et cette articulation s'effectue sous l'autorité du sensori-moteur[13]. Comme l'écrivait Buffon : « C'est par le toucher seul que nous pouvons acquérir des connaissances complètes et réelles. C'est ce sens qui rectifie tous les autres sens dont les effets ne seraient que des illusions et ne produiraient que des erreurs dans notre esprit si le toucher ne nous apprenait à juger »[14]. Quitte à comprendre, comme il ressort d'autres passages du même auteur, le toucher comme métonymie de l'ensemble des rapports moteurs et tactiles avec le monde. Par les corrélations qui s'établissent au cours de l'expérience entre motricité et impressions visuelles, la vue peut devenir à sa manière préhension, contact transféré du corps ou de la main à l'œil par la médiation de la lumière.

La science moderne, tant par la place centrale qu'y occupent les mathématiques[15] qu'à travers l'autorité accordée non pas à l'expérience, mais

---

[11] Jan Patocka, *Qu'est-ce que la phénoménologie ?*, Grenoble, Jérôme Millon, 1988, p. 73.

[12] Ce fait indubitable n'est pas pour autant immédiatement pris en compte. Un signe en est qu'il a fallu attendre la Relativité pour qu'il soit véritablement intégré aux théories physiques modernes.

[13] On peut rappeler, à cet égard, le problème posé au XVII[e] siècle par Molyneux et qui a passionné l'Europe intellectuelle : est-ce qu'un aveugle de naissance, qui a appris à reconnaître en les maniant une sphère et un cube de tailles comparables, serait à même, à supposer qu'il soit subitement guéri de sa cécité, d'identifier sans les toucher la sphère et le cube ? Le débat s'est développé et poursuivi dans la mesure où aucune expérience directe ne venait le trancher. Récemment cependant, la chirurgie a permis de donner à plusieurs enfants, âgés de cinq à dix-sept ans, et atteints de cécité congénitale, un plein usage de la vue. La vision fut d'emblée assez bonne pour permettre la distinction de formes que les enfants avaient préalablement appris à connaître par le toucher. La réponse à la question de Molyneux a été négative : les nouveaux voyants n'étaient pas capables d'établir un rapport entre représentations visuelles et représentations tactiles. En revanche, au bout d'une semaine, le rapport s'était établi. (Voir l'article de Richard Held *et al.*, « The newly sighted fail to match seen with felt », *Nature Neuroscience*, 14-5, 2011, p. 551-553.)

[14] « Des sens en général », chap. 8 de l'*Histoire naturelle de l'homme*, Paris, Gallimard, coll. Folio, 1984, p. 113.

[15] Les mathématiques sont bien plus qu'une langue pour les sciences modernes de la nature, elles sont un mode d'appréhension du réel. En physique en particulier les

à l'expérimentation, répond parfaitement à la phrase de Buffon citée plus haut : la connaissance recherchée ne se contente pas de la vue, elle exige un contrôle opératoire. (Emblématique est à cet égard Descartes qui, au sein de sa physique, n'admettait que les effets de contiguïté et de chocs.) Cependant, cette connaissance a pour idéal de retrouver quelque chose qui phénoménologiquement s'apparente à la vision. La contemplation s'ouvre à l'immédiate présence, mais ne sait pas pourquoi les choses sont ce qu'elles sont, pourquoi elles se produisent de la façon dont elles se produisent. Poursuivre un tel savoir impose de rompre avec l'immédiate présence. L'espoir peut néanmoins être nourri de retrouver cette présence au bout du compte, au sein d'une vision à laquelle tout est devenu transparent, où tout s'offre au regard selon son mode de production. Les choses, telles qu'elles se donnent initialement, se trouvent patiemment décomposées et recomposées suivant des schèmes opératoires ; mais l'idéal est de renouer, au terme du processus, avec une forme d'évidence.

Une telle ambition n'est pas aussi utopique qu'il pourrait paraître de prime abord. Il était à craindre, par exemple, qu'en s'éloignant des représentations concrètes, les mathématiques finissent par s'égarer et devenir stériles. C'était oublier qu'intuition et évidences, loin d'être des invariants de la pensée, sont relatives à une certaine structuration de cette pensée, et donc aptes à « suivre » les mathématiques au gré de leurs développements. À chaque étape se reconstitue le clivage entre « raison constituée », fonctionnant selon les évidences acquises, et « raison constituante » qui, guidée par l'intuition, travaille à cette acquisition. Voilà pourquoi la fécondité des mathématiques, lorsque celles-ci se sont séparées de l'intuition sensible immédiate, n'a pas diminuée mais s'est maintenue et même accrue, dans des proportions considérables.

Le développement des mathématiques s'effectue selon deux directions : d'une part, l'étude du monde engendré par les notions disponibles et l'élaboration, à partir d'elles, de nouvelles notions, de l'autre, une redéfinition de ces notions à partir de principes plus fondamentaux. À ce double mouvement, correspond une perpétuelle décomposition et recomposition de la vision mathématique. Plus généralement la science moderne, qui avec Galilée s'est donnée pour programme de déchiffrer le monde au travers des mathématiques, ne cesse de décomposer la vision spontanée du monde (déjà liée, dans une large mesure, à nos actions dans le monde, virtualisées), dans le projet de conduire à une nouvelle vision, à une « hyper-vision » réalisant la fusion des différents modes de représentation, combinant la connaissance des modes de production des phénomènes avec l'évidence phénoménologique propre à la vue.

---

mathématiques ne s'appliquent pas, elles s'impliquent, selon l'heureuse expression de Jean-Marc Lévy-Leblond.

Conclusions
Énonciation et diagrammatisation[1]

Jean-Marie KLINKENBERG
Groupe µ / Université de Liège

C'est à un non-mathématicien qu'incombe la tache difficile de tirer les conclusions de ce colloque dense consacré au thème « Visualisation et mathématisation ». Une tâche qui a elle-même quelque chose à voir avec la mathématisation, puisqu'il s'agit de saisir des invariants au delà de la variation phénoménale qui a marqué ces deux journées, variation qu'ont manifestée les corpus, les méthodes, les terminologies, les horizons théoriques des participants.

Heureusement, un certain nombre de convergences rassurantes — ou inquiétantes à force d'être trop évidemment rassurantes — sautent immédiatement aux yeux. Ces convergences sont d'abord thématiques : parmi elles, la présence du diagramme, très forte chez Per Aage Brandt, Noëlle Batt et Maria Giulia Dondero mais diffuse dans bien d'autres contributions, ou encore la récurrence de l'opposition entre image scientifique et image esthétique, qui préoccupe Batt, Dondero, Francis Édeline, Jean-François Bordron. Mais il y a aussi des convergences conceptuelles. Ce sont celles-là que je voudrais tout d'abord mettre en évidence, parce qu'elles articulent solidement les textes ici rassemblés au cadre général du programme de l'ANR « Images et dispositifs de visualisation scientifique » (IDiViS) dans lequel le présent colloque prend place, comme aussi à la discipline qui vertèbre le projet : la sémiotique.

[1] Le présent texte fait usage des rectifications modernisatrices de l'orthographe française (1990), préconisées par toutes les instances francophones compétentes, dont l'Académie française.

1. Paradigme référentialiste *vs* paradigme énonciatif

L'accent mis, tout au long de ces journées liégeoises, sur la question de la production des dispositifs visuels, des conditions d'émergence du sens (notamment par Dondero), des stratégies d'énonciation (qui ont mérité tous les soins de Paolo Fabbri) comme aussi sur la puissance argumentative de l'image, à quoi je vais revenir, n'est rien d'autre que la trace d'un retournement épistémologique aux conséquences si considérables qu'on peut à bon droit parler de changement de paradigme.

Jusqu'il y a une bonne cinquantaine d'années, la perspective référentialiste, durement critiquée ici par Fabbri, était assurément dominante. « Les théories de la physique classique », nous rappelle le Prix Nobel Louis de Broglie, « se sont développées en admettant la réalité du monde physique et en cherchant à en obtenir des représentations concrètes » (1967, p. 706). L'observation elle-même portait bien atteinte à l'état de chose existant à l'instant précédant la mesure ou l'observation, « mais il n'y avait là rien qui parût porter atteinte à l'idée qu'il existe à chaque instant une réalité physique bien déterminée, extérieure aux hommes qui l'observent ». Et même si dans la science moderne, les représentations théoriques obtenues par la recherche tendaient à s'exprimer dans le formalisme mathématique, il n'en reste pas moins que ce formalisme ne remettait pas en question « le caractère concret du monde physique dont les formules mathématiques n'avaient pour but que de donner une description plus ou moins exacte » (*ibidem*).

Mais ce paradigme référentialiste a lui-même une histoire. Alain Herreman nous explique bien ici que les formulations les plus totalisantes du principe de référentialité dépendent d'un moment fondateur décisif où elles se voient discursivement produites.

Dans le nouveau paradigme — que l'on peut nommer énonciatif —, l'image scientifique (comme d'ailleurs le discours scientifique dans son ensemble) n'est plus réputé renvoyer à ce qui est — ou était — déjà là, mais à ce qui se fait : ce thème est récurrent chez Dondero, Batt, Giuseppe Longo, Olivier Rey. Les schémas donnés à voir sont désormais les expressions d'hypothèses, et non des images d'objets préexistants (ce que démontre Salomon Marcus en mettant en évidence le rôle des métaphores diaphoriques, et non épiphoriques) : l'objet émerge du processus de représentation. Du coup, l'image scientifique, et particulièrement le diagramme, cesse d'être une simple illustration du raisonnement, mais participe pleinement à ce dernier (comme le fait voir Batt). Si l'image scientifique doit continuer à être décrite comme une icône, concept qui n'a rien perdu de sa validité (cfr Groupe μ, 1992), on ne doit plus entendre ce mot comme renvoyant à la représentation d'un objet identifié préalablement, et dont la connaissance serait le critère de validité de ladite icone. L'icône ne donne plus lieu à la vérification d'une ressemblance ou à la mesure d'une distance qu'un stimulus prend avec un référent connu (grâce aux transformations qui ont fait l'objet d'un des tous premiers colloques du programme IDiViS) : c'est un mécanisme de formulation d'hypothèses et de formalisation de données. C'est un processus, et non plus un état. On comprend dès lors qu'au lieu de parler d'icône, plusieurs participants au colloque préfèrent utiliser des formulations revêtant une dimension aspectuelle : ils parlent ainsi d'un processus d'iconisation en cours. Car l'image n'est plus la fille d'un référent : elle est « en quête de ce référent », selon une formule de Dondero.

Massivement illustré dans les textes ici offerts au lecteur, ce changement de paradigme n'est pas neuf, mais en cours depuis un certain temps. Et on sait quel fut son moteur : l'élaboration de la physique contemporaine, et spécialement les nouvelles théories des particules. Celles-ci ruinent en effet la conception atomiste classique, où ces particules sont conçues comme des objets identifiables dotés d'une position déterminée dans le temps et dans l'espace pour ne plus leur donner plus que le statut d'entités mathématiques. Le comportement de ces entités peut certes être modélisé, mais l'éventuel substrat physique de ce comportement est indécidable.

Il pose toutefois deux questions, qui ne sont pas encore entièrement résolues. Il y a d'un côté celle du statut problématique que peut encore conserver l'approximation du réel, dont on a fait longtemps l'horizon de la science et de l'autre celui de la validité du processus de production de l'image scientifique.

Du premier côté, le modèle référentialiste[2] n'a pas disparu. Il a non point survécu, mais trouvé une nouvelle jeunesse, grâce à plusieurs *aggiornamenti*, le principal étant à chercher du côté de la morphologie. On pense ici aux travaux de René Thom sur les formes naturelles (1972), poursuivis par Jean Petitot (1992, 1996), et qui mettent en évidence que des phénomènes auto-organisateurs existent déjà spontanément dans le substrat naturel : « Les formes ne sont pas seulement des constructions perceptives mais possèdent des corrélats objectifs » (Petitot, 1996, p. 67). La forme, que l'on retrouve dans l'image, est donc le phénomène de l'organisation de la matière. Une thèse qui a parfois des accents hylozoïstes, en dépit des reformulations que leur donnent Zeeman (1977) ou Chazal (1997), et volontiers reprise par la sémiotique philosophique. Ainsi pour Jean-François Bordron, « il faut (…) que ce qui se présente comme devant être catégorisé soit en quelque façon en puissance de catégorisation » (2000, p. 12) et il s'agit d'admettre « qu'il existe une phénoménalité des entités du monde » (1998, p. 99).

La question du rapport entre ce référentialisme-là et la perspective énonciative devra être abordée un jour ou l'autre. Même si l'on ne va pas jusqu'à l'antiréalisme textualiste radical représenté par Bruno Latour, qui relaie les positions de l'empirisme anglo-saxon défendues par Rorty, Putnam et d'autres, ce qui a été dit plus haut souligne en tout cas le caractère infranchissable de la distance entre les deux positions. (Celle-ci a bien été mise en évidence par Francis Édeline dans son commentaire sur les fractales lesquelles, pourtant, apparaissent aux yeux de beaucoup comme les formes

[2] Qu'il ne faut d'ailleurs pas caricaturer, dans un geste polémique. Vincent Israel-Jost, dont la contribution au colloque n'est pas reprise ici, y a bien mis en évidence les limites qu'on a toujours reconnues à l'observation.

mathématiques les plus aptes à rendre compte du réel). On ne peut en tout cas faire coexister aujourd'hui Latour et Petitot, sauf au prix de l'incohérence.

2. Action

Revenons à la production de l'image scientifique.

Autant qu'une hypothèse, ce qu'elle note est un tracé, ou mieux : un geste, comme Rey et Longo le montrent abondamment. De ce geste, qui est un produit du corps et est donc déterminé par ses propriétés (« Le corps et l'esprit coopèrent pour faire advenir le virtuel », dit Batt), même un Descartes n'a pu se défaire, comme l'a démontré Laurence Bouquiaux. Le corps se trouve de la sorte à l'origine de l'abstraction mathématique, comme il est à l'origine de tout mouvement d'abstraction. Longo parle ainsi d'abstraction « préconceptuelle », comme mémoire d'un geste protensif.

Cette conception entraine-t-elle que l'on accorde de nouvelles fonctions à l'image ? J'y reviens au paragraphe suivant. Mais il faut déjà noter qu'elle renvoie à une perspective plus générale, qui excède la question de l'image scientifique : celle de la connaissance. Prévaut largement dans les textes ici rassemblés la perspective selon laquelle « c'est l'action qui constitue la connaissance », selon la formule de Bailly et Longo (2006, p. 57), lesquels renvoient à celle de Giulio Preti, pour qui « toute la connaissance est expérience », et s'inscrivent dans la lignée de John Dewey dont on sait qu'il fait de la connaissance « le processus à travers lequel la proposition est construite comme vraie ». À la suite du Groupe µ (1992), Rey fait bien ici de la connaissance visuelle, plus particulièrement visée par ces journées, une modalité de l'action.

De la conception que nous avons de la connaissance, on passe évidemment à la conception que nous avons du sens. La conception pragmatique qui se dessine avec le paradigme énonciatif tend à s'opposer à ce qui a longtemps constitué un noyau dur de la sémiotique européenne, que le principe méthodologique d'immanence — simplement adopté « pour écarter de la théorie sémiotique toute querelle métaphysique » et « éviter toute prise de position ontologique » (Greimas et Courtès, 1979, p. 181) — a fait dériver vers l'essentialisme, voire le platonisme. Grâce au nouveau paradigme se dessine ainsi la perspective d'une sémiotique corporalisée, qui ne devrait d'ailleurs pas hésiter à aller chercher son inspiration du côté de la phylogenèse. Mais une telle sémiotique[3] ne saurait substituer un autonomisme neuronal (défendu par Varela, pour qui le système nerveux est entièrement clôturé sur lui-même ; il « n'a ni entrée ni sortie ; et aucune caractéristique intrinsèque de son organisation ne lui permet de distinguer, par la dynamique de ses changements d'état, l'origine interne ou externe de ces changements » ; 1989, p. 150) à l'autonomisme idéaliste : elle devra nécessairement être interactionniste. Plutôt que d'action, il faut en effet parler d'interaction, avec le milieu comme avec le partenaire.

---

[3] Voir *e.g.* Groupe µ, 2011.

3. Visualisation

Davantage que le langage, la visualisation semble être l'interface la plus indiquée entre la pensée scientifique et le sujet humain, ce que note bien Longo. La science vise à expliquer les phénomènes, nous rappelle utilement Marcus, et le fait est qu'elle s'y prend de préférence par une démarche de visibilisation : « Porter l'invisible au visible », selon la formule de Monique Sicard (1998, p. 9), tel est son programme. Pas plus dans l'image quelconque que dans l'image scientifique — mais la chose doit être vigoureusement soulignée dans le cas de cette dernière —, l'indicialité de l'image scientifique ne doit être conçue de manière naïve : l'image n'est pas un instrument de reproduction, mais bien un instrument d'intellection, ce que démontre abondamment Luciano Boi.

Dans ce processus, deux nouvelles fonctions échoient désormais à l'image.

La première fait d'elle une modalité généralisante de l'information fournie par les observables (ce qui rompt avec l'idée qu'une image est toujours locale, et particularisante) : il s'agit bien pour elle d'exprimer la dynamique génératrice des structures profondes. J'y reviens ci-après au paragraphe 5.

La seconde fait d'elle un instrument d'argumentation : selon la formule de Francis Édeline (2011), « une image ne démontre pas, elle convainc ».[4] Cette argumentation est connaturelle au discours scientifique, dont l'obligation de communiquer est soulignée par plusieurs intervenants : l'image joue donc un rôle médiateur, occupant une place intermédiaire entre les observables et le formalisme mathématique. Mais on comprend qu'une bonne partie du discours scientifique récuse ce rôle et se méfie de l'image, qu'il voudrait voir disparaitre au profit du formalisme : non seulement il entend prendre ses distances avec le sensible, l'intuition, l'imagination, mais, surtout, il redoute le relativisme que la prise au sérieux de cette tâche présuppose : pointer le caractère argumentatif de la visualisation, c'est du même coup admettre son caractère provisoire.

4. Vision

La visualisation est davantage que la vision. Mais la première est rendue possible par la seconde, et on ne saurait les opposer. Il n'y a pas, en effet, de vision qui ne soit modélisatrice, structurante et sémiotisante (sur ceci, cfr Groupe µ, 1992), « diagrammatisante » diraient certains participants au présent numéro. Si la visualisation est, selon Vivien Lloveria, le processus

---

[4] L'argumentation a été en 2010 le thème du congrès de l'AISV (Association internationale de sémiotique visuelle, International Association for Visual Semiotics, Asociación internacional de semiótica visual), que je préside. À l'occasion de ce congrès, dont le thème est « Rhétorique du visible. Stratégies de l'image entre signification et communication » et qui s'est tenu à Venise du 13 au 16 avril 2010 (cfr Migliore, 2011), le réseau du projet « Images et dispositifs de visualisation scientifique » a tenu un de ses colloques, fort logiquement consacré au thème « Rhétorique du visible et images et dispositifs de visualisation scientifique ».

qui consiste à rendre visible pour homogénéiser l'hétérogène afin de lui donner sens, c'est bien ce que fait déjà la simple vision, grâce au double mécanisme d'égalisation des stimulations correspondant aux plages perçues et de différenciation de ces plages.

Pourquoi ce tropisme du discours scientifique pour la vision ? et plus généralement pourquoi ce privilège apparent de la vision dans toutes les démarches de la connaissance ? En soi, la notion de transformation[5] est indifférente au canal choisi : on pourrait, par exemple, transformer un phénomène thermique en une image sonore, ou un phénomène spatial en une image faisant intervenir des différences de rugosité. Mais il est de fait que les transformations à aboutissement visuel semblent jouir d'une préférence dans nos représentations et leur puissance cognitive est reconnue depuis la plus haute Antiquité (pour Aristote, de tous nos sens, la vision « est celui qui nous fait acquérir le plus de connaissances »). Donc, pourquoi « faire voir à tout prix » et ne pouvoir se passer d'images ? Question que je posais déjà, sous ce titre, lors d'un des précédents colloques du programme « Images et dispositifs de visualisation scientifique » (Klinkenberg, 2010b).

Une première caractéristique, que la vision partage avec l'ouïe, est que toutes deux permettent le traitement des données à distance. Elles garantissent ainsi la capacité de suivre et d'anticiper les mouvements et les trajectoires, capitale pour le vivant (Longo) ; mais elle autorise également la gestion de la densité : une gestion différenciée qui permet de faire varier l'appréhension phénoménologique du sens de l'image (et du coup, de fonder la différence entre image scientifique et image esthétique, ce qu'établit Bordron).

Le privilège du canal visuel est aussi dû à sa relative puissance, qui lui permet de traiter un grand nombre d'informations dans un laps de temps donné (10^7 bits par seconde, soit sept fois plus que l'oreille) et autorise une puissante discrimination des données en même temps que leur aperception simultanée. En permettant d'embrasser l'espace, qui est un des paramètres important de maints phénomènes scientifiques, la vision permet aussi d'exprimer des relations tabulaires : ce qui revêtira toute son importance ci-après dans mon paragraphe 5, conclusion de mes conclusions.

Distance et puissance confèrent aux produits de ce canal une forte valeur opérationnelle. Si toute sensorialité autorise le jugement et la décision, et permet ainsi au sujet de simuler l'action, d'anticiper ses conséquences, d'adopter les attitudes et les comportements adéquats, distance et puissance donnent aux catégories établies grâce à la vision une forte valeur de survie dans l'environnement. Or ces caractéristiques affectent sans nul doute les modalités du processus de désensorialisation par lequel passe le travail de catégorisation (Groupe μ, 2004). Car l'élimination du sensoriel dans la pensée scientifique n'est qu'une tendance : si la physique, la chimie, l'hydraulique, et en général les sciences dites de la nature, comportent de nombreux résidus sensoriels, les mathématiques, par contre, en sont

[5] Cfr Groupe μ, 1992, Dondero & Moutat, 2010, Klinkenberg, 2010a.

davantage exemptes. Mais elles présentent tout de même encore des traces, réelles ou projetées, de sensorialité, notamment dans les métaphores qu'elles mobilisent.

5. Le diagramme enfin

Après ce qui n'a pas été un détour et qui nous a mené de l'action et de la visualisation à la vision, nous sommes armés pour revenir au diagramme, qui a mérité toute l'attention de Brandt.

Une question restait en effet pendante, que son examen va permettre de résoudre : si l'on pu souligner l'efficacité des mathématiques (si remarquable que l'on a même pu parler à leur endroit de « réussite exagérée » : Wigner, 1960), à quoi est due la particulière rentabilité du binôme mathématisation-visualisation ?

La réponse tient en un seul mot : médiation.

Dans sa contribution, Marcus cite Thom (1993), pour qui « on comprend seulement ce qui est continu, mais on voit effectivement seulement ce qui est fini. » Or le binôme mathématisation-visualisation permet de négocier l'écart entre le visible et l'intelligible, et autorise l'approximation du fini par l'infini et vice-versa. Et cette médiation, c'est assurément le diagramme qui s'en charge le mieux, notamment en ce qu'il permet de médier le local et le global, le général et le particulier.

L'ensemble du dispositif qu'est le discours scientifique exprime la généralité. Comment pourrait-il en aller autrement, dira-t-on, dès lors qu'il sert le discours scientifique, et qu'il n'y a de science que du général ? Mais il faut aller au-delà de ce slogan, qui a le gout de la pétition de principe, pour constater que la mission d'exprimer la généralité est inégalement répartie au sein du dispositif : la formalisation mathématique se situe résolument du côté du général, le texte argumentatif oscillant entre les deux pôles (tantôt il formule verbalement les propositions générales exprimées avec plus de compacité par la formule ; tantôt, il se réfère à des faits particuliers). Le diagramme permet d'échapper à cette oscillation. S'il permet également une expression des deux pôles, c'est cette fois sous la forme d'une conjonction, rendue possible par la tabularité, laquelle provient elle-même des potentialités de la vision.

Le diagramme exprime en effet à la fois le général et le particulier. Il particularise une première fois parce qu'il attribue des contenus aux lois. Il le fait aussi parce que sa tabularité permet d'observer un point particulier où s'applique la loi générale exprimée par la formule, de faire arrêt sur lui. Mais le nombre de ces points d'arrêt est infini, puisque le diagramme exprime aussi le continu. Il permet donc de saisir les faits — des grandeurs, des phénomènes physiques, des phénomènes sociaux… — dans le continu de leur réalisation ; il permet de parcourir toute la série des formes particulières qu'ils prennent. Il rend donc compte simultanément des particuliers — de la totalité des particuliers — et de la généralité qui engendre cette totalité ou qui en est l'expression.

Comme la formule, le diagramme a une fonction d'analyse, mais si la formule exprime toutes les potentialités de cette analyse, elle le fait de manière intemporelle, et donc statique. Par son orientationnalité, qui permet de parcourir la totalité des actualisations, le diagramme introduit dans l'analyse une dimension dynamique. Ici encore, intemporalité et processualité connaissent une dialectique dont le résultat est la simultanéité[6].

En mettant en place une « interaction permanente de l'intelligible avec le visible » (Marcus), le binôme mathématisation-visualisation permet ainsi une action nouvelle : conce-voir : autrement dit, accéder à un voir conceptuel.

Références

BAILLY, François, LONGO, Giuseppe, *Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant*, Paris, Hermann, 2006.

BORDRON, Jean-François, « Réflexions sur la genèse esthétique du sens », *Protée*, XXVI, 2, 1998, pp. 97-106.

BORDRON, Jean-François, « Catégories, icônes et types phénoménologiques », *Visio*, V, 1, 2000, pp. 9-18 (numéro spécial *La catégorisation perceptive. Les frontières de Soi et de l'Autre*).

CHAZAL Gérard, *Formes, figures, réalité*, Seyssel, Champ Vallon (= Milieux), 1997.

de BROGLIE, Louis, « Les Représentations concrètes en microphysique », dans Piaget, 1967, pp. 706-725.

DONDERO, Maria Giulia, MOUTAT, Audrey (dirs), *Techniques de transformation, transformation des techniques, Visible*, 6, 2010.

ÉDELINE, Francis, « Une image ne démontre pas, elle convainc », *Nouveaux Actes Sémiotiques*, 114, 2011. En ligne sur : http://revues.unilim.fr/nas/document.php?id=3779.

GREIMAS, Algirdas-Julien, COURTÈS, Joseph, *Sémiotique. Dictionnaire raisonné de la théorie du langage*, Paris, Hachette (= Hachette Université, Série Langage, Linguistique, Communication), 1979.

GROUPE µ, *Traité du signe visuel. Pour une rhétorique de l'image*, Paris, Le Seuil (= La couleur des idées), 1992.

GROUPE µ, « The Scientific Image », dans Michelsen et Stjernfeld, 1996, pp. 205-217.

GROUPE µ, « Voir, percevoir, concevoir. Du sensoriel au catégoriel », dans Hénault & Beyaert, 2004, pp. 65-82.

GROUPE µ, « Pourquoi y a-t-il du sens plutôt que rien ? Abrégé de sémiogénétique », *Signata*, 2, 2011, pp. 281-313.

HENAULT, Anne, BEYAERT-GESLIN, Anne (dirs), *Ateliers de sémiotique visuelle*, Paris, Presse Universitaires de France, (= Formes sémiotiques), 2004.

KLINKENBERG, Jean-Marie, « Á quoi servent les schémas ? Tabularité et dynamisme linéaire », *Protée*, 37-3 (n° spécial *Regards croisés sur les images scientifiques)*, 2009, pp. 65-73.

KLINKENBERG, Jean-Marie, « De la référence à la modélisation : les transformations de l'image scientifique. Conclusions », dans Dondero & Moutat, 2010a, pp. 143-155.

KLINKENBERG, Jean-Marie, « Faire voir à tout prix. Pourquoi ne peut-on se passer d'images ? », dans Mattozzi (dir.), 2010b, pp. 185-202.

[6] Sur tout ceci, *cf*. Klinkenberg, 2009.

MATTOZZI, Alvise (dir.), « Camoufler le visible, exhiber l'invisible », *Visible* 7, 2010 [paru en 2011].
MICHELSEN, Anders, STJERNFELD, Frederik (dirs), *Images from Afar. Scientific Visualization. An Anthology*, s.l. [Copenhague], Akademisk Forlag, 1996.
MIGLIORE, Tiziana (dir.), *Retorica del visibile. Strategie dell'immagine tra significazione e comunicazione. 1 Conferenze*, Rome, Aracne editrice, 2 vol., 2011.
PETITOT, Jean, « Les modèles morphodynamiques en perception visuelle », *Visio*, I, 1, 1996, pp. 65-73.
PETITOT, Jean, *Physique du sens*, Paris, Éditions du C.N.R.S., 1992.
PIAGET, Jean (dir.), *Logique et connaissance scientifique*, Paris, Gallimard (= Encyclopédie de La Pléiade, 22).
SICARD, M., *La Fabrique du regard. Images de la science et appareils de vision (XV^e^-XX^e^ siècles)*, Paris, Odile Jacob (= Le Champ médiologique), 1998.
THOM, René, *Stabilité structurelle et morphogenèse*, New York, Benjamin, Paris, Ediscience, 1972.
THOM, René, *Prédire n'est pas expliquer*, Paris, Flammarion, 1993.
VARELA, Francisco J., *Autonomie et connaissance. Essai sur le vivant*, Paris, Le Seuil (= La couleur des idées), 1989.
WIGNER, Eugen P., « The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences », *Communicatons on Pure and Applied Mathematics*, XIII, 1960, pp. 1-44.
ZEEMAN, Erik Christopher, *Catastrophe Theory. Selected Papers 1972–1977*, Reading, Addison-Wesley**,** 1977.

Table des matières

Visible est une revue de sémiotique visuelle mise en place par le CeReS (Centre de recherches sémiotique) de l'université de Limoges. Après avoir retracé les étapes de la réflexion relative à *l'Hétérogénéité du visuel* développée par un groupe de chercheurs européens (Limoges, Bologne-Venise, Liège), elle se consacre aux recherches menées dans le cadre d'un projet ANR *Images et dispositifs de visualisation scientifique* (2008-2010).

Ce programme ambitieux initie une relation entre la sémiotique et les sciences dites dures pour cerner les statuts, les genres et les rhétoriques qui caractérisent ces images. Ce numéro est consacré aux journées d'étude de Liège intitulées *Visualisation et mathématisation.*

Université de Limoges

AGENCE NATIONALE DE LA RECHERCHE ANR

ISBN : 978-2-84287-575-6
ISSN : 1778-042 X
20 €